

V. I. ISTRĂȚESCU

517.4  
J-87

# INTRODUCERE ÎN TEORIA OPERATORILOR LINIARI

## P R E F A Ț Ă

Sînt aproape douăzeci de ani de cînd urmăream, pe măsură ce erau scrise, capitolele cărții „Spații Hilbert” a lui C. Ionescu Tulcea, apărută în 1956 în Editura Academiei și marcînd o etapă în dezvoltarea teoriei spațiilor Hilbert și Banach și a operatorilor lor de diferite specii.

Dezvoltarea vertiginoasă a acestei teorii, îndatorată și cîtorva pietre albe ale trecutului nostru matematic prin opere ca ale lui Traian Lalescu, este marcată și prin valoroase contribuții românești relevate elocvent în paginile actualei cărți ca și în bogata sa bibliografie.

Această dezvoltare impunea cartea de față, ca o nouă etapă a științei noastre, și sîntem bucuroși că este din nou Editura Academiei care ne-o înlesnește. Cel care o scrie cu deosebită claritate, cu multă metodă și cu o informație impresionantă este cu atît mai îndreptățit să o facă, cu cît a adus el însuși numeroase contribuții la studiul operatorilor din spațiile Hilbert sau Banach.

Logica interioară a matematicii însăși, exigențele fenomenologiei fizice și mecanice care nu mai găsesc în formele și ecuațiile clasice ale analizei capacitatea suficientă de reprezentare, au găsit în diferitele tipuri de operatori asociați spațiilor Hilbert și Banach, instrumentele cele mai propice de interpretare ale fenomenologiei cuantice în special. Astăzi același proces rapid se petrece în domeniile biologiei și ale economiei. Aceasta obligă lămurirea cît mai completă a posibilităților ce deschide spre cunoaștere manipularea operatorilor încă nu suficient de diferențiați, pe cît sînt de exigente realitățile le care vrem să le aplicăm.

Sînt multe teorii matematice care au folosit în decursul ultimelor decenii procedee implicînd efectiv operatori ai unor, implicate și ele, spații Hilbert sau Banach. Acesta este cazul, de pildă, al proceselor aleatoare, ale celor Markov, sau al proceselor cu legături complete. Ele au început a deveni mult mai clare chiar pentru cei care le-au creat, de îndată ce au fost interpretate ca operatori, și, mai cu seamă, cînd s-au precizat spațiile în care lucrează.

Interpretarea aceasta este numai la început. Ea urmează să se desăvîrșească, în folosul atît al teoriilor respective cît și al aplicațiilor lor. Și pentru aceasta cartea de față poate fi de mare utilitate, prezentînd o imagine bogată și strîns unitară a tipurilor de operatori pe care știința îi stăpînește

în momentul de față, deschizînd și perspective de a crea și alții, după necesități.

De altfel sînt obligat să observ că autorul a fost foarte atent la ecoul pe care vastul cîmp de operatori ce studiază îl va trezi în lumea utilizatorilor. Dovadă despre aceasta este capitolul consacrat spațiilor Hilbert cuaternionice care interesează de-aproape fizica cuantică actuală, precum și ultimul capitol intitulat clase de operatori și teoreme ergodice al cărui titlu este deosebit de elocvent și sînt sigur că are răsunset și în lumea economiștilor avizi astăzi după interpretări ergodice ale fenomenelor respective.

Teoremele pe care autorul le dă în Apendix sînt de un ajutor efectiv pentru înțelegerea mai multor părți din volum și îl completează cu aceeași grijă de claritate și precizie care este o caracteristică a întregii lucrări.

OCTAV ONICESCU

# CUPRINS

## INTRODUCERE

### CAPITOLUL I. SPAȚII HILBERT ȘI SPAȚII BANACH. . 15

§ 1. Spații Hilbert . . . . .	15
§ 2. Baze în spații Hilbert . . . . .	21
§ 3. Operatori pe spații Hilbert . . . . .	24
§ 4. Adjunctul unui operator mărginit . . . . .	29
§ 5. Operatori hermitieni . . . . .	31
§ 6. Operatori normali . . . . .	33
§ 7. Operatori unitari . . . . .	36
§ 8. Convergență în $E$ și $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	37
§ 9. Operatori izometrice și parțial izometrice . . . . .	41
§ 10. Spații Banach . . . . .	42
§ 11. Teorema Hahn-Banach și teorema Bohnenblust-Sobczyk . . . . .	44
§ 12. Trei teoreme fundamentale . . . . .	51
§ 13. Câteva aplicații . . . . .	55
§ 14. Spațiul $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	64
§ 15. Elemente speciale în $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	68
§ 16. Algebre Banach . . . . .	96

### CAPITOLUL II. RANG NUMERIC. . . . . 119

§ 1. Noțiunea de rang numeric . . . . .	119
§ 2. Teorema lui Hausdorff-Toeplitz pe spații vectoriale . . . . .	126
§ 3. Rang numeric în sens Lumer . . . . .	129
§ 4. Exemple . . . . .	142
§ 5. Unele aplicații . . . . .	144
§ 6. Rang numeric pe spații Banach și algebre Banach . . . . .	147
§ 7. Operatori hermitici și <u>normali</u> pe spații Banach . . . . .	157
§ 8. Generalizarea noțiunii de operator autoadjunct . . . . .	168
§ 9. Teorema lui Fuglede și unele aplicații . . . . .	171
§ 10. Clase de elemente într-o algebră Banach cu element unitate. Teorema lui Vidav-Palmer . . . . .	173
§ 11. Unele proprietăți ale elementelor hermitice . . . . .	182
§ 12. Raza numerică și iteratele unui element . . . . .	185

### CAPITOLUL III. CONDIȚII CARE IMPLICĂ NORMALITATEA 189

§ 1. Condiții care implică proprietatea de a fi hermitian ori unitar . . . . .	189
§ 2. Condiții de normalitate . . . . .	198
§ 3. Condiții de normalitate pe spații infinit-dimensionale . . . . .	204

<b>CAPITOLUL IV.</b>	<b>CLASE DE OPERATORI NENORMALI . .</b>	<b>Pag. 218</b>
§	1. Definiția și proprietățile unor clase de operatori nenormali . . . . .	218
§	2. Dilatarea operatorilor și mulțimi spectrale . . . . .	232
§	3. Operatori cu proprietatea $G_1$ . . . . .	241
§	4. Operatori cu proprietatea $\text{Re } \sigma(T) = \sigma(\text{Re } T)$ . . . . .	254
§	5. Operatori convexoizi . . . . .	261
§	6. Produsul tensorial și clase de operatori . . . . .	270
<b>CAPITOLUL V.</b>	<b>SUBSPAȚII INVARIANTE ȘI TEOREME DE STRUCTURĂ . . . . .</b>	<b>285</b>
§	1. Introducere; O teoremă de existență . . . . .	285
§	2. Teorema lui Suzuki și o generalizare a ei. Alte teoreme privind subspațiile invariante . . . . .	287
§	3. Operatori complet reductibili; un exemplu . . . . .	291
§	4. Teorema lui Andô și extensii ale acesteia . . . . .	292
§	5. O generalizare a noțiunii de operator complet reductibil . . . . .	295
§	6. Structura operatorilor polinomiali compacți . . . . .	297
§	7. Operatori normali polinomiali compacți . . . . .	299
§	8. Operatorul de translație; operatori cvasi-similari . . . . .	299
§	9. Clase de subspații care reduc . . . . .	303
<b>CAPITOLUL VI.</b>	<b>OPERATORI SIMETRIZABILI ȘI GENERALIZĂRI ALE LOR . . . . .</b>	<b>307</b>
§	1. Produse scalare pe spații Banach . . . . .	307
§	2. Măsuri Radon și produse scalare . . . . .	310
§	3. Operatori simetrizabili pe spații Hilbert. Generalizări . . . . .	315
§	4. Operatori simetrizabili pe spații Banach. Operatori cvasinormalizabili . . . . .	318
§	5. Câteva aplicații ale operatorilor simetrizabili și cvasinormalizabili . . . . .	323
§	6. O teoremă de interpolare . . . . .	326
§	7. Unele observații privind operatorii simetrizabili . . . . .	328
§	8. Unele probleme privind operatorii simetrizabili . . . . .	328
<b>CAPITOLUL VII.</b>	<b>SPECTRUL WEYL AL UNUI OPERATOR . . . . .</b>	<b>329</b>
§	1. Preliminarii. Noțiuni și rezultate generale . . . . .	329
§	2. Spectrul Weyl . . . . .	332
§	3. Teorema lui von Neumann . . . . .	349
<b>CAPITOLUL VIII.</b>	<b>Norme Schwarz . . . . .</b>	<b>350</b>
§	1. Norme Schwarz pe spații Hilbert . . . . .	350
§	2. Extensia la spații Banach . . . . .	358
<b>CAPITOLUL IX.</b>	<b>VECTORI ANALITICI ȘI CVASIANALITICI PENTRU UNELE CLASE DE OPERATORI . . . . .</b>	<b>361</b>
§	1. Vectori analitici și cvasianalitici pentru operatori pe spații Hilbert și spații Banach . . . . .	362
§	2. Elemente analitice în algebre Banach comutative . . . . .	363
§	3. Aplicații la teoria operatorilor autoadjuncți . . . . .	364
§	4. Vectori analitici și cvasianalitici pentru unele clase de operatori . . . . .	367

	Pag.
§ 5. Relații între diferite clase de vectori . . . .	370
§ 6. Operatori autoadjuncți și vectori $p$ -semi-analitici . . . . .	370
§ 7. Clase de vectori pentru operatori disipativi și semigrupuri . . . . .	374
§ 8. Elemente analitice și cvasianalitice în algebre Banach comutative . . . . .	376
§ 9. Elemente analitice și cvasianalitice în spații Gelfand-Kostiucenko. . . . .	377
§ 10. Vectori analitici și cvasianalitici pentru operatori simetrizabili . . . . .	378
§ 11. Prelungirea Friederichs . . . . .	378
<b>CAPITOLUL X. TEOREME DE MAXIMUM PENTRU FUNCȚII OLOMORFE VECTORIALE . . . . .</b>	<b>381</b>
§ 1. Funcții subarmonice . . . . .	381
§ 2. Teoreme de maxim pentru norme . . . . .	390
§ 3. Subarmonicitatea razei spectrale . . . . .	400
<b>CAPITOLUL XI. SPAȚII HILBERT CUATERNIONICE . . . .</b>	<b>413</b>
§ 1. Introducere . . . . .	413
§ 2. Corpul necomutativ al cuaternionilor . . . .	413
§ 3. Spații Hilbert cuaternionice. . . . .	414
§ 4. Spații Banach cuaternionice . . . . .	417
§ 5. Operatori pe spații Hilbert cuaternionice .	418
§ 6. Teorie spectrală . . . . .	421
§ 7. Descompunerea spectrală pentru operatori normali . . . . .	424
<b>CAPITOLUL XII. CLASE DE OPERATORI ȘI TEOREME ERGODICE UNIFORME . . . . .</b>	<b>428</b>
§ 1. Introducere . . . . .	428
§ 2. Măsură de necompactitate. Operatori $\alpha$ -contracții, $\alpha$ -local contracții și teoreme ergodice uniforme	428
§ 3. Aplicații la procese Markov . . . . .	438
<b>APPENDIX . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>I. TEOREMA LUI HERGLOTZ . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>II. „SPECTRAL MAPPING THEOREM” PENTRU OPERATORI HERMITIENI ȘI NORMALI . . . . .</b>	<b>444</b>
<b>III. TEOREMA LUI FUGLEDE-PUTNAM . . . .</b>	<b>452</b>
<b>BIBLIOGRAFIE . . . . .</b>	<b>457</b>
<b>INTRODUCTION INTO THE THEORY OF LINEAR OPERATORS (abstract) . . . . .</b>	<b>473</b>
<b>CONTENTS . . . . .</b>	<b>475</b>

## INTRODUCERE

Scopul cărții de față este de a prezenta o scurtă, dar completă, introducere în teoria operatorilor pe spații Hilbert și spații Banach cît și rezultate privind unele clase de operatori care au fost studiate intens în ultimul timp.

În capitolul 1 sînt date rezultate generale privind spațiile Hilbert și spațiile Banach cît și o introducere succintă în teoria algebrelor Banach. Vom menționa ca un fapt special, prezentarea unitară a unor teoreme fundamentale ale analizei funcționale liniare și anume teorema graficului închis, teorema aplicației deschise și principiul mărginirii uniforme.

Capitolul 2 este consacrat teoriei rangului numeric, noțiune care are un rol fundamental în tot restul cărții. Sînt prezentate rezultate celebre datorate lui O. Toeplitz, F. Hausdorff, N. Aronszajn, G. Lumer, I. Vidav, T. Palmer.

Această noțiune, pentru cazul spațiilor Hilbert a fost utilizată de către O. Toeplitz încă în 1919 și F. Hausdorff în 1921 care au arătat în esență că rangul numeric al unui operator liniar și mărginit pe un spațiu Hilbert este o mulțime convexă. Noțiunea de rang numeric pentru operatori pe spații Banach a fost introdusă de către G. Lumer în teza sa sub conducerea lui I. Kaplansky.

Importante rezultate au obținut Vidav și Palmer care au dat o teoremă de caracterizare a  $C^*$ -algebrelor utilizînd rezultate privind rangul numeric.

O clasă importantă de operatori pe spații Hilbert este clasa operatorilor normali și de aceea este important de a ști în ce condiții un operator este normal. În capitolul 3 se dau tocmai astfel de condiții, mai întîi pentru cazul spațiilor finit-dimensionale și apoi pentru cazul spațiilor infinit dimensionale.

În capitolul 4 sînt studiate diferite clase de operatori, clase care apar în mod natural în studiul condițiilor suficiente ca un operator să fie normal. Sînt date astfel rezultate privind clasa de operatori introdusă de A. Wintner în 1929 numită și clasa de operatori normaloizi, adică operatori pentru care norma este egală cu raza spectrală. Sînt date apoi rezultate privind alte clase de operatori ca, de exemplu, operatori convexoizi cu proprietatea  $G_1$  etc.

În capitolul 5 sînt date rezultate privind problema importantă a existenței subspațiilor proprii invariante pentru operatori liniari și mărginiți pe spații Banach. Este prezentat rezultatul recent, foarte ingenios, datorat matematicianului sovietic Lomonosov cît și unele teoreme de structură utilizînd teorema de existență.

Capitolul 6 este consacrat teoriei operatorilor simetrizabili și unor generalizări ale lor împreună cu unele aplicații importante dintre care vom menționa demonstrația mai simplă a unei teoreme de interpolare.

Vom menționa că cercetările românești în acest domeniu, menționate în text, datează aproape de la începutul acestui secol. Contribuții interesante în acest domeniu a adus matematicianul român P. Sergescu formulate în cadrul spațiilor Banach de funcții.

În capitolul 7 sînt date rezultate care extind un rezultat celebru al lui H. Weyl privind invarianța la perturbații a unei părți din spectrul unui operator hermitic. Aceste rezultate sînt importante deoarece își găsesc aplicații la unele probleme din mecanica cuantică.

Capitolul 8 este consacrat construcției unor norme pe algebra operatorilor pe un spațiu Hilbert care posedă o proprietate asemănătoare cu cea dată de lema lui Schwarz din teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

În capitolul 9 sînt date rezultate privind noțiunea de vector analitic pentru un operator (nemărginit) cît și unele generalizări. Este prezentată teorema celebră a lui E. Nelson din 1959 care arată condiția necesară și suficientă ca un operator să fie autoadjunct, dînd o introducere în cercetările făcute de acad. M. Nicolescu începînd din 1956, privind noțiunea de element analitic într-o algebră Banach cu element unitate.

Diferite extensiuni ale acestei noțiuni, utilizînd în special modelul funcțiilor cvasianalitice, au fost date; de asemenea a fost considerată legătura între aceste noțiuni și unele clase de semigrupuri de operatori.

Capitolul 10 este consacrat unor teoreme de maximum pentru funcții vectoriale arătîndu-se subarmonicitatea unor funcții ca, de exemplu, a razei spectrale, a razei numerice etc.

În capitolul 11 sînt expuse elemente de teoria spațiilor Hilbert cuaternionice care capătă în ultimul timp tot mai mare importanță prin aplicațiile la mecanica cuantică.

În capitolul 12 sînt studiate unele clase de operatori care au aplicații la teoria ergodică a proceselor Markov așa cum a fost formulată de Yosida și Kakutani. Această clasă de operatori generalizează în mod natural clasa operatorilor cvasicompacți care joacă un rol fundamental în teoria lui Yosida și Kakutani. Teoria pe care o prezentăm este paralelă într-un anumit sens cu cea dată de G. Marinescu și C. Ionescu Tulcea.

În appendix sînt prezentate unele rezultate interesante atît prin ele însele cît și prin faptul că au intervenit în unele părți ale cărții sau prezintă unele aspecte importante legate de unele clase de operatori.

Majoritatea rezultatelor expuse nu au mai fost prezentate în alte cărți, ci numai în revistele de specialitate.

Primele două capitole se adresează studenților de la Facultățile de matematică, fiind complet accesibile avînd cunoștințe de analiză și algebră liniară. Celelalte capitole sînt de mai mare interes pentru studenții care se interesează de probleme speciale și actuale în teoria operatorilor. De asemenea capitolele 7, 9, 11 se adresează și fizicienilor teoreticieni, în special celor care se ocupă cu mecanica cuantică.

Capitolul 12 conține rezultate care pot interesa și probabiliști, în special pe cei care se interesează de teoria ergodică.

Autorul ține să mulțumească și pe această cale următoarelor persoane pentru ajutorul primit atît în ceea ce privește lucrări tipărite sau în

manuseris cit și pentru corespondența foarte prețioasă privind unele aspecte ale teoriilor expuse în carte: profesorilor: S.K. Berberian (University of Texas, Austin), John Ernest (Univ. of California, Santa Barbara), T. Furuta (Ibaraki University), K. Gustafson (University of Colorado, Boulder), G. Luecke (Iowa State University), B. Morell (University Athens, Georgia), P. S. Muhly (The University of Iowa), J. Nieto (Université de Montréal), C. R. Putnam (Purdue University, Lafayette), T. W. Palmer (Rutgers State University), S. Patel (Sardar Patel University), P.B. Ramanujan (Sardar Patel University), T. Saitô (Tohoku University), I. H. Sheth (Gujarat University), E. Vesentini (Scuola Normale, Pisa), R. J. Whitley (University of California, Irvine), T. Yoshino (Tohoku University).

Observațiile făcute de Gh. Constantin și I. Istrățescu mi-au fost foarte folositoare: lor le aparține redactarea unor paragrafe din cap. VI.

Sugestii foarte interesante am primit și de la acad. Gheorghe Vrăncianu, privind aplicațiile spațiilor Hilbert în geometria diferențială, în special la scufundarea unor varietăți. Țin să exprim și pe această cale sincere mulțumiri.

În sfârșit, ultimul, dar nu și cel din urmă, prietenului meu Gr. Bănescu pentru ajutorul dat privind unele probleme de redactare.

AUTORUL

## SPAȚII HILBERT ȘI SPAȚII BANACH

## § 1. SPAȚII HILBERT

Fie  $E$  o mulțime arbitrară, iar  $K$  una din mulțimile :  $R$  corpul numerelor reale sau  $C$  corpul numerelor complexe.

Se spune că  $\mathcal{X}$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K$  dacă există aplicațiile :

$$1) E \times E \rightarrow E \quad \text{notată cu „ + ”}$$

$$2) K \times E \rightarrow E \quad \text{notată cu „ . ”}$$

și care satisfac următoarele condiții :

$$1) (x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{asociativitate}$$

$$2) x + y = y + x \quad \text{comutativitate}$$

$$3) \text{ în } \mathcal{X} \text{ există elementul } 0 \text{ (zero) cu proprietatea}$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$4) (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$5) \lambda(x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \text{distributivitate}$$

$$6) (\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x) \quad \text{asociativitate}$$

$$7) 1 \cdot x = x$$

axioma inversului?

oricare ar fi  $\lambda, \mu \in K$  și oricare ar fi  $x, y, z \in E$ . Dacă  $K = R$  se spune că  $E$  este un spațiu vectorial real, iar dacă  $K = C$  se spune că  $E$  este un spațiu vectorial complex.

Pentru diferite exemple de spații vectoriale, cât și pentru diferite proprietăți ale spațiilor vectoriale, consecințe ale axiomelor de mai sus, cititorul poate consulta [274].

Vom da acum definiția spațiilor Banach urmînd ca apoi să studiem mai amănunțit o clasă foarte importantă de spații Banach și anume clasa spațiilor Hilbert.

**DEFINIȚIA 1.1.1.** Un spațiu vectorial  $E$  peste corpul  $K$  se spune liniar normat peste corpul  $K$  dacă s-a definit o funcție

$$x \rightarrow \|x\|$$

numită normă, cu următoarele proprietăți :

- 1°.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- 2°.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
- 3°.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,

oricare ar fi  $\lambda \in K$  și  $x, y$  în  $E$ .

DEFINIȚIA 1.1.2. Un spațiu liniar normat se spune că este spațiu Banach dacă orice șir Cauchy, adică, un șir  $\{x_n\}$  cu proprietatea că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N_\varepsilon$  astfel că dacă  $n, m \geq N_\varepsilon$ ,  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ , are proprietatea că există  $x_0 \in E$  astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Dacă  $E$  este un spațiu liniar normat și pentru orice  $x, y \in E$ , punem :

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

atunci se verifică ușor că  $(E, \rho)$  este un spațiu metric, adică  $\rho$  satisface următoarele proprietăți :

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ ,

oricare ar fi  $x, y, z$  în  $E$ .

Se poate verifica ușor că

$$x \rightarrow \|x\|$$

este o funcție continuă pe spațiu  $(E, \rho)$ . În adevăr aceasta rezultă imediat din inegalitatea, ușor de verificat,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

DEFINIȚIA 1.1.3. Se spune că pe un spațiu vectorial  $E$  s-a definit un produs scalar dacă avem o aplicație, notată cu  $\langle, \rangle$

$$E \times E \rightarrow K$$

cu proprietățile următoare :

- 1°.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ ,
- 2°.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ,
- 3°.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- 4°.  $\langle x, x \rangle > 0$  dacă  $x \neq 0$

(dacă  $z$  este un număr complex atunci  $\bar{z}$  este conjugatul său). Are loc:

TEOREMA 1.1.4. *Aplicația*

$$x \rightarrow \langle x, x \rangle^{1/2} = |x|$$

definită pe un spațiu vectorial cu produs scalar este o normă.

*Demonstrație.* Proprietățile 1° și 3° ale normei sînt evidente. Pentru a stabili proprietatea 2° vom avea nevoie de următoarea inegalitate, cunoscută și sub numele de:

Inegalitatea lui Cauchy: Oricare ar fi  $x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq |x|^2 |y|^2.$$

În adevăr, din 4° rezultă că pentru orice  $\lambda$  avem

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$$

și luînd  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  avem

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle},$$

care ne dă inegalitatea pe care am dorit să o demonstrăm.

În demonstrație am presupus că  $y \neq 0$ . Dacă  $y = 0$  atunci evident că inegalitatea lui Cauchy este adevărată, deoarece,

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Pentru a demonstra proprietatea 2° a normei, procedăm astfel:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \\ &+ \langle y, y \rangle + 2|\operatorname{Re} \langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \\ &+ 2|x||y| = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

de unde  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

Teorema este astfel demonstrată.

Putem defini acum noțiunea de spațiu Hilbert.

DEFINIȚIA 1.1.5. Un spațiu Hilbert este un spațiu Banach în care norma este dată de un produs scalar, adică există produsul scalar  $\langle, \rangle$  astfel ca

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Noțiunea de ortogonalitate se poate introduce în cadrul spațiilor Hilbert astfel:

DEFINIȚIA 1.1.6. Două elemente ale unui spațiu Hilbert  $x$  și  $y$  se spun ortogonale dacă  $\langle x, y \rangle = 0$  și vom scrie aceasta astfel  $x \perp y$ . Este evident că elementul zero este ortogonal pe orice element al spațiului  $E$ .

Are loc următoarea :

TEOREMA 1.1.7. Dacă  $x \perp y$  atunci

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

*Demonstrație.* Avem evident :

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \\ &+ \langle y, y \rangle = |x|^2 + |y|^2. \end{aligned}$$

*Observație.* Teorema de mai sus se extinde imediat la un număr finit de elemente  $\{x_i\} \subset E$  astfel ca :

$$\langle x_i, y_i \rangle = \langle x_i, x_i \rangle \delta_{ij}; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

TEOREMA 1.1.8. Oricare ar fi  $x, y \in E$  avem

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2 \{ |x|^2 + |y|^2 \}.$$

*Demonstrație.* Avem

$$|x + y|^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle,$$

$$|x - y|^2 = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

și prin adunare obținem relația cerută.

Spațiile Hilbert au o proprietate remarcabilă și anume că admit un anumit tip de descompunere în raport cu un subspațiu arbitrar dat. Pentru a stabili existența unei astfel de descompuneri vom avea nevoie de câteva rezultate privind mulțimile convexe.

DEFINIȚIA 1.1.9. O submulțime  $C$  a unui spațiu vectorial  $E$  se spune că este convexă dacă din  $x, y \in C$  rezultă că  $\alpha x + (1 - \alpha) y \in C$  pentru orice  $\alpha \in [0, 1]$ .

TEOREMA 1.1.10. Dacă  $C$  este o mulțime închisă și convexă într-un spațiu Hilbert  $E$  atunci există un singur element  $x_0$  de normă minimă în  $C$ .

*Demonstrație.* Fie  $d = \inf_{x \in C} |x|$ . Dacă  $d = 0$  atunci zero este elementul căutat și afirmația este demonstrată. Dacă  $d > 0$  atunci există

$\{x_n\} \in C$  astfel ca  $d = \lim_n |x_n|$ . Vom arăta că  $\{x_n\}$  este un șir Cauchy. În adevăr, din teorema 1.1.7. rezultă că

$$|x_n + x_m|^2 + |x_n - x_m|^2 = 2 \{ |x_n|^2 + |x_m|^2 \}$$

și deci

$$|x_n - x_m|^2 = 2 \{ |x_n|^2 + |x_m|^2 \} - 4 \left\{ \left| \frac{x_n + x_m}{2} \right|^2 \right\}.$$

Cum însă  $C$  este convexă,  $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$  și deci  $\left| \frac{x_n + x_m}{2} \right| \geq d$  de unde rezultă că

$$\limsup |x_n - x_m| \leq 0,$$

care ne dă că  $\{x_n\}$  este un șir Cauchy. Fie deci  $x_0 = \lim_n x_n$  și cum  $C$  este închisă rezultă că  $x_0 \in C$ . Evident că  $|x_0| = d$  și  $x_0$  este deci element de normă minimă. Să arătăm că este unic. Presupunem că mai există  $y_0$  astfel ca

$$|x_0| = |y_0| = d$$

și deci cum  $\frac{x_0 + y_0}{2} \in C$  rezultă că  $\left| \frac{x_0 + y_0}{2} \right| > d$  și teorema 1.1.7. ne dă

$$0 \neq |x_0 - y_0|^2 = 2 \{ |x_0|^2 + |y_0|^2 \} - 4 \left\{ \left| \frac{x_0 + y_0}{2} \right|^2 \right\} < 0,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Teorema este demonstrată.

**DEFINIȚIA 1.1.11.** Pentru orice mulțime  $S \subset E$  dintr-un spațiu Hilbert vom pune

$$S^\perp = \{y, y \in E, \langle x, y \rangle = 0; x \in S\}.$$

Are loc următoarea:

**TEOREMA 1.1.12.** Fie  $E_1$  un subspațiu vectorial care este și închis (ca mulțime) în spațiul Hilbert  $E$ . În acest caz orice element  $x \in E$  se scrie sub forma

$$x = x_1 + x_2$$

cu  $x_1 \in E_1$  și  $x_2 \in E_1^\perp$ , iar  $E_1^\perp$  este un subspațiu vectorial închis al lui  $E$ .  $E_1^\perp$  se mai numește și complementul ortogonal al spațiului  $E_1$ .

*Demonstrație.* Fie  $x \in E_1$  și să considerăm mulțimea

$$C = \{z, z = x - y, y \in E_1\},$$

care se verifică imediat că este o mulțime convexă și închisă. Conform teoremei 1.1.10. există un element unic de normă minimă pe care să-l notăm cu  $x_2$  și să punem  $x_2 = x - x_1$ . Trebuie să arătăm că  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$  (evident că  $x_1 \in E_1$ ). În adevăr, faptul că  $x_2$  are norma minimă, ne dă că pentru orice  $\lambda$

$$\|x_2 - \lambda y\|^2 \geq \|x_2\|^2$$

adică

$$\langle x_2, x_2 \rangle - \bar{\lambda} \langle x_2, y \rangle - \lambda \langle y, x_2 \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq \langle x_2, x_2 \rangle$$

și pentru

$$\lambda = \frac{\langle x_2, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

obținem că

$$-|\langle x_2, y \rangle| \geq 0,$$

de unde  $\langle x_2, y \rangle = 0$  oricare ar fi  $y \in E_1$ . În particular pentru  $x_1$  obținem afirmația noastră. În acest fel am demonstrat existența descompunerii spațiului  $E$ ; mai rămâne să demonstrăm unicitatea unei astfel de descompuneri. Să presupunem că există o altă descompunere

$$x = x'_1 + x'_2 \text{ cu } x'_1 \in E_1 \text{ și } x'_2 \in E'_1$$

de unde

$$0 = \|x_1 - x'_1\|^2 + \|x_2 - x'_2\|^2$$

ceea ce ne dă:  $x_1 = x'_1$  și  $x_2 = x'_2$ . Teorema este astfel demonstrată.

Vom da acum câteva exemple uzuale de spații Hilbert:

1°. Fie  $l^2$  mulțimea șirurilor  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  astfel ca

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty.$$

Dacă  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ ,  $\eta \in l^2$  atunci

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$$

este un produs scalar pe  $l^2$  și este chiar complet; deci  $l^2$  este un spațiu Hilbert.

2°. Fie  $X$  un spațiu Hausdorff local compact și  $\mu$  o măsură pozitivă, finită pe  $\mathfrak{B}(X)$ -mulțimile boreliene ale lui  $X$ . Să notăm cu  $\mathfrak{L}^2(X, \mu)$  spațiul funcțiilor (claselor de funcții) cu proprietatea că

$$\|f\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu < \infty.$$

Dacă  $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$  și produsul scalar este dat de

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

obținem că  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$  este un spațiu Hilbert.

3°. Fie  $\mathcal{D} = \{z, |z| \leq 1\}$  și  $H^2$  mulțimea funcțiilor analitice în  $\{z, |z| < 1\}$  cu proprietatea că

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty$$

formează un spațiu Hilbert; produsul scalar se definește ca mai sus.

4°. Pentru a da următorul exemplu vom avea nevoie de noțiunea de sumabilitate.

Fie  $I$  o mulțime arbitrară de indici și  $\{x_i\}_{i \in I}$  o familie de numere complexe. Prin definiție, se spune că această familie este sumabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există o parte finită  $F_\varepsilon \subset I$  astfel încât

$$\left| \sum_{i \in F_\varepsilon} x_i - x \right| < \varepsilon$$

oricare ar fi partea finită  $\Gamma \supset F_\varepsilon$ .

Vom defini acum spațiul  $l_I^2$  ca fiind mulțimea elementelor  $\xi = (x_i)_{i \in I}$  astfel ca  $\{\|x_i\|^2\}_{i \in I}$  este sumabilă. Produsul scalar se definește în mod natural și dacă  $I = (1, 2, \dots)$ ,  $l_I^2 = l^2$ , spațiul considerat în exemplul 3°.

## § 2. BAZE ÎN SPAȚII HILBERT

Fie  $E$  un spațiu Hilbert și  $I$  o familie de indici, iar  $\{x_i\}_{i \in I} \subset E$ . Sumabilitatea unei familii de elemente dintr-un spațiu Hilbert se definește asemănător cu aceea dată în exemplul 4°, de mai sus pentru familii de numere complexe.

DEFINIȚIA 1.2.1. O familie de elemente  $\{x_i\}_{i \in I}$  se zice ortonormală dacă

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Fie  $\mathcal{F}$  mulțimea familiilor ortonormale ale unui spațiu Hilbert  $E$  care evident este nevidă. Să introducem o relație de ordine între elementele lui  $\mathcal{F}$  prin  $f_1 \leq f_2$  dacă și numai dacă  $f_1$  este o parte a lui  $f_2$ . Fie  $\{f_r\}$  o familie total ordonată, evident că mulțimea formată cu elementele tuturor mulțimilor  $f_r$  este o margine superioară, și în acest mod am verificat că putem aplica lema lui Zorn. Rezultă astfel că există cel puțin o familie ortonormală maximală în  $\mathcal{F}$ .

**DEFINIȚIA 1.2.2.** O familie ortonormală maximală într-un spațiu Hilbert  $E$  se numește bază.

Fie  $\{x_i\}_{i \in I}$  o bază a spațiului Hilbert  $E$ . Pentru orice  $x \in E$  definim numărul

$$x(i) = \langle x, x_i \rangle$$

și să considerăm funcția

$$i \rightarrow x(i).$$

Prin definiție  $\{\langle x, x_i \rangle\}_{i \in I}$  se numesc coeficienții Fourier ai elementului  $x$  în raport cu baza ortonormală  $\{x_i\}_{i \in I}$ . Putem demonstra unele rezultate privind coeficienții Fourier ai unui element dintr-un spațiu Hilbert.

**TEOREMA 1.2.3.** Fie  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  o familie ortonormală finită de elemente din  $E$  și  $x$  un element arbitrar din  $E$ . În acest caz:

$$\inf_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2.$$

*Demonstrație.* Să calculăm  $\left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|^2$ . Vom avea,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|^2 &= \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \langle x, x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \langle x, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\langle x, x_i \rangle} + \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \\ &= \langle x, x \rangle + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

și deci inferiorul se atinge pentru

$$\lambda_1 = \langle x, x_1 \rangle, \dots, \lambda_n = \langle x, x_n \rangle.$$

Teorema este astfel demonstrată.

**COROLAR 1.2.4.** Fie  $\{x_i\}_{i \in I}$  o familie ortonormală. Pentru orice parte finită  $J \subset I$  avem

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

*Demonstrație.* Fie  $P$  mulțimea părților finite ale lui  $I$ . În acest caz, prin definiție

$$\sup_{J \in P} \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2$$

și deci

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Această inegalitate este cunoscută și sub numele de inegalitatea lui Bessel.

**DEFINIȚIA 1.2.5.** Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Hilbert; ele sînt izomorfe dacă există o aplicație  $J: E_1 \rightarrow E_2$  cu proprietatea

$$1. \quad \langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

$$2. \quad J(E_1) = E_2.$$

**TEOREMA 1.2.6.** (de izomorfism). Dacă  $\{x_i\}_{i \in I}$  este o bază a spațiului  $E$  și  $l_I^2$  este spațiul Hilbert construit cu mulțimea de indici  $I$ . În acest caz  $E$  și  $l_I^2$  sînt izomorfe.

*Demonstrație.* Aplicația  $J$  o definim astfel

$$J(x) = \{x(i)\}, \quad x(i) = \langle x, x_i \rangle.$$

Verificarea afirmațiilor făcîndu-se ușor, o omitem.

**Remarca 1.2.7.** Din teorema de izomorfism rezultă că două spații Hilbert sînt izomorfe dacă și numai dacă mulțimile  $I$  atașate bazelor au același cardinal.

**Remarca 1.2.8.** Pentru cititorul familiarizat cu teoria măsurii este clar că,  $l_I^2$  este spațiul  $\mathcal{L}^2(I, \mu)$ , unde  $\mu$  este o măsură definită pe  $I$  astfel ca  $\mu(i) = 1$ .

**Remarca 1.2.9.** Din teorema de izomorfism rezultă că

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$$

care se mai numește și identitatea lui Parseval.

Vom da acum cîteva rezultate, fără demonstrație, strîns legate de cele expuse pînă acum.

**PROPOZIȚIA 1.2.10.** Pentru orice  $x, y \in E$ —un spațiu Hilbert  $x \neq 0 \neq y$  să definim

$$r(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{|x + y|^2 + |x - y|^2}{|x|^2 + |y|^2} \right\},$$

avem inegalitatea

$$\frac{1}{2} \leq r(x, y) \leq 2.$$

**PROPOZIȚIA 1.2.11.** Pentru orice subspațiu închis  $E_1$  avem

$$(E_1^\perp)^\perp = E_1.$$

PROPOZIȚIA 1.2.12. *Orice spațiu Hilbert este uniform convex în sensul lui Clarkson, adică pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel că dacă*

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \|x - y\| \geq \varepsilon$$

atunci

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

(rezultă aproape imediat din teorema 1.1.8.).

### § 3. OPERATORI PE SPAȚII HILBERT

Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Hilbert peste același corp  $K$ . O funcție

$$T: E_1 \rightarrow E_2$$

se va numi operator liniar dacă următoarele condiții sînt satisfăcute

$$1^\circ. \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$2^\circ. \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

oricare ar fi  $\alpha \in K$  și  $x, y$  în  $E_1$ . Uneori vom scrie, în loc de  $T(x)$  simplu  $Tx$ .

Vom nota normele induse de cele două produse scalare prin  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$  respectiv, în cele două spații.

DEFINIȚIA 1.3.1. Un operator liniar  $T: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $E_i$ ,  $i=1, 2$  spații Hilbert, este mărginit dacă există  $M > 0$  astfel ca

$$\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1,$$

oricare ar fi  $x \in E_1$ .

Mulțimea operatorilor liniari și mărginiți definiți pe  $E_1$  cu valori în  $E_2$  o vom nota cu  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  și dacă  $E_1 = E_2 = E$  vom scrie  $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$ .

Următoarea teoremă arată legătura dintre operatorii liniari mărginiți și operatorii liniari care sînt funcții continue.

TEOREMA 1.3.2. *Un operator liniar  $T: E_1 \rightarrow E_2$  este mărginit dacă și numai dacă este continuu.*

*Demonstrație.* Dacă  $T$  este mărginit atunci este evident că este și continuu. Să presupunem acum că, este continuu și nu este mărginit. În acest caz există un șir  $\{x_n\}$  astfel ca

$$\|Tx_n\|_2 \geq n\|x_n\|_1.$$

Punînd

$$x'_n = \frac{1}{n \|x_n\|_1} x_n$$

care are proprietatea că

$$\lim x'_n = 0$$

și cum  $T$  este continuu, rezultă că

$$\lim T x'_n = 0.$$

Însă

$$\|T x'_n\| = \frac{1}{n \|x_n\|_1} \|T x_n\|_2 \geq \frac{1}{n \|x_n\|_1} \cdot n \|x_n\|_1 = 1$$

ceea ce reprezintă o contradicție și teorema este demonstrată.

Prin definiție cea mai mică constantă  $M$ , cu proprietatea

$$\|T x\|_2 \leq M \|x\|_1,$$

se numește norma operatorului  $T$  și se notează cu  $\|T\|$ . Este evident că

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|T x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|T x\|_2.$$

**TEOREMA 1.3.3.** *Dacă  $T$  este un operator liniar care este continuu într-un punct  $x_0 \in E_1$  atunci  $T$  este mărginit.*

*Demonstrație.* Conform teoremei de mai înainte va fi suficient să demonstrăm că este continuu în oricare alt punct  $x_1 \neq x_0$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca din

$$\|x - x_0\|_1 \leq \delta(\varepsilon)$$

să rezulte

$$\|T x - T x_0\|_2 \leq \varepsilon.$$

Fie  $\|x' - x_1\|_1 \leq \delta(\varepsilon)$  și cum  $x = x' + x_0 - x_1$  din  $x - x_0 = x' - x_1$  deducem că

$$\|T x' - T x_1\|_2 = \|T(x' - x_1)\|_2 = \|T(x - x_0)\|_2 \leq \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

Dacă spațiul  $E_2$  este corpul  $K$ , spațiul  $\mathcal{L}(E_1, K) = E_1^*$  și se mai numește dualul lui  $E_1$ , iar elementele sale, funcționale liniare. În cazul spațiilor Hilbert  $E$  elementele din  $E^*$  au o descriere strîns legată de elementele spațiului  $E$ . Acest lucru a fost remarcat de către F. Riesz și M. Fréchet.

**TEOREMA 1.3.4. (Riesz și Fréchet).** Pentru orice element  $F \in \mathcal{L}(E, C) = E^*$  există un element unic  $x_F \in E$  astfel ca

$$1. \quad F(x) = \langle x, x_F \rangle,$$

$$2. \quad \|F\| = \|x_F\|.$$

*Demonstrație.* Putem presupune, fără a restringe generalitatea, că  $F$  nu e identic nulă și să considerăm subspațiul

$$E_{1,F} = \{x, x \in E, F(x) = 0\}$$

care este închis, deoarece  $F$  este presupusă continuă. În acest caz să considerăm complementul ortogonal  $E_{1,F}^\perp$  care este un subspațiu de asemenea închis și cum  $F$  nu este identic nulă,  $E_{1,F}^\perp$  nu se reduce la subspațiul  $\{0\}$ . Să arătăm că există  $x' \in E_{1,F}^\perp$  astfel ca orice element  $y \in E_{1,F}^\perp$  să fie de forma  $y = \lambda x'$  cu  $\lambda \in K$ . În adevăr, dacă nu ar fi așa, ar exista două elemente  $y_1$  și  $y_2$  care ar fi liniar independente și să considerăm elementul

$$z = F(y_1)y_2 - F(y_2)y_1$$

care este în  $E_{1,F}^\perp$ . De asemenea cum  $F(z) = 0$ ,  $z$  este și în  $E_{1,F}$ . Deci trebuie să avem  $z = 0$  și afirmația este demonstrată. Fie deci  $x'$  elementul găsit și să punem  $x'_0 = \frac{x'}{\|x'\|}$ , iar  $x_F = F(x'_0)x'_0$ . Vom avea, pentru orice element  $x \in E$ ,

$$x = x_1 + x_2, \quad x_2 = \lambda x' = \mu x_F$$

și deci

$$F(x) = F(x_2) = \mu F(x_F) = \langle x, x_F \rangle$$

deoarece

$$\mu = \frac{1}{\|x_F\|^2} \langle x, x_F \rangle = \frac{1}{|F(x'_0)|^2} \langle x, x_F \rangle.$$

Faptul că  $\|F\| = \|x_F\|$  este evident. Teorema este demonstrată. Vom da acum două explicații importante în sine, ale acestei teoreme de reprezentare dată de Riesz și Fréchet.

**1°. TEOREMA RADON-NICODYM.** Fie  $X$  o mulțime abstractă și  $B$  o  $\sigma$ -algebră de mulțimi ale lui  $X$ , iar  $\mu, \nu$  două măsuri pozitive astfel ca

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Se mai spune că  $\nu$  este absolut continuă în raport cu  $\mu$ . Teorema lui Radon-Nicodym are următorul enunț:

Dacă  $\nu$  este absolut continuă în raport cu  $\mu$  atunci există  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  astfel ca pentru orice  $E \in B$  să avem

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Ideea demonstrației teoremei Radon-Nicodym cu ajutorul teoremei de reprezentare aparține lui J. von Neumann.

Fie  $\mu_1 = \mu + \nu$  care este o măsură pozitivă pe  $B$  și să considerăm spațiul  $\mathcal{L}^2(X, \mu_1)$ . Presupunem că  $\mu(X) < \infty$  și  $\nu(X) < \infty$ . Fie  $f$  în  $\mathcal{L}^2(X, \mu_1)$  și deci

$$f \rightarrow \int_X f d\nu$$

este o funcțională liniară și continuă pe  $\mathcal{L}^2(X, d\mu_1)$ . Din teorema de reprezentare rezultă că există  $g$  astfel ca

$$\int_X f d\nu = \int_X fg d\mu_1.$$

Fie acum  $f = \chi_E$  cu  $E \in B$  și  $\mu_1(E) > 0$ . În acest caz vom avea

$$\mu(E)^{-1} \int_E g d\mu_1 \leq 1$$

și deci  $g(x) \in [0, 1]$  aproape peste tot în raport cu măsura  $\mu_1$  (adică excep-tînd cel mult o mulțime  $E_0$  cu  $\mu_1(E_0) = 0$ ).

Putem deci presupune, fără a restrînge generalitatea, că

$$g(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in X.$$

Să considerăm mulțimile

$$X_0 = \{x, 0 \leq g(x) < 1\},$$

$$X_1 = \{x, g(x) = 1\}$$

și pentru  $\chi_{X_1}$  funcția caracteristică a mulțimii  $X_1$ , avem

$$\int_X (1 - g)\chi_{X_1} d\nu = \int_X \chi_{X_1} d\mu,$$

de unde rezultă că  $\mu(X_1) = 0$ .

Fie acum  $E \in B$  și să considerăm

$$\psi_n = (1 + g + \dots + g^n)\chi_E$$

și cum

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_E \psi_n g d\mu,$$

$g^{n+1} \rightarrow 0$  monoton pe  $X_0$ , iar  $g^{n+1} = 1$  pe  $X_1$ , șirul  $g\psi_n \rightarrow h$  care este o funcție măsurabilă cu proprietatea

$$\int_E d\nu = \int_E h d\mu,$$

ceea ce demonstrează prima afirmație a teoremei. Unicitatea funcției  $h$  se demonstrează simplu și o lăsăm cititorului.

Teorema poate fi extinsă la un caz mai general și anume cind spațiul  $X$  este presupus a avea proprietatea de a fi  $\sigma$ -finit, adică există șirul de mulțimi  $\{X_i\}$ ,  $\bigcup_i X_i = X$ ,  $\mu(X_i) < \infty$ .

Demonstrația în acest caz este de asemenea simplă și o lăsăm cititorului.

Cea de a doua aplicație a teoremei de reprezentare se referă la noțiunea de dual.

2°. Fie  $E$  un spațiu Hilbert și  $E^*$  dualul său. Din teorema de reprezentare rezultă că pentru  $F \in E^*$  există  $x_F \in E$  astfel ca

$$F(x) = \langle x, x_F \rangle, \quad \|F\| = \|x_F\|.$$

De asemenea din inegalitatea lui Cauchy rezultă că pentru orice  $x_0 \in E$  aplicația

$$x \rightarrow \langle x, x_0 \rangle$$

este un element din  $E^*$ . În acest mod aplicația

$$F \rightarrow x_F$$

este biunivocă și continuă. Spațiul  $E^*$  poate fi înzestrat cu o structură de spațiu Hilbert punînd

$$\langle F, G \rangle = \overline{\langle x_F, x_G \rangle},$$

lucru care se verifică ușor.

Înainte de a termina observațiile privind teorema de reprezentare vom mai menționa că va interveni de asemenea în definirea unei noțiuni fundamentale și anume, aceea de operator adjuncat al unui operator liniar.

#### § 4. ADJUNCTUL UNUI OPERATOR MĂRGINIT

Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Hilbert peste același corp, iar  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  și  $y$  un element arbitrar în  $E_2$ . Să punem pentru orice  $x \in E_1$

$$x \rightarrow \langle Tx, y \rangle,$$

care este o funcțională liniară și mărginită pe  $E_1$ . În adevăr faptul că este o funcțională liniară este evident. Cum avem

$$(*) \quad |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$$

rezultă că este și continuă. Din teorema de reprezentare rezultă că există  $y^* \in E_1$  (unic), astfel ca

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

Vom defini aplicația  $T^* : E_2 \rightarrow E_1$  prin

$$Ty^* = y^*,$$

care este un operator liniar și din (\*), rezultă că este mărginit; norma sa este chiar egală cu cea a lui  $T$ . Deci  $T^* \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$  și  $T^*$  se numește operatorul adjuncat operatorului  $T$ .

În cele ce urmează vom presupune că  $E_1 = E_2 = E$ .

**TEOREMA 1.4.1.** *Spațiul  $\mathcal{L}(E)$  are următoarele proprietăți: 1. este algebră Banach cu unitate;*

*2. este chiar o  $B^*$ -algebră, involuția fiind dată de*

$$T \rightarrow T^*.$$

*Demonstrație.* Înainte de a începe demonstrația vom reaminti noțiunea de algebră Banach și noțiunea de  $B^*$ -algebră.

Prin algebră Banach se înțelege un spațiu Banach care are și o structură de algebră asociativă, iar

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

oricare ar fi  $x, y$  în algebră.

Algebra se spune că are unitate dacă există un element „ $e$ ” în algebră astfel ca

$$ex = xe = x$$

oricare ar fi  $x$  în algebră.

Se spune că într-o algebră Banach  $\mathcal{A}$  avem o involuție dacă există o aplicație

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

notată astfel  $x \rightarrow x^*$  cu următoarele proprietăți :

1.  $(x + y)^* = x^* + y^*$ ,
2.  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ ,
3.  $(x^*)^* = x$ ,
4.  $(xy)^* = y^* x^*$ .

O algebră Banach  $\mathcal{A}$  cu involuție și astfel încît

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

oricare ar fi  $x \in \mathcal{A}$  se spune  $B^*$ -algebră.

Să trecem acum la demonstrația teoremei. Faptul că  $\mathcal{L}(E)$  este un spațiu vectorial este evident, și că

$$T \rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

este o normă. Să arătăm că este complet. Fie deci  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E)$  și  $\{T_n\}$  șir Cauchy. Rezultă că pentru orice  $x \in E$  șirul  $\{T_n x\}$  este șir Cauchy. Fie

$$Tx = \lim T_n x$$

care este un operator liniar și după cum se vede ușor, mărginit. Deci  $\mathcal{L}(E)$  este un spațiu Banach. Pentru a arăta că avem o algebră Banach, definim produsul a doi operatori  $T, S \in \mathcal{L}(E)$  ca fiind compunerea lor (în general acest produs nu este comutativ) și cum avem

$$\|TS\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(Sx)\| \leq \|T\| \|S\|.$$

Faptul că  $\mathcal{L}(E)$  cu produsul definit mai înainte este o algebră asociativă este clar.  $\mathcal{L}(E)$  are și unitate și anume  $I: E \rightarrow E$ ,

$$I(x) = x.$$

Să arătăm că este chiar  $B^*$ -algebră.

Involuția  $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  este definită prin

$$T \rightarrow T^*.$$

Evident că primele două proprietăți ale involuției sint adevărate. Să demonstrăm pe celelalte. Vom avea, pentru  $T, S \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\langle (TS)^* x, y \rangle = \langle x, (TS) y \rangle = \langle S^* T^* x, y \rangle$$

și cum  $x$  și  $y$  sint arbitrare rezultă<sup>1</sup>

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

Pentru a demonstra ultima proprietate a involuției, vom observa că oricare ar fi  $y \in E$ ,

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \langle Tx, y \rangle$$

și deci  $(T^*)^* = T$ . Să arătăm că este și o  $B^*$ -algebră. În adevăr pentru orice  $x \in E$  avem

$$\|x\| \|T^*(Tx)\| \geq |\langle T^*(Tx), x \rangle| = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2$$

și deci

$$\|T\|^2 \leq \|T^* T\|.$$

Inegalitatea contrară rezultă din faptul că  $\|T^*\| = \|T\|$  și din

$$\|T^* T\| \leq \|T\| \|T^*\|.$$

Teorema este demonstrată.

## § 5. OPERATORI HERMITIENI

**DEFINIȚIA 1.5.1.** Operatorul  $T \in \mathcal{L}(E)$  se va numi hermitian,  $E$  fiind un spațiu Hilbert, dacă  $T^* = T$ .

Are loc afirmația evidentă :

**TEOREMA 1.5.2.** Un operator  $T$  este hermitian dacă și numai dacă pentru orice  $x, y \in E$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

<sup>1</sup> Condiția necesară și suficientă ca două elemente  $x, y$  ale unui spațiu Hilbert  $E$  să fie egale este ca pentru orice  $z \in E$ ,

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle.$$

Aceasta este echivalent cu a spune că dacă  $x$  este un element ortogonal pe orice element  $z \in E$ , atunci el este elementul zero. Pentru aceasta, să observăm că dacă  $x$  este un element astfel ca pentru orice  $z$

$$\langle x, z \rangle = 0,$$

atunci  $\langle x, x \rangle = 0$  și deci  $x = 0$  ceea ce demonstrează afirmația.

**TEOREMA 1.5.3.** Operatorul  $T$  este hermitian dacă și numai dacă pentru orice  $x \in E$

$$\langle Tx, x \rangle$$

este un număr real.

*Demonstrație.* Condiția este evident necesară. Să arătăm că este și suficientă. Fie  $x, y$  elemente arbitrare în  $E$ . În acest caz avem :

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 2 \langle Tx, y \rangle + 2 \overline{\langle T^*x, y \rangle}$$

și deci,

$$\operatorname{Im} \langle (T - T^*)x, y \rangle = 0$$

care ne dă că  $T - T^* = 0$ .

**TEOREMA 1.5.4.** (Hellinger-Toeplitz). Dacă  $T$  este liniar pe  $E$ ,  $E$  este un spațiu Hilbert și pentru orice  $x, y \in E$  avem relația

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle,$$

atunci  $T$  este mărginit.

*Demonstrație.* Să presupunem că  $T$  nu este mărginit și deci putem găsi un șir  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$ ,  $\|Tx_n\| \geq n$ .

Să considerăm funcționalele

$$F_n(x) = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx_n \rangle,$$

care au proprietatea că

$$|F_n(x)| \leq \|Tx\|.$$

Să arătăm că  $\|F_n\| \leq M$ . Să considerăm funcția

$$x \rightarrow \sup_n |F_n(x)| = \alpha(x)$$

care este inferior semicontinuă, deoarece pentru fiecare  $n$ , funcția

$$x \rightarrow |F_n(x)|$$

este continuă. Să considerăm atunci mulțimile

$$V_n = \{x, \alpha(x) > n\}$$

care sînt deschise pentru orice  $n$  și  $\bigcup_n V_n = E$ . Cum  $E$  este un spațiu complet,  $V_n$  nu pot fi toate nicăieri dense și deci există cel puțin un indice  $n_0$  astfel ca  $V_{n_0}$  să conțină o sferă

$$\{x, \|x - x_0\| \leq r\}.$$



De aici rezultă imediat că

$$\alpha(x) \leq r \|x\|.$$

Aplicând acest rezultat la cazul nostru, obținem că există  $M$  astfel ca

$$|F_n(x)| \leq M \|x\|.$$

Dar atunci

$$|F_n(T_2)| = \|Tx_n\|^2 \leq M \|Tx_n\| \quad \forall n$$

adică,  $\|Tx_n\| \leq M$ , ceea ce reprezintă o contradicție. Teorema este demonstrată.

**DEFINIȚIA 1.5.5.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  un spațiu Hilbert, se spune că este pozitiv dacă

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0$$

oricare ar fi  $x \in E$ .

*Observație.* Evident că orice operator pozitiv este hermitian.

De asemenea, pentru orice  $T$  din  $\mathcal{L}(E)$  operatorii  $T_1(E) = T^*T$  și  $T_2 = TT^*$  sînt pozitivi.

## § 6. OPERATORI NORMALI

**DEFINIȚIA 1.6.1.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  un spațiu Hilbert, se spune că este normal dacă

$$T^*T = TT^*.$$

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a operatorilor normali.

**TEOREMA 1.6.2.** Un element  $T \in \mathcal{L}(E)$  este normal dacă și numai dacă pentru orice  $x \in E$  are loc egalitatea

$$\|Tx\| = \|T^*x\|.$$

*Demonstrație.* În adevăr, dacă  $T^*T = TT^*$  atunci pentru orice  $x$  avem

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle;$$

care ne dă

$$\langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2$$

și deci condiția pusă este necesară. Să arătăm că este și suficientă.

Fie  $x$  și  $y$  arbitrari în  $E$ . Din egalitatea  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  rezultă că

$$\langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = 0$$

și afirmația rezultă din următoarea leamnă, importantă și ca rezultat în sine.

LEMA 1.6.3. Fie  $T \in \mathcal{L}(E)$  și

$$\omega(T) = \sup \{ |\langle Tx, x \rangle|, \|x\| = 1 \}.$$

În acest caz

$$\|T\| \leq 2 \omega(T).$$

*Demonstrație.* Fie  $\lambda$  și  $\theta$  numere reale, cu  $\lambda \neq 0$ . Avem identitatea

$$\begin{aligned} & \|Tx\|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} [\langle \lambda e^{2i\theta} T^2x + \lambda^{-1} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx + \lambda^{-1} x \rangle] - \\ & - \frac{1}{2} [\langle \lambda e^{2i\theta} T^2x - \lambda^{-1} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x \rangle] \end{aligned}$$

și cum pentru orice  $y$ ,  $|\langle Ty, y \rangle| \leq \omega(T) \|y\|^2$  rezultă că

$$\begin{aligned} & |\|Tx\|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle| \leq 1/2 \omega(T) [\|\lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x\|^2 + \\ & + \|\lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x\|^2] = \omega(T) (\lambda^2 \|Tx\|^2 + \lambda^{-2} \|x\|^2). \end{aligned}$$

Dacă  $Tx \neq 0$  să luăm  $\theta$  astfel ca  $|\langle T^2x, x \rangle| = e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle$  și  $\lambda$  astfel încît  $\lambda^2 \|Tx\| = \|x\|$ . Inegalitatea devine

$$\|Tx\|^2 + |\langle T^2x, x \rangle| \leq 2\omega(T) \|Tx\| \|x\|$$

și deci

$$\|Tx\|^2 \leq 2\omega(T) \|Tx\| \|x\|,$$

care ne dă

$$\|Tx\| \leq 2\omega(T) \|x\|,$$

ceea ce reprezintă rezultatul dorit. Lema este demonstrată.

*Observații.* Din leamnă, rezultă de asemenea că

$$\omega(T^2) \leq \omega^2(T).$$

În adevăr, să luăm  $\|x\| = 1$ , și să scriem inegalitatea astfel

$$[\|Tx\|^2 - \omega(T)]^2 + |\langle T^2x, x \rangle| \leq \omega^2(T),$$

de unde rezultă că

$$|\langle T^2x, x \rangle| \leq \omega^2(T)$$

oricare ar fi  $x$ , cu  $\|x\| = 1$ . Afirmația este demonstrată.

**TEOREMA 1.6.4.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  este un operator normal atunci*

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

*Demonstrație.* Evident avem relația

$$\|T^2\| \leq \|T\|^2$$

și trebuie numai să demonstrăm relația

$$\|T^2\| \geq \|T\|^2.$$

În adevăr, pentru orice  $x$  avem

$$\|T^2x\|^2 = \langle T^2x, T^2x \rangle = \langle (T^*Tx)x, (T^*T)x \rangle = \|T^*Tx\|^2,$$

de unde rezultă că

$$\|T^2\| = \|T^*T\|.$$

Cum însă pentru orice operator  $\|T\|^2 = \|T^*T\|$  obținem afirmația noastră.

Următoarea teoremă arată legătura între  $\|T\|$  și  $\omega(T)$  în cazul unui operator normal.

**TEOREMA 1.6.5.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  și este normal atunci*

$$\omega(T) = \|T\|.$$

*Demonstrație.* Evident avem relația

$$\omega(T) \leq \|T\|.$$

Cum dacă  $T$  este normal,  $T^p$  este normal oricare ar fi întregul  $p$ , obținem pentru  $p = 2^k$

$$\|T^p\| = \|T\|^p$$

$$\|T\|^p = \|T^p\| \leq 2\omega(T^p) \leq 2\omega^p(T)$$

și deci

$$\|T\| \leq \|T^p\|^{1/p} \leq 2^{1/p}\omega(T).$$

Pentru  $p \rightarrow \infty$  obținem că

$$\|T\| \leq \omega(T).$$

Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.6.6.** Orice operator  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  fiind un spațiu Hilbert, admite o descompunere unică de forma

$$T = S_1 + iS_2$$

cu  $S_i$ ,  $i = 1, 2$  operatori hermitieni.

*Demonstrație.* Evidentă, deoarece putem lua

$$2S_1 = T + T^*$$

$$2iS_2 = T - T^*.$$

Teorema următoare arată legătura între această descompunere, numită și descompunerea carteziană a unui operator și operatorii normali.

**TEOREMA 1.6.7.** Operatorul  $T \in \mathcal{L}(E)$  este normal dacă și numai dacă

$$T = S_1 + iS_2$$

cu  $S_1 S_2 = S_2 S_1$ .

*Demonstrație.* Evident condiția este necesară. Cum

$$T^* T = S_1^2 + i(S_1 S_2 - S_2 S_1) + S_2^2$$

$$T T^* = S_1^2 + i(S_2 S_1 - S_1 S_2) + S_2^2$$

care ne arată că condiția este și suficientă.

*Observație.* Descompunerea carteziană a unui operator corespunde scrierii unui număr complex sub forma

$$z = x + iy$$

cu  $x, y$  numere reale. Este cunoscut că orice număr complex mai admite și o scriere de forma  $z = re^{i\theta}$ .

În paragraful care urmează (§8) vom da o astfel de teoremă care reprezintă pentru cazul operatorilor, analogul scrierii de mai sus.

## § 7. OPERATORI UNITARI

**DEFINIȚIA 1.7.1.** Un operator  $U \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  un spațiu Hilbert se spune că este operator unitar dacă:

1. aplicația  $x \rightarrow U(x)$  este „pe” (adică pentru orice  $y \in E$  există  $x$  astfel ca  $y = U(x)$ );

2. oricare ar fi  $x, y \in E$ ,  $\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle$ .

Are loc următoarea :

TEOREMA 1.7.2. Operatorul  $U \in \mathcal{L}(E)$  este unitar dacă și numai dacă

$$U^*U = UU^* = I.$$

*Demonstrație.* Condiția 2 ne dă  $U^*U = I$ . Cum din 1 rezultă că

$$UU^*y = U(U^*y) = U(U^*Ux) = Ux = y$$

oricare ar fi  $y \in E$  și deci,  $UU^* = I$ . Rezultă că condițiile puse sînt necesare. Faptul că sînt suficiente este evident.

## § 8. CONVERGENȚĂ ÎN $E$ ȘI $\mathcal{L}(E)$

DEFINIȚIA 1.8.1. Șirul  $\{x_n\}$  converge tare către  $x$  dacă converge în normă, adică  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ .

DEFINIȚIA 1.8.2. Șirul  $\{x_n\}$  converge slab către  $x$  dacă pentru orice  $y \in E$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Este evident că orice șir tare convergent este și slab convergent, însă există șiruri slab convergente care nu sînt tare convergente. Pentru aceasta este suficient să luăm în  $l^2$  șirul  $\{l_n\}$   $l_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  care este convergent slab către zero dar evident că

$$\|l_n - l_m\|^2 = 2.$$

Pe spațiul  $\mathcal{L}(E)$  putem introduce mai multe tipuri de convergență pe care le vom defini mai jos.

DEFINIȚIA 1.8.3. Un șir de elemente  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E)$  converge în normă către  $T \in \mathcal{L}(E)$  dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Vom spune că avem convergență uniformă.

DEFINIȚIA 1.8.4. Un șir de elemente  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E)$  converge tare către  $T \in \mathcal{L}(E)$  dacă pentru fiecare  $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - Tx\| = 0.$$

Vom spune că avem convergență tare.

**DEFINIȚIA 1.8.5.** Un șir de elemente  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E)$  converge slab către  $T \in \mathcal{L}(E)$  dacă pentru orice  $x$  și  $y$  în  $E$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$

Vom spune că avem convergență slabă.  
Se observă imediat că

$$\{\{T_n\} \xrightarrow{\text{uniform}} T\} \Rightarrow \{\{T_n\} \xrightarrow{\text{tare}} T\} \Rightarrow \{\{T_n\} \xrightarrow{\text{slab}} T\}.$$

Pentru studiul șirurilor de operatori vom avea nevoie de inegalitatea generalizată a lui Cauchy. Demonstrația făcându-se ca în cazul  $T = I$ , o vom omite.

**TEOREMA 1.8.6.** Dacă  $T$  este un operator hermitic și pozitiv atunci

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle.$$

Cu ajutorul noțiunii de operator pozitiv putem introduce o relație de ordine în mulțimea operatorilor hermitieni

$$T_1 \leq T_2,$$

dacă  $T_2 - T_1$  este pozitiv. Să considerăm un șir de operatori care este monoton, adică

$$\{T_n\}, \quad T_{n+1} \leq T_n.$$

Are loc următoarea:

**TEOREMA 1.8.7.** Orice șir monoton de operatori (monoton descrescător sau crescător) converge către un operator hermitian.

*Demonstrație.* Putem presupune fără a restrânge generalitatea că

$$0 \leq T_n \leq I \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

și să considerăm operatorul  $T_n - T_m$ ,  $n > m$ , care este hermitian și pozitiv. Conform inegalității lui Cauchy generalizată, avem

$$\begin{aligned} \|(T_n - T_m)x\|^2 &= \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x \rangle \leq \\ &\leq \langle (T_n - T_m)x, x \rangle \cdot \langle (T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x \rangle \leq \\ &\leq (\langle T_n x, x \rangle - \langle T_m x, x \rangle) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Cum șirul  $\{\langle T_n x, x \rangle\}$  este monoton și mărginit, atunci este cunoscut că este convergent. Deci, pentru orice  $x \in E$ , din inegalitatea de mai sus rezultă că  $\{T_n x\}$  este un șir convergent.

Să definim

$$Tx = \lim_n T_n x,$$

care este un operator liniar și mărginit. Mai mult, cum pentru orice  $x$

$$\langle Tx, x \rangle = \lim_n \langle T_n x, x \rangle$$

este un număr real,  $T$  este hermitian. Teorema este demonstrată. Pentru a demonstra teorema de compunere a unui operator vom avea nevoie și de următorul rezultat, important și în sine.

**TEOREMA 1.8.8.** *Pentru orice operator hermitian pozitiv  $S$  există un operator hermitian pozitiv  $S_1$  astfel ca :*

1.  $S_1^2 = S$ ,
2.  $S_1$  este unic.

*Operatorul  $S_1$  se numește rădăcina pătrată a operatorului  $S$ .*

*Demonstrație.* Vom presupune fără a restrînge generalitatea, că

$$0 \leq S \leq I$$

și să definim șirul de operatori  $\{S_n\}$  astfel :

$$\begin{aligned} 1. S_0 &= 0, \\ 2. S_{n+1} &= S_n + 1/2 (S - S_n^2), \end{aligned}$$

care este format din operatori hermitieni. Vom arăta că  $\{S_n\}$  este un șir monoton. Vom observa mai întâi că  $S_n$  este un operator care comută, cu orice operator, care comută cu  $S$ .

Cum :

$$(*) \quad I - S_{n+1} = 1/2 (I - S_n)^2 + 1/2 (I - S)$$

rezultă că :

$$(**) \quad S_{n+1} - S_n = 1/2 [(I - S_{n-1}) + (I - S_n)] [S_n - S_{n-1}].$$

Din (\*), rezultă că

$$I - S_{n+1} \geq 0$$

oricare ar fi  $n$ . Vom demonstra prin inducție, că

$$S_{n+1} - S_n \geq 0.$$

În adevăr, pentru  $n = 0$ , avem

$$S_1 - S_0 = 1/2 \cdot S$$

care este pozitiv. Dacă afirmația este adevărată pentru  $m = 0, \dots, n$ , atunci relația  $(**)$  arată că este adevărată și pentru  $n + 1$ . Deci șirul  $\{S_n\}$  este un șir monoton. Există deci un operator  $S_1$  astfel ca  $\lim_n S_n = S_1$  și care este de asemenea hermitian. Dar cum

$$S_{n+1} = S_n + 1/2 (S - S_n^2),$$

pentru  $n \rightarrow \infty$  obținem

$$S_1 = S_1 + 1/2 (S - S_1^2),$$

de unde rezultă că  $S_1^2 = S$ . În acest mod am demonstrat existența rădăcinii pătrate. Să arătăm acum unicitatea. Să presupunem că mai există o rădăcină  $S'_1$  pentru operatorul  $S$ . Operatorii  $S_1$  și  $S'_1$  au de asemenea rădăcini pătrate, pe care să le notăm respectiv prin  $\tilde{S}_1$  și  $\tilde{S}'_1$ . Să punem pentru orice  $x \in E$ ,  $y = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}'_1)x$ . Vom avea

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_1 y\|^2 + \|\tilde{S}'_1 y\|^2 &= \langle \tilde{S}_1^2 y, y \rangle + \langle \tilde{S}'_1^2 y, y \rangle = \\ &= \langle S_1 y, y \rangle + \langle S'_1 y, y \rangle = \langle (S_1 + S'_1) y, y \rangle = \\ &= \langle (S_1^2 - S'_1{}^2) x, y \rangle = \langle x, (S_1^2 - S'_1{}^2) y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Deci,  $S_1 y = S'_1 y = 0$ , de unde rezultă că

$$\|(S_1 - S'_1)x\|^2 = \langle (S_1 - S'_1)y, x \rangle = 0.$$

De aici rezultă că pentru orice  $x \in E$ , avem

$$S_1 x = S'_1 x$$

și în acest fel teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.8.9.** Orice operator normal  $T \in \mathcal{L}(E)$  admite scrierea

$$T = UR = RU,$$

unde  $U$  este un operator unitar, iar  $R$  este un operator hermitian, pozitiv.

*Demonstrație.* Operatorul  $T^*T = TT^*$  este pozitiv și deci există un operator pozitiv  $R$ , astfel ca  $R^2 = T^*T$ . Deci, pentru orice  $x \in E$  avem

$$\|Rx\|^2 = \langle R^2 x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2.$$

Să notăm cu  $\mathcal{M}_R = \{y, y = Rx, \text{ cu } x \in E\}$  și  $\overline{\mathcal{M}}_R$  închiderea acestui spațiu, adică intersecția tuturor subspațiilor închise ale lui  $E$  care conțin pe  $\mathcal{M}_R$ . Rezultă imediat că

$$\mathcal{M}_R = \{x, x \in E, \|Tx\| = 0 \text{ sau } \|T^*x\| = 0\}.$$

Pentru orice  $y \in \mathfrak{M}_R$  să punem

$$Uy = Tx,$$

care are proprietatea că

$$\|Uy\| = \|Tx\| = \|Rx\|.$$

De aici rezultă că aplicația

$$U: \mathfrak{M}_R \rightarrow \mathfrak{M}_R$$

este o izometrie și deoarece  $\overline{\mathfrak{M}_R}$  este în același timp cel mai mic spațiu închis care conține elemente de forma  $\{Tx\}_{x \in E}$ ,  $U$  se poate prelungi la  $\overline{\mathfrak{M}_R}$ , fiind pe acest spațiu un operator unitar. Putem prelungi acest operator unitar pe  $\overline{\mathfrak{M}_R}$  la un operator unitar pe  $E$  definindu-l pe  $\overline{\mathfrak{M}_R}$  ca fiind operatorul identitate.

În acest fel pentru orice  $x \in E$  avem :

$$Tx = URx$$

și să arătăm că are loc și relația  $Tx = RUx$ . Acest lucru este evident pentru elemente din  $\mathfrak{M}_R$ . Să arătăm că are loc pentru elemente din  $\overline{\mathfrak{M}_R}$ . Fie deci :

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Rx_n$$

și

$$\begin{aligned} Ty &= \lim_{n \rightarrow \infty} TRx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R Tx_n = R \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \\ &= R \lim_{n \rightarrow \infty} URx_n = RU \lim_{n \rightarrow \infty} Rx_n = RUy. \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Se poate observa că  $R$  este un operator care comută cu orice operator care comută cu  $T$  ( $T$  este un operator presupus normal).

## § 9. OPERATORI IZOMETRICI ȘI PARȚIAL IZOMETRICI

**DEFINIȚIA 1.9.1.** Un operator  $T \in (\mathcal{L})E$  este izometric dacă pentru orice  $x \in E$ , avem

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Are loc următoarea :

**TEOREMA. 1.9.2.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  este izometric dacă și numai dacă oricare ar fi  $x, y$  în  $E$ , avem

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

*Demonstrație.* Evident condiția pusă este suficientă.  
Să arătăm că este necesară.  
Cum pentru orice  $x, y \in E$ , avem

$$\langle Tx, Ty \rangle = 1/4 \{ \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 + i \|T(x+iy)\|^2 - i \|T(x-iy)\|^2 \},$$

care se verifică imediat prin calcul, deducem că

$$\langle Tx, Ty \rangle = 1/4 \{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \|x+iy\|^2 - i \|x-iy\|^2 \}$$

care este egală cu  $\langle x, y \rangle$ . Teorema este astfel demonstrată.

*Observație.* Evident că orice operator unitar este un operator izometric.

De asemenea se demonstrează ușor că

**TEOREMA 1.9.3.** *Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  este izometric dacă și numai dacă :*

$$T^*T = I.$$

Noțiunea de operator izometric se poate generaliza prin introducerea unei clase de operatori mai vastă astfel :

**DEFINIȚIA 1.9.4.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  se spune că este parțial izometric dacă există un subspațiu vectorial închis  $E_1 \subset E$ , astfel ca

1.  $Tx = 0$  dacă  $x \in E_1^\perp$ ,
2.  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ ;  $\forall x, y \in E_1$ .

În legătură cu această noțiune vom menționa, fără demonstrație următoarea :

**TEOREMA 1.9.5.** *Orice operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  admite scrierea*

$$T = U_1 R,$$

unde  $U_1$  este un operator parțial izometric și  $R$  este hermitian.

## § 10. SPAȚII BANACH

În partea 1 am expus câteva considerații privind spațiile Hilbert în care noțiunea de ortogonalitate a jucat un rol esențial.

Clasa spațiilor Banach reprezintă un cadru natural în care multe probleme ale analizei pot fi studiate cu mult succes și cu o mare generalitate.

Vom expune în cele ce urmează câteva rezultate de bază din teoria spațiilor Banach.

Fie  $\mathcal{X}$  un spațiu Banach; norma unui element  $x$  o notăm cu  $\|x\|$ . Noțiunea de operator liniar și operator mărginit se introduce pe spații Banach exact ca la spații Hilbert.

Vom prezenta acum trei teoreme care sînt considerate ca fiind teoreme fundamentale ale analizei funcționale pe spații Banach. Acestea sînt :

- 1) teorema Banach—Steinhaus sau principiul mărginirii uniforme;
- 2) teorema aplicației deschise;

3) teorema Hahn-Banach (de prelungire a funcționalelor liniare și continue pe spații Banach reale) și teorema lui Bohnenblust-Sobczyk pentru cazul spațiilor Banach complexe.

Următoarea teoremă permite să dăm o demonstrație mai simplă pentru unele din aceste teoreme.

Dăm mai întîi următoarea :

**LEMA 1.10.1 (Baire).** *Intr-un spațiu Banach  $E$  dacă  $\{\mathcal{A}_n\}$  este o familie numărabilă de mulțimi deschise și dense în  $E$  atunci  $\bigcap \mathcal{A}_n$  este densă în  $E$ .*

*Demonstrație.* Fie deci  $\mathcal{A}_1$  mulțimile dense în  $E$  și deschise, iar  $\mathcal{V}$  o mulțime deschisă arbitrară în  $E$ . Trebuie să arătăm că  $\bigcap \mathcal{A}_n$  are intersecție nevidă cu  $\mathcal{V}$  (dacă  $\mathcal{V} \neq \Phi =$  mulțimea vidă). Fie  $r > 0$  și

$$S(x, r) = \{y, y \in E, \|x - y\| < r\},$$

iar  $\overline{S(x, r)}$  închiderea sa. Cum  $\mathcal{A}_1$  este densă și deschisă, mulțimea  $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1$  este deschisă și nevidă. Deci există  $x_1$  și  $r_1 > 0$ , astfel ca

$$\overline{S(x_1, r_1)} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{A}_1, \quad 0 < r_1 < 1.$$

Să definim un șir de mulțimi  $\overline{S(x_n, r_n)}$  astfel : dacă  $x_1, r_1, \dots, x_{n-1}, r_{n-1}$  au fost aleși, să observăm că  $\mathcal{A}_n$  fiind densă și deschisă

$$\mathcal{A}_n \cap \overline{S(x_{n-1}, r_{n-1})}$$

este o mulțime deschisă și nevidă. Deci există  $x_n$  și  $r_n > 0$ , astfel ca

$$\overline{S(x_n, r_n)} \subset \mathcal{A}_n \cap \overline{S(x_{n-1}, r_{n-1})}, \quad 0 < r_n < 1/n.$$

Să considerăm acum șirul  $\{x_n\}$  de elemente din  $E$ . Vom arăta că este un șir Cauchy. În adevăr fie  $\varepsilon > 0$  și  $N_\varepsilon$ , astfel ca  $n > N_\varepsilon$  să implice  $\frac{2}{n} < \varepsilon$ . Fie  $n, m \leq N_\varepsilon$  și cum  $m > n$  (putem presupune) avem

$$\|x_n - x_m\| \leq 2r_n < 2/n,$$

deoarece  $x_n$  și  $x_m$  sînt în sfera  $S(x_n, r_n)$ . Deci  $\{x_n\}$  este un șir Cauchy și prin urmare există  $\lim_n x_n = x_0$  (deoarece  $E$  este un spațiu Banach).

Cum  $x_n \in \overline{S(x_m, r_m)}$   $m > n$  deducem că  $x_0$  este în orice  $\overline{S(x_n, r_n)}$ , de unde avem că  $x_0$  este în  $\bigcap \mathcal{A}_n$  și în  $\mathcal{V}$  și deci afirmația teoremei.

*Observații.* (1). Fie  $E$  un spațiu Banach și  $\mathcal{A}$  o mulțime a lui  $E$ . Se spune că  $\mathcal{A}$  este nicăieri densă dacă închiderea sa nu conține submulțimi deschise nevide.

Orice reuniune numărabilă de mulțimi nicăieri dense este, prin definiție, o mulțime de prima categorie. Orice mulțime din  $E$  care nu este de prima categorie este numită de a doua categorie.

În acest caz lema se poate formula și astfel: *orice spațiu Banach nu este o mulțime de prima categorie.*

(2). Demonstrația dată lemei lui Baire este valabilă și în spații metrice complete.

## § 11. TEOREMA HAHN-BANACH ȘI TEOREMA BOHNENBLUST-SOBCZYK

Fie  $E$  un spațiu Banach peste corpul  $K$  și  $E_1$  un subspațiu al lui  $E$ , iar  $f: E_1 \rightarrow \tilde{E}_1$  este un subspațiu al unui spațiu Banach  $\tilde{E}$ . Problema care se pune este următoarea: în ce condiții există  $F: E \rightarrow \tilde{E}$  astfel ca pentru orice  $x \in E_1$  să avem  $f(x) = F(x)$ ? Se spune că  $F$  este o extensie a lui  $f$ .

În cele ce urmează ne vom ocupa de această problemă în cazul cînd  $\tilde{E}_1 = \tilde{E} = K$ , considerînd separat cazul cînd  $K = \mathbb{R}$  sau  $K = \mathbb{C}$ .

DEFINIȚIA 1.11.1. Fie  $E$  un spațiu Banach real. O funcție

$$p: E \rightarrow \mathbb{R}$$

se spune că este o funcțională subliniară dacă:

$$1. p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

$$2. p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$

oricare ar fi  $x, y \in E$  și  $\alpha \geq 0$ .

Este evident că orice normă este subliniară.

Următoarea teoremă reprezintă rezultatul fundamental privind extensia funcționalelor liniare.

TEOREMA 1.11.2. Fie  $E$  un spațiu vectorial real și  $E_1$  un subspațiu vectorial al lui  $E$ , iar

$$f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

o funcțională liniară astfel încît

$$f(x) \leq p(x) \quad x \in E_1$$

unde  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcțională subliniară. În acest caz există o funcție liniară

$$g: E \rightarrow \mathbb{R}$$

astfel ca

$$1. \quad g(x) = f(x), \quad x \in E_1,$$

$$2. \quad g(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

*Demonstrație.* Vom presupune evident că  $f$  nu este identic nulă pe  $E_1$  și să considerăm  $x_0 \in E$ , iar

$$E_1^0 = \{x + \alpha x_0\}$$

unde  $x \in E_1$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Evident că  $E_1^0$  este un subspațiu vectorial și orice element din  $E_1^0$  are o scriere unică sub forma

$$x + \alpha x_0.$$

În adevăr, dacă ar avea două scrieri

$$x + \alpha x_0 = \tilde{x} + \beta x_0$$

cu  $\alpha \neq \beta$  atunci

$$x_0 = \frac{\tilde{x} - x}{\alpha - \beta},$$

de unde rezultă că  $x_0 \in E_2$ , este o contradicție. Rezultă că numărul  $\alpha$  este unic determinat și pentru orice element de forma  $z = lx + \alpha x_0$  să punem

$$\tilde{f}(z) = f(x) + \alpha c,$$

unde  $c$  este un număr care va fi astfel ca

$$p(z) \geq \tilde{f}(z),$$

oricare ar fi  $z \in E_1^0$ . Să arătăm că o astfel de alegere este posibilă. Din egalitatea pe care trebuie să o satisfacă  $\tilde{f}(z)$  rezultă că

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + x_0\right) \quad x \in E_1 \quad \text{și} \quad \alpha > 0$$

și

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \geq -p\left(\frac{-x}{\alpha} - x_0\right) \quad x \in E_1 \quad \text{și} \quad \alpha < 0.$$

Rezultă că este suficient să avem

$$f(x) - p(x - x_0) \leq c \leq -f(y) + p(y + x_0)$$

oricare ar fi  $x, y \in E_1$ . Însă

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) = f(x + y) &\leq p(x + y) \leq p(x - x_0 + x_0 + y) \leq \\ &\leq p(x - x_0) + p(x_0 + y) \end{aligned}$$

oricare ar fi  $x, y \in E_1$ . Să notăm

$$m = \sup_{x \in E_1} \{f(x) - f(x - x_0)\},$$

$$\tilde{m} = \inf_{y \in E_1} \{-f(y) + p(x_0 + y)\},$$

Evident că  $m \leq \tilde{m}$  și  $c$  poate fi ales astfel încît  $m \leq c \leq \tilde{m}$  care satisface condiția

$$f(\tilde{z}) \leq p(z)$$

oricare ar fi  $z \in E_1^0$ .

Pentru a demonstra teorema să notăm cu  $\mathcal{F}$  mulțimea tuturor funcționalelor care prelungesc funcționala  $f$ . Rezultă că orice element  $g \in \mathcal{F}$  este dat de un subspațiu al lui  $E$ ,  $E_h$  și o funcțională  $g$  care satisfac condițiile :

$$1. E_h \supset E_1,$$

$$2. f(x) = g(x), \quad \forall x \in E_1.$$

Vom spune că două elemente  $g, h \in \mathcal{F}$  sînt în relația

$$g \leq h$$

dacă  $h$  este o prelungire a lui  $g$ . Fie acum  $\mathcal{F}_1$  o parte total ordonată a lui  $\mathcal{F}$ . În acest caz există subspațiul care conține toate subspațiile pe care sînt definite elementele din  $\mathcal{F}_1$  și pe care să-l notăm cu  $\mathcal{V}_1$ . Cum pentru orice  $x \in \mathcal{V}_1$  există un subspațiu care-l conține și o funcțională care prelungește pe  $f$ , pe care s-o notăm cu  $f_1$ , vom defini

$$\tilde{h}(x) = f(x).$$

Evident că  $\tilde{h}(x) \leq p(x)$  și în virtutea faptului că  $\mathcal{F}_1$  este total ordonată,  $\tilde{h}$  este bine definită. Evident că  $\tilde{h}$  prelungește toate funcționalele din  $\mathcal{F}_1$ . În acest mod am demonstrat că putem aplica lema lui Zorn și deci există un element maximal pe care să-l notăm cu  $\tilde{F}$  și  $\tilde{E}$  subspațiul

care conține pe  $E_1$ , pe care este definită  $\tilde{F}$ . Dacă  $\tilde{E}$  nu ar fi  $E$  atunci argumentul de mai sus permite să găsim o prelungire pentru  $\tilde{F}$  și  $\tilde{E}$  ceea ce contrazice faptul ca  $\tilde{F}$  este element maximal. Teorema este astfel demonstrată.

**COROLAR 1.11.3.** Fie  $E$  un spațiu Banach (real), iar  $E_1$  un subspațiu al său și  $f: E_1 \rightarrow K$  o funcțională liniară și mărginită. În acest caz există o funcțională liniară și continuă  $F: E \rightarrow K$ , astfel ca

$$1. F(x) = f(x), \quad x \in E_1,$$

$$2. \|f\| = \|F\|$$

*Demonstrație.* Înainte de a începe demonstrația vom remarca faptul că  $\|f\|$  este calculată pe  $E_1$ .

Fie funcționala subliniară

$$p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$$

care satisface pentru  $f$  dat în corolar condițiile din teoremă și deci există  $F$  care prelungește pe  $f$ , astfel încât

$$\|F\| \leq \|f\|.$$

Să arătăm că avem chiar egalitate. În adevăr

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E_1}} |F(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E_1}} |f(x)| = \|f\|$$

și corolarul este demonstrat.

**COROLAR 1.11.4.** Pentru orice  $x \in E$ ,  $E$  un spațiu real normat, există o funcțională liniară reală și continuă  $f$  cu următoarele proprietăți:

$$1. \|f\| = 1,$$

$$2. f(x) = \|x\|.$$

În adevăr, să considerăm  $f$  definită pe spațiul generat de  $x$  prin:

$$1. f(x) = \|x\|,$$

$$2. f(\alpha x) = \alpha \|x\|, \quad \alpha \in R,$$

care evident satisface condițiile din corolarul 3 și deci existența este demonstrată.

*Remarcă.* Teorema lui Hahn-Banach afirmă doar existența prelungirilor nu și unicitatea lor. În al doilea rând este cunoscut că teorema lui

Hahn-Banach este des utilizată pentru a demonstra faptul că anumite submulțimi sînt dense.

**TEOREMA 1.11. 5.** Fie  $E$  un spațiu vectorial complex și  $E_1$  un subspațiu, iar  $f: E_1 \rightarrow C$  o funcțională liniară și continuă. În acest caz există  $F: E \rightarrow C$  astfel ca

$$1. F(x) = f(x), \quad x \in E_1,$$

$$2. \|F\| = \|f\|.$$

Înainte de a începe demonstrația vom face cîteva observații privind legătura dintre spațiile vectoriale reale și cele complexe.

Vom remarca mai întîi faptul că orice spațiu vectorial complex este un spațiu vectorial real. Se pune problema legăturii dintre funcționalele reale definite pe un spațiu complex, adică funcționalele cu proprietățile:

$$1. f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$2. f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \alpha = \text{real}$$

și funcționalele care satisfac 1 și

$$2'. f(zx) = z f(x)$$

pentru orice  $z$  număr complex. Are loc următoarea:

**PROPOZIȚIA 1.11.6.** Orice funcțională complexă  $f$  pe un spațiu vectorial complex are forma

$$1. f(x) = \text{Re } f(x) - i \text{Re } (f(ix)).$$

2. dacă  $u$  este o funcțională reală pe un spațiu complex atunci

$$f(x) = u(x) - i u(ix)$$

este o funcțională liniară complexă.

3. dacă  $f$  și  $u$  sînt ca în 2 atunci

$$\|f\| = \|u\|.$$

*Demonstrație.* Fie  $z = \alpha + i\beta$  un număr complex. În acest caz

$$z = \text{Re } z + i \text{Re } (iz),$$

de unde deducem că pentru orice  $x$  avem

$$\text{Re } i f(x) = \text{Re } f(ix) = u(ix)$$

și deci 1 rezultă din 2 cu  $z = f(x)$ .

Să presupunem că are loc 2 și să demonstrăm că este o funcțională liniară complexă. În adevăr, avem

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = i f(x),$$

ceea ce demonstrează că  $f$  este funcțională liniară complexă.

Să demonstrăm 3. Este evident că

$$\|u\| \leq \|f\|$$

și pentru orice  $x$  fie  $\alpha = \frac{|f(x)|}{f(x)}$  ( $f(x) \neq 0$ ) avem

$$|f(x)| = f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \|\alpha x\| \leq \|u\| \|x\|,$$

adică

$$\|f\| \leq \|u\|$$

de unde egalitatea.

Să demonstrăm acum teorema lui Bohnenblust-Sobczyk.

Fie deci  $f$  o funcțională liniară complexă definită pe un subspațiu  $E_1$  al spațiului complex  $E$ . În acest caz

$$f(x) = u(x) - i u(ix)$$

cu  $\|u\| = \|f\|$ ,  $u$  fiind partea reală a lui  $f$ . Conform teoremei lui Hahn — Banach  $u$  admite o extensie  $U$  care este o funcțională liniară reală pe  $E$  cu  $\|U\| = \|u\|$  și să punem

$$F(x) = U(x) - iU(ix),$$

care este o funcțională liniară complexă cu proprietatea

$$\|F\| = \|U\| = \|u\| = \|f\|,$$

și teorema este demonstrată.

Putem demonstra utilizând teorema lui Bohnenblust-Sobczyk următoarele :

**COROLAR 1.11.7.** Fie  $E$  un spațiu Banach complex și  $E_1$  un subspațiu al său. Un element  $x_0$  este în spațiul închis  $\bar{E}_1 =$  închiderea lui  $E_1$ , dacă și numai dacă nu există o funcțională liniară, continuă nulă pentru orice  $y \in E_1$  și nenulă în  $x_0$ .

**Demonstrație.** În adevăr, dacă  $x_0 \in \bar{E}_1$  și  $f$  este o funcțională liniară și continuă pe  $E_1$ ,  $f(y) = 0$ ,  $\forall y \in E_1$ , atunci din continuitatea funcționalei  $f$  rezultă că  $f(x_0) = 0$ .

Să presupunem că  $x_0 \notin \bar{E}_1$  și deci există  $\delta > 0$ , astfel ca

$$\|x - x_0\| \geq \delta > 0$$

oricare ar fi  $x \in E_1$  și fie  $E_{1,x_0}$  spațiul generat de  $E_1$  și  $x_0$ . Să definim  $f: E_{1,x_0} \rightarrow C$  prin

$$f(x + \lambda x_0) = \lambda$$

dacă  $x \in E_1$ . Cum avem

$$\delta|\lambda| = |\lambda| \|x_0 + \lambda x\| = \|\lambda x_0 + x\|,$$

de unde deducem că  $f$  este o funcțională liniară pe  $E_{1,x_0}$  cu norma mai mică decât  $\delta^{-1}$  și deci este continuă.

De asemenea este evident că

$$1. f(x) = 0, \quad x \in E_1,$$

$$2. f(x_0) = 1.$$

Corolarul este demonstrat.

**COROLARUL 1.11.8.** Fie  $E$  un spațiu Banach complex și  $x_0 \in E$ . În acest caz există o funcțională  $f: E \rightarrow C$  cu următoarele proprietăți:

$$1. \|f\| = 1,$$

$$2. f(x_0) = \|x_0\|.$$

*Demonstrație.* Fie  $E_1$  spațiul generat de  $x_0$  și să definim pe acest spațiu funcționala  $f$  astfel

$$f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

care are norma pe acest spațiu egală cu 1. Din teorema de mai sus rezultă afirmația corolarului.

Fie  $E$  un spațiu Banach peste corpul  $K$  și  $E^*$  mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe  $E$ , adică al funcțiilor  $f: E \rightarrow K$  cu proprietățile:

$$1. f(x + y) = f(x) + f(y), f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

oricare ar fi  $x, y \in E$  și  $\alpha \in K$ .

$$2. \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| < \infty.$$

Se poate verifica ușor că  $E^*$  poate fi organizat ca spațiu vectorial și punând

$$f \rightarrow \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

obținem că  $(E^*, \|\cdot\|)$  este chiar un spațiu Banach.

**COROLAR 1.11.9.** Spațiul  $E^*$  separă punctele lui  $E$ . Aceasta înseamnă că fiind date  $x_0$  și  $x_1$ ,  $x_0 \neq x_1$  există  $f \in E^*$  astfel ca  $f(x_0) \neq f(x_1)$ , ceea ce rezultă imediat din corolarul 4.

**COROLAR 1.11.10.** Pentru orice  $x \in E$  avem

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

*Demonstrație.* Rezultă din corolarul 1.11.8.

Spațiul  $E$  se numește dualul spațiului  $E$ , iar  $(E^*)^* = E^{**}$  bidualul lui  $E$ .

**TEOREMA 1.11.12.** Fie  $E$  un spațiu Banach peste  $K$ . În acest caz există un subspațiu  $E_1 \subset E^{**}$  cu care  $E$  este izomorf și izometric, adică există o aplicație

$$j: E \rightarrow E_1,$$

astfel ca

1.  $j(x + y) = j(x) + j(y)$ ;  $j(\alpha x) = \alpha j(x)$ ,
2.  $\|j(x)\| = \|x\|$ .

*Demonstrație.* În adevăr, pentru orice  $x \in E$  să considerăm funcționala definită pe  $E^*$  prin

$$f_x(f) = f(x),$$

care are proprietatea că

$$|f_x(f)| \leq \|f\| \|x\|$$

și deci norma sa nu depășește  $\|x\|$ . Din teoremele de prelungire rezultă că norma este chiar egală cu  $\|x\|$ . Să considerăm aplicația

$$j(x) = f_x$$

care evident satisface condițiile teoremei.

## § 12. TREI TEOREME FUNDAMENTALE

Vom prezenta acum trei teoreme fundamentale ale analizei funcționale: principiul mărginirii uniforme, teorema graficului închis și teorema aplicației deschise. De asemenea, vom prezenta unele rezultate care să ilustreze aceste teoreme.

**Funcționale subaditive**

Fie  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach și  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se spune că  $f$  este subaditivă dacă

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}$$

Are loc :

LEMA 1.12.1. Orice funcțională  $f$  subaditivă și pozitivă dacă,  $\|x\| \geq M$ , atunci este și pozitivă; dacă  $f$  este nulă și continuă în origine atunci  $f$  este continuă.

*Demonstrație.* Evident  $f(0) \geq 0$  și fie  $y = \tilde{M} \cdot x$ . În acest caz  $0 \leq f(y) \leq \tilde{M}f(x)$ . Aici am pus  $\tilde{M}$  cel mai mic întreg care depășește pe  $M$ . Să demonstrăm cea de a doua afirmație. Fie  $x_n \rightarrow x$ . În acest caz  $x_n - x \rightarrow 0$  și deci

$$f(x) = f(x - x_n + x_n) \leq f(x - x_n) + f(x_n),$$

de unde

$$f(x) - f(x_n) \leq f(x - x_n).$$

Similar putem demonstra că

$$f(x_n) - f(x) \leq f(x - x_n),$$

de unde

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n - x)|.$$

Cum  $f$  este continuă în origine, din această inegalitate rezultă afirmația făcută.

Următoarea teoremă ne dă un rezultat privind o clasă de funcționale definite pe  $\mathfrak{X}$ .

TEOREMA 1.12.2. Fie  $F: \mathfrak{X} \rightarrow R$  cu următoarele proprietăți :

$$1^\circ. \lim_{t \rightarrow 0} F(tx) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X},$$

$$2^\circ. \text{ pentru orice serie convergentă } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ avem}$$

$$F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(x_n).$$

În acest caz  $F$  este o funcție continuă.

*Demonstrație.* Vom observa că din  $2^\circ$  rezultă că  $F$  este subaditivă și deci, pentru a demonstra afirmația teoremei va fi suficient să demonstrăm continuitatea în origine.

Fie pentru orice  $\varepsilon > 0$  mulțimea

$$G_\varepsilon = \{x, x \in \mathfrak{X}, F(x) + F(-x) \leq \varepsilon/2\}.$$

Din  $1^\circ$ , rezultă că, pentru orice  $x$  există  $(n, \varepsilon)$  astfel ca  $x \in G_{n, \varepsilon}$ , și deci  $\mathfrak{X} = \bigcup_1^\infty G_{n, \varepsilon}$ . Conform lemei lui Baire, închiderea mulțimii  $G_\varepsilon$

trebuie să conțină o sferă  $S(x_0, r)$  și cum  $G_\varepsilon$  este simetrică, atunci trebuie să conțină și  $S(-x_0, r)$ . Cum  $F$  este subaditivă, putem presupune că  $G_\varepsilon$  conține o sferă de tipul  $S(0, \delta_\varepsilon)$ , adică o sferă cu centrul în origine. Putem presupune evident că  $\delta_\varepsilon < \varepsilon$ . Rezultă că pentru  $x$  în această sferă avem

$$F(x) \leq 2\varepsilon,$$

afirmație care se demonstrează astfel: fie  $\tilde{G}_\varepsilon = G_\varepsilon \cap S(0, \delta_\varepsilon)$  care este densă în sferă și deci pentru  $x \in S(0, \delta_\varepsilon)$  să luăm  $x_1 \in \tilde{G}_\varepsilon$ , astfel ca  $x - x_1 \in S(0, \delta(\varepsilon/2))$ . Să presupunem că  $x_1, \dots, x_n$  au fost aleși și să alegem  $x_{n+1} \in \tilde{G}_{\varepsilon/2^n}$  astfel ca  $x - [x_1 + \dots + x_{n+1}] \in S(0, \varepsilon/2^n)$ . Evident  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  și din 2°, rezultă că

$$F(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(x_n) \leq 2\varepsilon.$$

Deci  $F$  este continuă în origine și conform lemei de mai înainte este continuă pe  $\mathfrak{X}$ . Teorema este demonstrată.

Are loc de asemenea:

**TEOREMA 1.12.3.** Fie  $F_\alpha: \mathfrak{X} \rightarrow R$  o familie de funcționale pozitive continue și subaditive, astfel ca

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in I} F_\alpha(tx) = 0,$$

atunci

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in I} F_\alpha(x) = 0.$$

*Demonstrație.* Vom face mai întâi observația că, condiția 2° din teorema 1.12.2 este indeplinită dacă  $F$  este inferior semicontinuă și subaditivă.

În adevăr, pentru orice  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  avem că

$$F(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} F\left(\sum_{n=1}^m x_n\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m F(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(x_n).$$

Pentru a demonstra teorema să observăm că  $F_\alpha$  fiind continuă și subaditivă pentru orice  $\alpha \in I$ , funcția

$$x \rightarrow \sup_{\alpha \in I} F_\alpha(x)$$

este subaditivă și inferior semicontinuă. În acest caz însă, conform observației de mai sus putem aplica teorema 1.12.2 și demonstrația teoremei este terminată.

Din această teoremă rezultă următoarea teoremă :

**TEOREMA 1.12.4.** (Lema lui Gelfand). *Dacă  $F$  este o funcție subaditivă inferior semicontinuuă și cu proprietatea*

$$F(\alpha x) = |\alpha| F(x), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

*atunci există  $M > 0$  astfel ca*

$$F(x) \leq M \|x\|.$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema 1.12.2.

**TEOREMA 1.12.5.** (Principiul mărginirii uniforme sau teorema Banach-Steinhaus). *Dacă  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$  este o familie de operatori mărginiți definiți pe spațiul Banach  $X$  și cu valori în spațiul Banach  $Y$  atunci*

1. *sau există  $M$  astfel ca  $\|T_\alpha\| \leq M < \infty$ ,*
2. *sau  $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| = \infty$ ,  $x \in G_\delta =$  submulțime a lui  $X$ .*

*Demonstrație.* Pentru orice  $\alpha \in I$

$$x \rightarrow \|T_\alpha x\|$$

este continuă și deci funcția

$$x \rightarrow \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|$$

este inferior semicontinuuă. Rezultă, dacă prima afirmație nu are loc că

$$\mathcal{X}_n = \{x, \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| > n\}$$

este densă în  $X$  pentru orice  $n$  și deci

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| = \infty$$

dacă  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ .

**TEOREMA 1.12.6.** (Teorema aplicației deschise). *Fie  $T: X \rightarrow Y$  unde  $X$  și  $Y$  sînt spații Banach iar  $TX = Y$  (este surjecție). Dacă  $T$  este liniară și mărginită atunci există  $\delta > 0$  astfel ca*

$$T(S_X(0, 1)) \supset \delta S_Y(0, 1)$$

unde  $S_{(\cdot)}(0, 1) = \{z, \|z\| \leq 1\}$ .

*Demonstrație.* Să considerăm pentru aceasta funcționala

$$F(x) = \inf \{\|y\|, Ty = x\}$$

care are proprietățile 1° și 2° din teorema 1.12.2. Deci este continuă și continuitatea acestei funcții implică afirmația teoremei.

**TEOREMA 1.12.7** (Teorema graficului închis). *Fie  $X$  și  $Y$  două spații Banach, iar  $T: X \rightarrow Y$  cu următoarele proprietăți: pentru orice șir  $\{x_n\} \subset X$ ,  $\lim x_n = x$ , iar  $y = \lim Tx_n$ , atunci  $y = Tx$ . (Această proprietate dă denumirea de operator închis). Dacă operatorul este liniar atunci este și continuu.*

*Demonstrație.* Pentru aceasta să considerăm funcționala

$$F(x) = \|Tx\|_Y$$

și să verificăm condițiile 1° și 2° din teorema 1.12.2.

Prima condiție este evidentă. Să demonstrăm că și condiția a doua este adevărată.

În adevăr, fie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  convergentă și  $\sum_{n=1}^{\infty} F(x_n) < \infty$  (în caz contrar nu avem ce demonstra). Evident  $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m Tx_n$  și cum  $T$  este închis avem  $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$  și deci

$$\left\| T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \right\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n \right\|_Y \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|_Y$$

Condiția 2° este stabilită. Deci  $F$  este continuă și teorema este demonstrată

### § 13. CÎTEVA APLICAȚII

Vom da acum câteva rezultate care ilustrează tehnica utilizării teoremelor stabilite mai sus.

**TEOREMA 1.13.1.** *Dacă  $\{T_n\}$  este un șir de operatori definiți pe un spațiu Banach  $X$  cu valori în spațiul Banach  $Y$  și dacă*

$$\sup \|T_n x\| < \infty$$

avem

$$\lim_n \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x\| < \infty.$$

*Demonstrație.* Rezultă din teorema lui Banach-Steinhaus.

**COROLAR 1.13.2.** *Dacă  $\{T_n\}$  este un șir de operatori astfel ca pentru orice  $x$ ,  $\lim T_n x$  există, atunci*

$$Tx = \lim_n T_n x$$

este continuă.

*Demonstrație.* Rezultă din teorema graficului închis.

**TEOREMA 1.13.3.** Fie  $p > 1$  și  $\{a_n\}$  un șir de numere complexe astfel ca pentru orice  $b = (b_1, b_2, \dots) \in l^q$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

este convergentă. În acest caz  $a = (a_1, a_2, \dots) \in l^p$ .

*Demonstrație.* Definim

$$F(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

care este o funcțională continuă pe  $l^q$  și  $\|F\| = \|a\|_{l^p}$  ceea ce demonstrează teorema.

**TEOREMA 1.13.4.** Fie  $\{f_n\}$  un șir de funcționale uniform mărginit, definite pe un spațiu Banach  $X$ . În acest caz

$$\{x, \lim f_n(x) \text{ există}\}$$

este un subspațiu liniar închis în  $X$ .

*Demonstrație.* Evident, pentru orice  $x \in X$ , șirul  $\{f_n(x)\} \in m =$  subspațiul șirurilor mărginite și aplicația

$$x \rightarrow \{f_n(x)\} = g(x)$$

definește o aplicație liniară și continuă de la  $X$  la  $m$ . Cum  $c$  fiind subspațiul șirurilor convergente avem

$$\{x, \lim f_n(x) \text{ există}\} = g^{-1}(c)$$

care este astfel o mulțime închisă și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.13.5.** Există o funcție continuă reală definită pe  $[-\pi, \pi]$  pentru care seria sa Fourier este divergentă în zero.

(Un exemplu efectiv de funcție continuă cu această proprietate a fost construit pentru prima dată de Du Bois-Reymond).

*Demonstrație.* Fie  $C^r[-\pi, \pi]$  spațiul funcțiilor continue definite pe  $[-\pi, \pi]$  și pentru orice  $f \in C^r[-\pi, \pi]$  fie

$$u_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

unde  $a_k$  sînt coeficienții Fourier ai funcției  $f$ .

Evident

$$f \rightarrow u_n(f)$$

sînt funcționale liniare. Dacă pentru orice  $f$ ,  $\lim u_n(f)$  există atunci  $\sup_n \|u_n\| < \infty$ . Să demonstrăm că acest lucru nu este adevărat.

Fie pentru aceasta  $g_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\pi \sin \frac{1}{2}x}$  și cum

$$u_n(f)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g_n(x-s) dx$$

$$\|u_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(x)| dx$$

vom avea

$$\begin{aligned} \|u_n\| &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{4k+1}{4k+2}}^{\frac{4k+3}{4k+2}} |g_n(x)| dx > \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} > \\ &> \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum \int \frac{2dx}{x} > \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_0^{n-1} \log \frac{4k+3}{4k+1} \geq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_0^{n-1} \frac{2}{4k+3} \end{aligned}$$

deoarece  $\log(1+t) \geq \frac{t}{1+t}$ .

Este evident că  $\|u_n\|$  nu sînt mărginite și afirmația este demonstrată.

Alte exemple, pe care nu le dăm privesc funcțiile analitice vectoriale cît și sumabilitatea cu ajutorul matricelor.

Exemplele de mai sus nu au folosit teorema lui Hahn-Banach de prelungire. Vom da acum o astfel de aplicație.

**TEOREMA 1.13.6.** *Pe spațiul  $m$  al șirurilor mărginite există o funcțională liniară și continuă notată cu  $\text{glim}$ , cu următoarele proprietăți:*

1. dacă  $\xi_n \geq 0$ ,  $\text{glim}(\xi_n) \geq 0$ ;
2.  $\text{glim}(\xi_{n+1}) = \text{glim}(\xi_n)$ , invarianța la translații;
3. dacă  $\{\xi_n\}$  este convergent  $\text{glim}(\xi_n) = \lim \xi_n$ ;
4.  $\underline{\lim}(\xi_n) \leq \text{glim}(\xi_n) \leq \overline{\lim}(\xi_n)$ .

**Demonstrație.** Fie pe spațiul  $m$  al șirurilor mărginite

$$\pi(\xi, n_1, \dots, n_k) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_n + n_j$$

și

$$p(\xi) = \inf \pi(\xi, n_1, \dots, n_k)$$

unde  $\inf$  se ia după toate sistemele finite  $(n_1, \dots, n_k)$ . Evident că

$$p(\lambda \xi) = \lambda p(\xi); \quad \lambda \geq 0$$

și se poate arăta că este subaditivă. În adevăr, pentru  $\varepsilon > 0$  fie

$$n_1, \dots, n_p; \quad n_1, \dots, n_k$$

astfel ca

$$\pi(\xi; n_1, \dots, n_p) < p(\xi) + \varepsilon,$$

$$\pi(\eta; n_1, \dots, n_k) < p(\eta) + \varepsilon.$$

Să punem

$$n_{j,i} = n_j + n_i$$

de unde

$$(*) \quad \pi(\xi + \eta, n_{1,1}, \dots, n_{p,k}) \geq p(\xi + \eta).$$

Însă

$$\begin{aligned} \pi(\xi + \eta, n_{1,1}, \dots, n_{p,k}) &= \frac{1}{pk} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,i} (\xi_n + n_{j,i} + \eta_n + n_{j,i}) \leq \\ &\leq \frac{1}{pk} \overline{\lim} \sum_{j,i} (\xi_n + n_{j,i}) + \frac{1}{pk} \overline{\lim} \sum_{j,i} (\eta_n + n_{j,i}) \leq \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\xi_n + n_j + n_i) + \\ &+ \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \sup \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\eta_n + n_j + n_i) = \pi(\xi, n_1, \dots, n_p) + \\ &+ \pi(\eta, n_1, \dots, n_k) < p(\xi) + p(\eta) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

și din (\*) avem, deoarece  $\varepsilon$  este arbitrar

$$p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta).$$

Pe subspațiul  $C$  al șirurilor convergente, există funcționala liniară și continuă

$$F(x) = \lim x_n, \quad x = (x_1, \dots)$$

și evident că

$$|F(x)| \leq p(x), \quad |x| = (|x_1|, |x_2|, \dots).$$

Conform teoremei lui Hahn-Banach rezultă că există o funcțională care prelungește pe  $F$  și o notăm cu  $\text{glim}$ . Cum avem

$$-p(-x) \leq \text{glim } x \leq p(x),$$

pentru a demonstra proprietatea 2 este suficient să observăm că pentru șirul

$$\tilde{\xi} = (\xi_{n+1} - \xi_n)$$

avem

$$p(\tilde{\xi}) = 0 \quad \text{și} \quad p(-\tilde{\xi}) = 0.$$

Celelalte afirmații sînt evidente.

Pentru teorema următoare vom avea nevoie de noțiunea de semiprodus scalar pe un spațiu Banach, noțiune introdusă de Lumer.

**DEFINIȚIA 1.13.7.** Se spune că pe spațiul Banach  $X$  s-a dat un semiprodus scalar dacă există o aplicație  $[\cdot, \cdot]$  de la  $X \times X$  în  $K$  (corpul numerelor reale sau complexe), cu următoarele proprietăți:

1.  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [\lambda x, y] = \lambda[x, y],$
2.  $[x, x] > 0$  dacă  $x \neq 0,$
3.  $|[x, y]|^2 \leq [x, x] \cdot [y, y],$
4.  $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y],$

oricare ar fi  $x, y \in X$  și  $\lambda \in C$ .

Are loc:

**TEOREMA 1.13.8.** Orice spațiu Banach admite un semiprodus scalar care are și proprietatea că

$$[x, x] = \|x\|^2.$$

*Demonstrație.* Pentru orice  $x \in X$  există cel puțin o funcțională liniară și continuă  $f_x$  astfel ca  $f_x(x) = 1$  și  $\|f_x\| = 1$ . Pentru orice  $\lambda \in C$  și  $\|x\| = 1$  vom pune  $f_{\lambda x} = \bar{\lambda}f_x$ . Semiprodusul scalar îl definim astfel

$$[x, y] = f_y(x),$$

care evident satisface toate proprietățile de mai sus.

*Observație.* Faptul că un semiprodus scalar are proprietatea 4 se mai numește și proprietatea de omogenitate. Faptul că există semiproduse scalare cu această proprietate a fost observat de Giles.

Vom mai menționa că teorema Hahn-Banach are aplicații profunde în teoria algebrelor de funcții (măsurile de reprezentare, teorema Stone-Weierstrass etc.)

O aplicație interesantă și instructivă își găsește spațiile Hilbert în teoria varietăților diferențiabile și anume în problema scufundării lor în spații Hilbert. Rezultatele pe care le expunem conțin celebrele teoreme ale lui Bieberbach și Manoury. Expunerea noastră se bazează pe cea dată de acad. G. Vrănceanu în vol. 4 al lecțiilor sale de „Geometrie diferențială”.

Pentru a înlesni lectura teoremelor pe care le vom da, vom prezenta câteva definiții necesare din teoria varietăților diferențiabile.

**DEFINIȚIA 1.13.9.** Un spațiu topologic  $\mathfrak{X}$  se numește paracompact dacă pentru orice acoperire deschisă  $\mathfrak{F}$  există o acoperire local finită mai fină decât  $\mathfrak{F}$  \*).

Se poate arăta că orice spațiu compact este paracompact; un rezultat interesant, datorat lui A. H. Stone, afirmă că orice spațiu metric complet este un spațiu paracompact.

**DEFINIȚIA 1.13.10.** Prin varietate topologică  $n$ -dimensională vom înțelege un spațiu Hausdorff paracompact (nevid)  $\mathfrak{X}$  astfel ca pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$  există o vecinătate deschisă  $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}$ ,  $x \in \mathcal{U}$  și  $\mathcal{U}$  este homeomorfă cu o mulțime deschisă din  $R^n$ . O astfel de vecinătate va fi numită și vecinătate de coordonate. Fie  $\mathfrak{X}$  o varietate topologică  $n$ -dimensională. Prin hartă pe  $\mathfrak{X}$  vom înțelege perechea  $(\Phi, \mathcal{U})$  unde  $\mathcal{U}$  este o mulțime deschisă în  $\mathfrak{X}$  și  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow R^n$  cu proprietatea că  $\Phi(\mathcal{U})$  este o mulțime deschisă în  $R^n$ .

Dacă  $\{p_i\}_{i=1}^n$  reprezintă funcțiile

$$p_i(t_1, \dots, t_n) = t_i$$

atunci dacă  $(\Phi, \mathcal{U})$  este o hartă arbitrară a varietății topologice  $n$ -dimensionale, putem defini funcțiile

$$\Phi_i = p_i \circ \Phi: \mathcal{U} \rightarrow R$$

care se vor numi funcțiile de coordonate ale hărții  $(\Phi, \mathcal{U})$  și  $\{\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)\}$  vor fi coordonatele punctului  $x$  în raport cu harta  $(\Phi, \mathcal{U})$ .

Se mai spune că harta  $(\Phi, \mathcal{U})$  este un sistem local de coordonate.

Fie acum  $\mathfrak{X}$  o varietate topologică  $n$ -dimensională și  $x$  un punct arbitrar în  $\mathfrak{X}$  și  $(\Phi, \mathcal{U})$ ,  $(\Psi, \mathcal{V})$  două hărți pe  $\mathfrak{X}$ . Să presupunem că  $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  și astfel apare problema relațiilor între sistemele de coordonate locale. Pentru aceasta se introduce noțiunea de diferențiabilitate.

Dacă  $f: G \rightarrow R$ , unde  $G$  este o mulțime deschisă (nevidă) în  $R$  vom spune că  $f$  este de clasă  $k$ , dacă  $f$  are derivate parțiale de orice ordin  $i \leq k$  și care sînt continue. Se spune că  $f$  este de clasă  $C^\infty$  dacă este de clasă  $C^k$  pentru orice întreg  $k$ ; se spune că  $f$  este de clasă  $C^\omega$  dacă și numai dacă este o funcție analitică.

Prin atlas de clasă  $C^k$  al unei varietăți  $n$ -dimensionale, se înțelege o familie  $\mathfrak{F}$  de hărți pe  $\mathfrak{X}$  cu următoarele proprietăți:

$$1. \bigcup_{(\Phi, \mathcal{U}) \in \mathfrak{F}} \mathcal{U} = \mathfrak{X} \quad \Phi: \mathcal{U} \rightarrow R^n,$$

2. dacă  $(\Phi, \mathcal{U})$  și  $(\Psi, \mathcal{V})$  sînt două hărți cu  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$  (mulțimea vidă) atunci

$$f(\Phi, \Psi): \Phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow R^n \text{ definită prin}$$

$$f_{(\Phi, \Psi)}(t) = \Psi(\Phi^{-1}(t))$$

în orice punct din  $\Phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$  este de clasă  $C^k$ .

\*) O acoperire se zice local finită dacă pentru orice punct din spațiu există o vecinătate care intersectează numai un număr finit de elemente din acoperirea dată. O acoperire  $\mathfrak{F}_1$  se zice mai fină decât acoperirea  $\mathfrak{F}_2$  dacă pentru orice mulțime din  $\mathfrak{F}_1$  există cel puțin o mulțime în  $\mathfrak{F}_2$  care o conține.

Funcțiile  $f_{(\Phi, \Psi)}$  se mai numesc și transformări de variabile, deoarece

$$f_{(\Phi, \Psi)}(\Phi(x)) = \Psi(x).$$

Fie  $\alpha^k(\mathcal{X})$  familia tuturor atlaselor de clasă  $C^k$  pe varietatea  $n$ -dimensională  $\mathcal{X}$ . Vom defini o relație „ $\sim$ ” în  $\alpha^k(\mathcal{X})$  astfel: două atlase  $\alpha$  și  $\beta$  sînt în relația „ $\sim$ ” dacă și numai dacă  $\alpha \cup \beta$  este un atlas în  $\alpha^k(\mathcal{X})$ . Este ușor de verificat că „ $\sim$ ” este o relație de echivalență în  $\alpha^k(\mathcal{X})$ . Prin definiție, prin structură diferențiabilă de clasă  $C^k$  pe varietatea  $n$ -dimensională  $\mathcal{X}$  vom înțelege o clasă de echivalență, iar prin varietate diferențiabilă  $n$ -dimensională de clasă  $C^k$  vom înțelege o varietate  $n$ -dimensională împreună cu o structură diferențiabilă  $\sigma$  de clasă  $C^k$  ( $k$  poate fi și  $\omega$ ).

Vom reaminti un exemplu important de varietate diferențiabilă și anume spațiul proiectiv  $P_n$ .

Să considerăm în mulțimea  $R^{n+1} - \{0\}$  relația „ $\sim$ ” definită prin

$$x \sim y$$

dacă și numai dacă există  $\lambda \neq 0$  astfel ca

$$x_i = \lambda y_i \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

unde

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}).$$

Mulțimea claselor de echivalență este prin definiție spațiul proiectiv  $P_n(R)$ . Dacă facem o construcție similară pentru cazul corpului numerelor complexe vom obține prin definiție spațiul proiectiv complex  $P_n(C)$ , iar dacă considerăm corpul (necomutativ) al cuaternionilor vom avea spațiul proiectiv quaternionic  $P_n(Q)$ .

Fie acum o varietate  $n$ -dimensională de clasă  $C^\infty$ . O teoremă celebră a lui Whitney afirmă că există o scufundare a acestei varietăți într-un spațiu euclidian  $E_N$  cu  $N$  suficient de mare și  $N \leq 2n$ .

Să presupunem că avem un atlas al varietății  $\mathcal{V}_n$  și fie  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m$  vecinătățile care intervin în definiția atlasului și pe care le vom presupune, fără a restrînge generalitatea, raportate la sisteme carteziane de coordonate.

Fie  $u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  și să punem

$$y_0 = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y_i = \frac{x_i}{1 + x^2} \quad x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

iar

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{Q}, \quad Q = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}, \quad \bar{x}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

de unde obținem că

$$y_0 = \frac{Q^2}{Q^2 + \bar{x}^2}, \quad y_i = \frac{\bar{x}_i Q}{Q^2 + \bar{x}^2}$$

și care reprezintă formule date de Nash.

Se spune că o scufundare a unei varietăți  $V_n$  în spațiul  $E_N$  este izometrică dacă există o metrică pe varietate care este păstrată prin scufundarea respectivă.

De exemplu, dacă varietatea este sfera  $S_n$

$$y_i = \frac{x_i}{1+x^2} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} \quad x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad i = 1, \dots, n$$

și

$$y_i = \frac{x'_i}{1+y'^2} \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+y'^2} \quad x'^2 = x_1'^2 + \dots + x_n'^2, \quad i = 1, \dots, n$$

ne dau scufundarea naturală a sferei  $S_n$  în spațiul  $E_{n+1}$  care este o scufundare izometrică, dacă pentru sferă se consideră metrica sa naturală.

Vom observa că date fiind formulele

$$y_0 = \frac{1}{1+x^2}, \quad y_i = \frac{x_i}{1+x^2}, \quad x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

definite pentru o vecinătate  $\mathcal{V}_1$  pe o varietate, atunci la orice punct  $(x_1, \dots, x_n)$  din vecinătate, vom obține un punct al sferei  $S_n$

$$y_0^2 + \dots + y_n^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2} [1 + x_1^2 + \dots + x_n^2] = \frac{1}{1+x^2} = y_0$$

cu observația că originea nu corespunde la nici un punct. Dacă avem o altă vecinătate de la o altă hartă  $(\varphi, \mathcal{V}_2)$ , putem considera formule analoge celor de mai sus. Dacă există un număr finit de hărți care acoperă vecinătatea este evident că dacă  $m$  este numărul hărților atunci are loc.

**TEOREMA 1.13.11.** *Dacă  $\mathcal{V}_n$  este o varietate diferențiabilă atunci există o scufundare indefinit derivabilă în următoarele spații:*

1.  $E_{m(n+1)}$  dacă  $m$  este finit,
2.  $H, H$  un spațiu Hilbert unde dimensiunea spațiului coincide cu numărul de hărți (mai precis avem egalitate de cardinale).

În cazul al doilea este suficient să luăm pentru fiecare vecinătate dată a hărții, noi transformări de coordonate care se obțin prin înmulțire cu constante convenabile.

Dacă  $P_n(R)$  este spațiul proiectiv real atunci pentru orice  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in E_N$  să punem

$$y_k = u_k^2 \quad y_{ik} = u_i u_k \quad i \neq k$$

și cum  $y_{ik} = y_{ki}$  printr-o transformare ortogonală

$$y'_k = y_k, \quad y'_{ik} = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_{ik} + y_{ki}), \quad z'_{ik} = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_{ik} - y_{ki}), \quad i < k$$

spațiul proiectiv este scufundat în subspațiul euclidian cu  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  dimensiuni, cu coordonatele

$$z_k = u_k^2, \quad z_{ik} = \sqrt{2} u_i u_k, \quad i < k,$$

care se mai numește și scufundarea lui Manoury.

Să presupunem că avem o varietate  $V_1$  cu metrica dată de formula

$$ds^2 = A(t^2) dt^2,$$

unde  $A(\cdot)$  este o funcție indefinit derivabilă cu toate derivatele pozitive. În acest caz conform unei teoreme a lui S. Bernstein <sup>2</sup> există o dezvoltare

$$A(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n},$$

care are raza de convergență  $R > 0$ . Evident că  $a_i \geq 0$ . Să considerăm

$$x_0 = \sqrt{a_0} t, \quad x_1 = \sqrt{a_1} t, \dots, x_n = \sqrt{\frac{a_n}{n+1}} t^{n+1}, \dots$$

care ne dă

$$dx_0^2 + \dots + dx_n^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} dt^2 = ds^2$$

și am obținut o scufundare izometrică a varietății  $V_1$  în spațiul Hilbert  $H$ . Să presupunem că varietatea  $V_2$  are o singură hartă și are metrica

$$ds^2 = A(x^2 + y^2) (dx^2 + dy^2)$$

unde  $A(\cdot)$  satisface aceleași condiții ca mai sus. Dacă punem

$$z_{2p} = x_{2p-1} + iy_{2p-1} = \sqrt{\frac{a_{2p-1}}{2p-1}} (x + iy)^{2p-1}$$

$$z_{2p} = x_{2p} + iy_{2p} = \sqrt{\frac{a_{2p}}{2p}} (x + iy)^{2p}$$

oricare ar fi  $p = 1, 2, 3, \dots$ , obținem o scufundare izometrică într-un spațiu Hilbert.

<sup>2</sup> S. Bernstein, Sur la definition et des propriétés des fonctions d'une variable réelle, Math. Ann. (1914), 75, 449-468.

Să presupunem că funcția  $A(\cdot)$  are forma

$$A(x^2 + y^2) = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

și în acest caz scufundarea are forma

$$(*) \quad z_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}(x + iy)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

și aceasta ne dă următoarea teoremă a lui L. Bieberbach.

**TEOREMA 1.13.12.** *Există o scufundare izometrică și analitică a planului lui Lobacevski-Bolyai, adică a varietății  $V_2$  cu metrica*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

și scufundarea este dată de formulele (\*).

**Observație 1.13.13.** D. Blanușa a arătat că există o scufundare izometrică indefinit derivabilă a planului Lobacevski-Bolyai în spațiul  $E_6$ . Ar fi interesant dacă s-ar găsi o scufundare analitică într-un spațiu de dimensiune finită. În acest sens ar fi suficient, conform teoremei lui S. Bernstein, să se găsească o scufundare indefinit derivabilă cu derivate pozitive.

Până acum am considerat numai scufundări în spații Hilbert peste corpul numerelor reale sau corpul numerelor complexe. Vom da acum un exemplu de scufundare într-un spațiu Hilbert cvaternionic.

Să presupunem că avem o varietate cu o singură hartă și care are metrica

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^2} dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Deducem imediat că există o scufundare analitică a varietății cu metrica  $ds^2$  în spațiul Hilbert cvaternionic  $H_4$  punând

$$q_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)^n,$$

oricare ar fi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Apare astfel problema extinderii rezultatului lui D. Blanușa pentru varietatea cu metrica de mai sus.

## § 14. SPAȚIUL $\mathcal{L}(E)$

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $\mathcal{L}(E)$  mulțimea operatorilor liniari și mărginiți definiți pe  $E$  cu valori în  $E$  cu norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

Evident că operatorul  $I$  definit prin

$$I(x) = x$$

este în  $\mathcal{L}(E)$ . Are loc:

**TEOREMA 1.14.1.** *Mulțimea  $\mathcal{L}(E)$  este o algebră Banach cu element unitate.*

*Demonstrație.* Faptul că  $\mathcal{L}(E)$  este un spațiu Banach este ușor de verificat. În adevăr, faptul că  $\mathcal{L}(E)$  este un spațiu vectorial este evident. Să arătăm că este complet în norma introdusă mai sus. Fie pentru aceasta  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E)$  astfel ca pentru  $\varepsilon > 0$  există  $N_\varepsilon$  astfel ca

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon; \quad n, m \geq N_\varepsilon.$$

Dacă  $x \in E$  și  $\|x\| \leq 1$  evident că șirul  $\{T_n x\}$  este șir Cauchy și deci putem să punem

$$Tx = \lim T_n x.$$

Dacă  $x$  este arbitrar în  $E$  atunci să punem

$$Tx = \|x\| \lim T_n \frac{x}{\|x\|},$$

de unde rezultă că

$$Tx = \lim T_n x$$

este un operator liniar. Cum avem pentru  $\|x\| \leq 1$

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|,$$

deducem că

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0,$$

de unde rezultă că  $T \in \mathcal{L}(E)$

Fie acum  $T, S \in \mathcal{L}(E)$ . Vom avea

$$\begin{aligned} * \quad \|TS\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|TSx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| T \cdot \frac{Sx}{\|Sx\|} \right\| \|Sx\| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| T \frac{Sx}{\|Sx\|} \right\| \|T\| \leq \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

(dacă  $Sx = 0$ , atunci inegalitățile de mai sus sînt evidente). Teorema este demonstrată.

În acest mod toate rezultatele demonstrate la algebre Banach sînt adevărate pentru această algebră.

*Observație.* Exact ca în teorema 3.1 putem demonstra următoarea teoremă pe care o lăsăm în seama cititorului.

**TEOREMA 1.14.2.** Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Banach, iar  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  mulțimea operatorilor liniari definiți pe  $E_1$  cu valori în  $E_2$ , astfel ca  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Tx\|_2 \leq M < \infty$$

(indicele 1, 2 se referă la normele celor două spații; putem scrie pe scurt

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq M < \infty,$$

înțelegând că norma lui  $x$  se calculează în spațiul  $E_1$  și a lui  $Tx$  în  $E_2$ . Noi vom folosi această notatie ori de câte ori nu va exista pericolul unei confuzii). În acest caz  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  este un spațiu Banach.

Următoarea teoremă dă o condiție suficientă pentru ca un element din  $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$  să aibă invers.

**TEOREMA 1.14.3.** Dacă pentru  $T \in \mathcal{L}(E)$  ecuația

$$y = Tx$$

are soluție pentru orice  $y \in E$  atunci dacă există  $m > 0$  astfel ca

$$\|Tx\| \geq m \|x\|$$

atunci  $T^{-1}$  există și  $\|T^{-1}\| \leq 1/m$ .

*Demonstrație.* Cum  $T$  este surjecție din condiția pusă rezultă că  $T$  este și injectivă. Cum prin definiție  $T^{-1}y = x$  avem că

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m} \|y\|$$

și deci  $\|T^{-1}\| \leq 1/m$ . Teorema este demonstrată.

Vom da acum noțiunea de operator adjunct.

Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Banach, iar  $E_1^*$ ,  $E_2^*$  dualele lor și  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Să considerăm  $g \in E_2^*$  și  $x$  arbitrar în  $E_1$ . În acest caz

$$f(x) = g(Tx)$$

este o funcțională liniară pe  $E$  și cum

$$\|f(x)\| \leq \|g\| \|Tx\|$$

rezultă că  $f \in E_1^*$ . Rezultă în acest mod că unei funcționale din  $E_2^*$  îi putem atașa o funcțională din  $E_1^*$  și operatorul definit astfel îl vom numi adjunctul lui  $T$

$$T^* E_2^* \rightarrow E_1^*; \quad f = T^*g.$$

Are loc :

TEOREMA 1.14.4.  $T^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ .

Demonstrație. Fie  $g = g_1 + g_2$ . În acest caz avem

$$f(x) = g(Tx) = g_1(Tx) + g_2(Tx) = (T^*g_1)(x) + (T^*g_2)(x)$$

și deci

$$T^*(g_1 + g_2) = T^*g_1 + T^*g_2.$$

De asemenea, pentru orice scalar  $\lambda$  avem

$$f(\lambda x) = \lambda g(Tx) = \lambda (T^*g)(x) = (\lambda T^*)(g)(x),$$

de unde

$$(\lambda T^*) = (\lambda T)^*$$

(dacă  $\lambda$  este un scalar complex,  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ , deoarece înmulțirea cu un scalar în spațiul dual este dată de

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x)$$

și care concordă cu exemplul spațiilor Hilbert).

Este clar, că avem

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

și să arătăm acum că avem chiar egalitate. În adevăr, conform teoremei de prelungire, pentru  $x$  arbitrar în  $E_1$ , există  $g \in E_2^*$  astfel ca

$$1. \quad g(Tx) = \|Tx\|$$

$$2. \quad \|g\| = 1$$

și astfel avem

$$\|Tx\| = g(Tx) = (T^*g)(x) \leq \|T^*(g)\| \|x\| \leq \|T^*\| \|x\|$$

de unde, rezultă că

$$\|T^*\| \geq \|T\|.$$

În acest mod am demonstrat că  $\|T^*\| = \|T\|$ .

Este naturală problema legăturii mai strânse între operatorii  $T$ ,  $T^*$ , adică a naturii ecuațiilor

$$(1) \quad Tx = y,$$

$$(1^*) \quad T^*g = f,$$

pentru  $T: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Teoreme privind legătura dintre  $T$  și  $T^*$  din acest punct de vedere au fost date de către Toeplitz și Hellinger pentru cazul spațiilor Hilbert, de Riesz pentru clasa spațiilor Banach  $\mathcal{L}^p$  și de Banach în cazul general și de asemenea de Fredholm (pentru cazul ecuațiilor integrale).

TEOREMA 1.14.5. Operatorul  $T^* \in \mathcal{L}(E^*)$  este injectiv dacă și numai dacă  $TE = \{Tx, x \in E\}$  este dens în  $E$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că  $T$  este injectiv. Clar că  $TE$  este subspațiu liniar și conform teoremei lui Hahn-Banach (Bohnenelust — Sobczyk) este suficient să arătăm că dacă  $g \in E^*$  care se anulează pe  $TE$  atunci  $g = 0$ . În adevăr, dacă  $x \in E$  avem

$$(T^*g)(x) = g(Tx) = 0,$$

oricare ar fi  $x$ , de unde  $T^*g = 0$  și cum  $T$  este injectiv rezultă că  $g = 0$ . Deci  $TE$  este dens. Fie acum  $T|_E$  dens și  $g$  care se anulează pe  $TE$ . Dar cum  $Tg = 0$ , atunci pentru orice  $x \in E$  avem

$$g(Tx) = (T^*g)(x) = 0,$$

de unde rezultă că  $g$  se anulează pe  $TE$  și deci  $g = 0$ . Am demonstrat astfel că  $T^*$  este injectiv și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.14.6.** Fie  $T \in \mathcal{L}(E)$  cu proprietatea că  $\|Tx\| \geq \|x\|$ , oricare ar fi  $x \in E$ . În acest caz  $T^*$  este injectiv dacă și numai dacă  $T$  este surjectiv.

*Demonstrație.* Fie  $T^*$  injectiv și  $g \in E$ . În acest caz  $TE$  este dens și deci există  $y_n \in TE$  astfel ca  $y_n \rightarrow y$ . Fie  $y_n = Tx_n$  și cum există  $y_n$

$$\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \|x_n - x_m\|$$

șirul  $\{x_n\}$  este șir Cauchy. Fie  $x = \lim x_n$ . Evident că avem

$$Tx = \lim Tx_n = \lim y_n = y,$$

și deci  $T$  este surjectiv.

**TEOREMA 1.14.7.** Fie  $E_1, E_2, E_3$  spații Banach și

$$T \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad S \in \mathcal{L}(E_2, E_3).$$

În acest caz

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

*Demonstrație.* Cum  $ST: E_1 \rightarrow E_3$  și  $(ST)^*: E_3^* \rightarrow E_1^*$ , pentru  $h \in E_3^*$ ,  $x \in E_1$  avem

$$[(ST)^*h](x) = h[(ST)(x)] = (S^*h)(T(x)) = S^*(T^*h)(x)$$

și cum  $h$  este arbitrar, egalitatea din enunț este demonstrată.

*Observație.* Cazul operatorilor care sînt definiți pe mulțimi dense a constituit subiectul multor lucrări recente.

## § 15. ELEMENTE SPECIALE ÎN $\mathcal{L}(E)$

Vom expune diferite proprietăți ale unor clase speciale de elemente din  $\mathcal{L}(E)$ , importante atît din punctul de vedere al aplicațiilor cît și în sine. Printre clasele de elemente pe care le vom studia sînt operatorii compacți, operatorii Riesz, operatorii Fredholm,  $\alpha$ -contrații etc.

*Operatorii compacți*

Vom studia mai întâi operatorii compacți pe spații Hilbert  $E$ .

DEFINIȚIA 1.15.1. Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  se va numi finit-dimensional dacă  $\dim TE < \infty$ .

Să dăm acum forma generală a operatorilor finit-dimensionali.

Fie pentru aceasta  $e_1, \dots, e_n$  o bază ortonormală în  $TE = R(T)$  și deci pentru orice  $x \in E$  avem

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle Tx, e_i \rangle e_i, \quad \dim TE = n.$$

Cum pentru orice  $i$ ,

$$x \rightarrow \langle Tx, e_i \rangle$$

sînt funcționale liniare și continue, rezultă că există  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  astfel ca

$$\langle Tx, e_i \rangle = \langle x, \tilde{e}_i \rangle,$$

de unde rezultă că

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle x, \tilde{e}_i \rangle e_i.$$

Să examinăm acum adjuctul operatorului  $T$ . Fie  $y$  arbitrar în  $E$  și să calculăm

$$\langle T^*y, x \rangle = \overline{\sum_{i=1}^n \langle e_i, y \rangle \langle x, \tilde{e}_i \rangle} = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle \langle \tilde{e}_i, x \rangle = \left\langle \left( \sum_{i=1}^n \langle y, \tilde{e}_i \rangle \tilde{e}_i \right), x \right\rangle.$$

Cum  $x$  este arbitrar în  $E$  rezultă că

$$T^*y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle \tilde{e}_i.$$

Din formula obținută rezultă că

$$R(T^*) \subset \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\} = \text{spațiul generat de } \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n,$$

și deci

$$\dim R(T^*) \leq \dim R(T).$$

Cum  $(T^*)^* = T$  rezultă că avem  $\dim R(T^*) = \dim R(T)$ .

O clasă strîns legată de operatorii finit-dimensionali este clasa operatorilor compacți.

DEFINIȚIA 1.15.2. Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  se spune că este compact dacă există un șir de operatori finit-dimensionali  $\{T_n\}$ , astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

În teorema care urmează dăm câteva proprietăți ale operatorilor compacți.

**TEOREMA 1.15.3.** *Fie  $K$  mulțimea operatorilor compacți pe spațiul Hilbert  $E$ . În acest caz  $K$  este un ideal bilateral închis adică au loc următoarele proprietăți :*

1.  $K$  este un spațiu Banach,
2. pentru orice  $T \in K$  și  $S \in \mathcal{L}(E)$ ,  $TS$  și  $ST$  sînt în  $K$ .

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că mulțimea  $K$  este un spațiu vectorial. Să arătăm că este chiar spațiu Banach. În adevăr, fie  $T_n \in K$  și  $T$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $N_\varepsilon$  astfel ca  $n \geq N_\varepsilon$ ,  $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$ . Cum  $T_n \in K$  există  $T'_n$  finit-dimensional, astfel ca  $\|T'_n - T_n\| < \varepsilon/2$ . Din relația

$$\|T'_n - T\| = \|T'_n - T_n + T_n - T\| \leq \|T'_n - T_n\| + \|T_n - T\| \leq \varepsilon$$

și deci proprietatea 1 este demonstrată.

Este ușor de văzut că dacă  $\{T_n\}$  sînt finit-dimensionali și

$$T_n \rightarrow T$$

atunci  $T_n S$  și  $S T_n$  sînt finit-dimensionali și converg către  $TS$ ,  $ST$  respectiv. Teorema este demonstrată.

Se poate arăta că dacă  $K_1$  este un ideal bilateral închis în  $\mathcal{L}(E)$  care conține pe  $K$  și  $K_1 \neq \mathcal{L}(E)$  atunci  $K_1 = K$ .

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor compacți utilizînd concepte topologice.

**TEOREMA 1.15.4.** *Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  este compact dacă și numai dacă pentru orice mulțime mărginită  $M$ , mulțimea  $TM$  are proprietatea că orice șir  $\{x_n\} \subset TM$  are un subșir convergent<sup>3</sup>.*

*Demonstrație.* Fie  $TK$  și  $T_n \rightarrow T$ , iar  $S(\theta, 1) = \{x, \|x\| \leq 1\}$ . În acest caz mulțimea  $T_n S(\theta, 1)$  este o mulțime compactă și deci există o mulțime  $F_1$  finită pentru  $\varepsilon > 0$  dat, astfel ca orice element din  $T_n S(\theta, 1)$  se află la distanța  $\leq \varepsilon/2$  de un punct din  $F_1$ . Dacă  $n \geq N$  astfel ca  $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$ , rezultă că pentru  $x \in S(\theta, 1)$ , avem

$$\|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon/2,$$

ceea ce demonstrează că  $TS(\theta, 1)$  este o mulțime cu proprietatea enunțată. În mod similar se demonstrează afirmația pentru mulțimi mărginite arbitrare.

Fie acum  $T$  cu proprietatea din enunț și pentru mulțimea  $TS(\theta, 1)$  mulțimea  $F_1$  cu  $\varepsilon > 0$  dat. Fie  $F_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  și  $P_n$  operatorul de proiecție ortogonală pe spațiul generat de  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Să punem prin definiție  $T_n = P_n T$  care evident sînt finit-dimensionali. Evident că  $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$  și teorema este demonstrată.

<sup>3</sup> O mulțime cu această proprietate se mai spune că este precompactă.

*Observație.* Teorema de mai sus afirmă că noțiunile de operator compact și operator care transformă mulțimile mărginite în mulțimi precompacte coincid în cazul spațiului Hilbert. Se poate arăta că există și alte spații pentru care o afirmație de acest tip este adevărată, în general, pentru cazul spațiilor Banach nu se știe dacă este adevărată.

**DEFINIȚIA 1.15.5.** Un șir de elemente  $\{x_n\} \subset E$ ,  $E$  un spațiu Banach, se spune că converge slab către  $x$  dacă pentru orice funcțională  $f \in E^*$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Dacă  $E$  este un spațiu Hilbert atunci definiția de mai sus este pentru orice  $z \in H$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle$$

(notăm  $x_n \rightharpoonup x$ ; convergența tare,  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  se notează  $x_n \rightarrow x$ ). Se observă imediat, din teorema de prelungire a lui Hahn Banach (or Bohnenblust-Sobczyk), că limita unui șir care converge slab este unică. Legătura dintre convergența slabă și operatorii compacți este dată în:

**TEOREMA 1.15.6.** *Condiția necesară și suficientă ca  $T(E)$ ,  $E$  un spațiu Hilbert, să fie în  $K$  este ca pentru orice șir slab convergent  $x_n \rightharpoonup x$  să avem  $Tx_n \rightarrow Tx$ .*

*Demonstrație.* Să arătăm că condiția este necesară. În adevăr, fie  $x_n \rightharpoonup x$  și  $T \in K$ . Se observă ușor că  $Tx_n \rightarrow Tx$ . Să presupunem că  $Tx_n \not\rightarrow Tx$  și deci există un șir de indici  $\{n_k\}$ , astfel ca

$$\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \varepsilon$$

cu  $\varepsilon > 0$ . Cum  $T$  este în  $K$ , din teorema de mai înainte, mulțimea  $\{Tx_n\}$  este o mulțime precompactă; în particular  $\{Tx_{n_k}\}$  este precompactă și deci putem extrage un subșir convergent  $Tx_{n_{k_1}} \rightarrow z_0$ . Evident că  $Tx_{n_{k_1}} \rightarrow Tx$  și din unicitatea limitei slabe rezultă că  $z_0 = Tx$ . Această contradicție ne arată că trebuie să avem  $Tx_n \rightarrow Tx$ .

Fie acum  $M$  o mulțime mărginită arbitrară în  $E$  și să luăm  $y_n \in TM$ ,  $y_n = Tx_n$ . Cum  $\{x_n\} \subset M$  există un subșir slab convergent

$$x_{n_k} \rightarrow x_0.$$

Dar în acest caz  $Tx_{n_k} \rightarrow Tx_0$  și deci  $y_{n_k} \rightarrow Tx_0$  care arată că  $TM$  este o mulțime precompactă. Rezultă astfel conform teoremei de mai sus că  $T$  este compact. Teorema este demonstrată.

Noțiunea de operator complet continuu: dacă  $x_n \rightarrow x$  atunci  $Tx_n \rightarrow Tx$  a fost introdusă de D. Hilbert și teorema de mai sus arată că aceasta este echivalentă cu noțiunea de operator compact pe spații Hilbert. Există însă spații în care acest lucru nu mai este adevărat.

Vom prezenta acum noțiunea de operator compact pe spații Banach; demonstrațiile date mai înainte în care structura de spațiu Hilbert nu a intervenit în mod esențial nu vor mai fi repetate aici.

**DEFINIȚIA 1.15.7.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  un spațiu Banach, se va numi compact dacă oricare ar fi mulțimea mărginită  $M \subset E$ ,  $TM$  este precompactă (adică din orice șir mărginit de elemente din  $TM$  se poate extrage un subșir convergent).

Are loc următoarea:

**TEOREMA 1.15.8.** Mulțimea operatorilor compacți  $K$  formează un ideal bilateral închis în  $\mathcal{L}(E)$ .

*Demonstrație.* Faptul că mulțimea  $K$  este un spațiu vectorial este ușor de constatat. Să arătăm că avem în fapt un spațiu Banach și apoi că avem un ideal bilateral.

Fie  $T_n \in K$  și  $\lim \|T_n - T\| = 0$ , iar  $S(\theta, 1) = \{x, \|x\| \leq 1\}$ . Este suficient să arătăm că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o mulțime finită în  $TS$ , astfel ca sferele cu centrele în punctele acestei mulțimi să acopere mulțimea  $TS$ . În adevăr, pentru  $\varepsilon > 0$  să luăm  $n > N_\varepsilon$  astfel ca  $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$  și cum  $T_n S$  are proprietatea că există o mulțime finită  $\{y_1, \dots, y_n\}$  astfel ca sferele cu centrele în aceste puncte și rază  $\leq \varepsilon/2$  să acopere  $T_n S$ . În acest caz sferele cu centrele în  $\{y_1, \dots, y_n\}$  și de rază  $\varepsilon$  acoperă pe  $TS$ . În adevăr

$$\|Tx - y_i\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - y_i\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Faptul că mulțimea  $K$  este un ideal bilateral rezultă imediat din faptul că  $T \in K$  și  $T_1 \in \mathcal{L}(E)$  atunci:

- (1)  $T T_1 S(\theta, 1)$  este o mulțime precompactă și
- (2)  $T_1 TS(\theta, 1)$  este de asemenea precompactă.

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă, datorită lui Schauder și Kakutani, arată legătura între compacitatea operatorului  $T$  și respectiv  $T^*$ .

**TEOREMA 1.15.9.** Dacă  $T$  este un operator compact atunci și  $T^*$  este un operator compact.

*Demonstrație.* Să luăm o acoperire a mulțimii  $TS(\theta, 1)$  cu sfere de rază  $\leq \varepsilon/2$  dată. Fie acestea  $S(y_i, \varepsilon/2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Să luăm sfera  $S^*(\theta^*, 1)$  — sfera unitate a spațiului dual și să definim o aplicație

$$U^*(y^*) = \{y^*(y_i)\}$$

definită pe  $E^*$  cu valori în  $C_n$  spațiul complex  $n$ -dimensional. Evident că  $U^*$  este compactă (fiind finit-dimensională) și deci  $U^*S^*(\theta^*, 1)$  poate fi acoperită cu un număr finit de sfere de rază  $\varepsilon/4$  și ale căror centre se găsesc în punctele  $U^*(y_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , cu  $y_i^* \in S^*(\theta^*, 1)$ . Rezultă că pentru orice  $y^* \in S^*(\theta^*, 1)$  există  $y_j$  astfel ca

$$|y^*(y_h) - y_j^*(y_h)| < \varepsilon/4, \quad h = 1, \dots, n$$

și cum pentru orice  $x \in S(0, 1)$  există  $y_h$  astfel ca  $\|Tx - y_h\| \leq \varepsilon/4$  obținem

$$\begin{aligned} |y^*(Tx) - y_h^*(Tx)| &\leq |y^*(Tx) - y^*(y_k)| + |y^*(y_k) - y_h^*(y_k)| + \\ &+ |y_h^*(y_k) - y_h^*(Tx)| < \frac{3}{4} \varepsilon, \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$\|T^*(y^*) - T^*(y_h^*)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |y^*(Tx) - y_h^*(Tx)| < \varepsilon$$

și deci

$$T^*(S^*(0^*, 1)) \subset \bigcup_1^k S(T^*(y_h^*), \varepsilon)$$

și cum  $\varepsilon$  este arbitrar rezultă că  $T$  este compact.

Teorema este demonstrată.

Vom da acum câteva rezultate privind spectrul unui operator compact. Elementele acestei teorii au fost date de F. Riesz.

**TEOREMA 1.15.10.** Fie  $T \in K$ , definit pe un spațiu Banach. În acest caz dacă  $T_\lambda = T - \lambda I = T - \lambda$  este o aplicație injectivă atunci

$$R(T_\lambda) = \{y, y = T_\lambda x, x \in E\}$$

este un spațiu închis când  $\lambda \neq 0$ .

*Demonstrație.* Faptul că este subspațiu este evident. Să arătăm că este închis. Fie deci  $y_n \in R(T_\lambda)$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,  $y_n = T_\lambda x_n$ . Dacă  $\{x_n\}$  conține un șir mărginit, atunci fie acesta  $\{x_{n_k}\}$  și deci

$$y_{n_k} = Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k}$$

are proprietatea că  $\{Tx_{n_k}\}$  conține un subșir convergent. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $\{Tx_{n_k}\}$  este convergent. În acest caz cum  $\lambda \neq 0$  rezultă că șirul  $\{x_{n_k}\}$  este convergent (deoarece  $\{y_{n_k}\}$  este convergent). Evident  $x = \lim_n x_{n_k}$  are proprietatea că  $y = \lim_n T_\lambda x_{n_k} = T_\lambda x$  și teorema este demonstrată în acest caz. Dacă  $\{x_n\}$  nu conține nici un subșir mărginit atunci punând  $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$  evident că avem

$$1. \quad \|x'_n\| = 1$$

$$2. \quad Tx'_n - \lambda x'_n \rightarrow 0$$

și cum  $\{Tx'_n\}$  are un subșir convergent,  $\{Tx'_{n_k}\}$  rezultă că și  $\{x'_{n_k}\}$  este convergent,  $\lim_n x'_{n_k} = x'$ ,  $\|x'\| = 1$ . Dar atunci avem

$$Tx' - \lambda x' = 0,$$

care ne dă că  $x' = 0$  deoarece  $T_\lambda$  este o aplicație injectivă ceea ce contrazice presupunerea noastră.

Teorema este demonstrată.

Din aceasta deducem următorul:

**COROLAR 1.15.11.** Dacă  $T \in K$  și  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$  atunci există  $x \in E$  astfel ca  $Tx = \lambda x$  sau există funcționala  $x^* \in E^*$  astfel ca  $T^*x^* = \lambda x^*$ .

*Demonstrație.* Să considerăm spațiul  $R(T_\lambda)$ . Dacă  $T_\lambda$  este o aplicație injectivă și  $R(T_\lambda)$  este dens atunci  $R(T_\lambda) = E$  conform teoremei precedente și în acest caz  $T_\lambda$  are invers, de unde rezultă că  $\lambda \notin \sigma(T)$  și aceasta este o contradicție.

Dacă  $T_\lambda$  nu este injectiv, afirmația teoremei este demonstrată.

Rămâne de considerat numai cazul cînd  $T_\lambda$  este injectiv și  $R(T_\lambda)$  nu este dens în  $E$ . Conform teoremei lui Hahn-Banach (sau Bohnenblust-Sobczyk) că există  $x^* \in E^*$  astfel ca:

$$1. \quad \|x^*\| = 1,$$

$$2. \quad x^*(T_\lambda)(x) = 0,$$

de unde rezultă că pentru orice  $x$  avem

$$\lambda x^*(x) - (T^*x^*)(x) = 0,$$

care ne dă că  $\lambda x^* = T^*x^*$  și corolarul este demonstrat. Pentru a studia structura mai fină a spectrului unui operator compact vom avea nevoie de un rezultat cunoscut sub numele de „lema lui Riesz” care are, printre altele, aplicații la caracterizarea spațiilor finit-dimensionale în clasa spațiilor Banach. Noi vom folosi această leamnă și la teoria  $\alpha$ -contractiilor, operatori care generalizează clasa operatorilor compacți.

**TEOREMA 1.15.12.** (Lema lui Riesz). Fie  $E_1, E_2$  două spații Banach astfel ca  $E_1 \subset E_2$ . ( $E_1 \neq E_2$ ). Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $y \in E_2$  astfel ca  $\|y\| = 1$ ,  $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$  oricare ar fi  $x \in E_1$ .

*Demonstrație.* Fie  $b \in E_2$  și  $b \notin E_1$ , de unde rezultă că  $\inf_{a \in E_1} \|b - a\| = \delta > 0$  și deci există  $a_0$  astfel ca  $\|b - a_0\| < \delta(1 + \varepsilon)$ . Să punem  $b_1 = b - a_0$  și deci avem

$$(1 + \varepsilon) \inf_{a \in E_1} \|b_1 - a\| = (1 + \varepsilon) \delta > \|b_1\|.$$

Dacă notăm

$$y = \frac{b_1}{\|b_1\|},$$

avem că

$$\begin{aligned}\|y - a\| &= \left\| \frac{b_1}{\|b_1\|} - a \right\| = \frac{1}{\|b_1\|} \|b_1 - a'\| > \frac{1}{\delta(1 + \varepsilon)} \|b_1 - a'\| > \\ &> \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.15.13. Dacă  $T$  este un operator compact și

$$Tx_n - \lambda_n x_n = 0,$$

$\lambda_m \neq \lambda_n$ ,  $n \neq m$ ,  $x_n \neq 0$  atunci  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că  $\lambda_n \not\rightarrow 0$ , deci există  $\varepsilon > 0$  și un subsir  $\{\lambda_{n_k}\}$  astfel ca  $|\lambda_{n_k}| \geq \varepsilon$ . Să punem  $\lambda_{n_i} = \mu_i$ , deci avem un șir  $x_{n_i} = y_i$ , să notăm cu  $E_n = \{y_1, \dots, y_n\}$  spațiul închis generat de vectorii respectivi și să arătăm că  $E_{n+1}$  nu coincide cu  $E_n$ . Să presupunem că acest lucru este adevărat. Rezultă că

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

deci

$$0 = (T - \lambda_{n+1})y_{n+1} = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) y_1 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) y_n.$$

Cum  $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$  oricare ar fi  $i \leq n$ , deducem că (presupunînd, fără a restrînge generalitatea că  $\{y_i\}$ , sînt liniari independenți)

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

care este o contradicție. Rezultă că incluziunea  $E_n \subset E_{n+1}$  este proprie și din lema lui Riesz rezultă că există  $z_{n+1} \in E_{n+1}$ , astfel ca  $\|z_{n+1} - x\| > 1/2$ , oricare ar fi  $x \in E_n$ .

Cum elementul  $z_{n+1}$  are forma  $z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i$  deducem că elementul  $(T - \lambda_{n+1})z_{n+1} \in E_n$ . În adevăr,

$$(T - \lambda_{n+1})z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (T - \lambda_{n+1}) y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i y_i - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_{n+1} y_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) y_i,$$

care este în  $E_n$ . Deducem astfel că pentru  $n > m$  elementul

$$z_{n,m} = (z_{n+1} - \lambda_{n+1}^{-1} T z_{n+1}) + \lambda_m^{-1} T z_m$$

este în  $E_n$  și deci, conform lemei lui Riesz avem

$$\left\| T\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} z_{n+1}\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m} z_m\right) \right\| = \|z_{n+1} - z_{n,m}\| > \frac{1}{2}$$

deci șirul  $\left\{ T\left(\frac{1}{\lambda_n} z_n\right) \right\}$  nu este și nu are nici un subșir convergent. Dar

$$\left\{ \frac{z_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right\}, \quad \left\| \frac{z_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

este mărginit și aceasta contrazice faptul că  $T$  este compact.

Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 1.15.14.** *Dacă  $T$  este în  $K$  atunci mulțimea punctelor din  $\sigma(T)$  este cel mult numărabilă și singurul punct de acumulare este zero.*

*Demonstrație.* Pentru a demonstra teorema este suficient să demonstrăm că orice  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$  este un punct izolat în  $\sigma(T)$ . În adevăr, să presupunem că  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ,  $\lambda_0 \neq 0$  și nu este izolat. Rezultă că există  $\lambda_n \in \sigma(T)$  astfel ca  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  și putem aplica teorema de mai înainte, de unde rezultă că numai un număr finit de operatori  $T\lambda_i = T - \lambda_i$  nu sînt aplicații injective. Dar atunci numai un număr finit de operatori  $T^* - \lambda_i$  sînt aplicații injective. Cum  $T^*$  este compact, rezultă că avem o contradicție. Deci  $\lambda_0$  este punct izolat în  $\sigma(T)$  și afirmația este demonstrată.

*Observație.* Fie  $T \in \mathcal{L}(E)$  astfel că există un întreg  $n$  astfel ca  $T^n \in K$ . În acest caz teorema 1.4.14. este adevărată pentru  $T^n$ . În adevăr aceasta rezultă din teorema despre spectre care afirmă că

$$\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$$

### 15.1. OPERATORI CU PARTE IMAGINARĂ COMPACTĂ

Fie  $E$  un spațiu Hilbert și  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Este cunoscut că orice operator  $T$  se poate scrie sub forma

$$T = T_1 + iT_2,$$

unde  $T_1$  și  $T_2$  sînt operatori hermitieni. În cele ce urmează vom presupune că  $T_2$  este un operator compact și vom studia structura spectrului  $\sigma(T)$ .

**TEOREMA 1.15.15.** *Fie  $\lambda_0$  cu proprietatea că  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$  și  $(T - \lambda_0)g_n = f_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$*

*În acest caz, dacă  $\{f_n\}$  este un șir convergent iar  $\{g_n\}$  este mărginit atunci există un subșir  $\{g_{n_k}\}$  convergent. Dacă  $\lambda_0$  nu este valoarea proprie, șirul  $\{g_n\}$  este convergent.*

*Demonstrație.* Cum  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$  rezultă că  $\lambda_0 \notin \sigma(T_1)$  și deci  $T_1 - \lambda_0$  are invers. Cum avem

$$(T - \lambda_0) g_n = f_n = (T_1 - \lambda_0) g_n + i T_2 g_n$$

sau

$$g_n = (T_1' - \lambda_0) f_n - i (T_1 - \lambda_0)^{-1} T_2 g_n,$$

cum  $T_2$  este compact, iar șirul  $\{f_n\}$  este convergent, rezultă că  $\{g_n\}$  are un subșir convergent. De asemenea este ușor de văzut că dacă  $\{g_n\}$  are două subșiruri convergente către două elemente diferite, atunci  $\lambda_0$  este o valoare proprie. Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 1.15.16.** Fie  $\lambda_0$  cu proprietatea  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$  și  $E_{\lambda_0} = (T - \lambda_0) E = R(T_{\lambda_0})$ . În acest caz  $E_{\lambda_0}$  este un subspațiu închis. Dacă  $\lambda_0$  nu este valoare proprie atunci

$$T_{\lambda_0} : E \rightarrow E_{\lambda_0}$$

este biunivocă și are un invers mărginit.

*Demonstrație.* Fie  $x$  fix în  $E$  și

$$E_x = \{y, (T - \lambda_0)y = x\}$$

care este evident o mulțime convexă și închisă. Deci are un element de normă minimă notat cu  $x'$ . Să arătăm că există  $M$ , astfel ca

$$\|x'\| \leq M \|x\|,$$

oricare ar fi  $x \in E_{\lambda_0}$ . Să presupunem că nu ar fi așa. Deci există șirul  $\{x_n\}$  astfel ca

$$\|x'_n\| \geq n \|x_n\|$$

și cum avem relația

$$(T - \lambda_0) \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x_n}{\|x'_n\|}$$

șirul  $\left\{ \frac{x_n}{\|x'_n\|} \right\}$  convergînd către 0, deducem că  $\left\{ \frac{x'_n}{\|x'_n\|} \right\}$  conține un subșir convergent către un element  $x'_0$  și deci

$$(T - \lambda_0) x'_0 = 0, \|x'_0\| = 1.$$

În acest caz însă

$$(T - \lambda_0) (x'_n - x'_0 \cdot \|x'_n\|) = x_n$$

și din

$$\|x'_n - x'_0 \cdot \|x'_n\|\| \geq \|x'_n\|,$$

adică

$$\left\| \frac{x'_n}{\|x'_n\|} - x'_0 \right\| \geq 1,$$

care reprezintă o contradicție cu faptul că un subșir al șirului  $\left\{ \frac{x'_n}{\|x'_n\|} \right\}$  converge către  $x'_0$ . Rezultă astfel că există  $M$  cu proprietatea cerută. Să arătăm că acum  $E_{\lambda_0}$  este un subspațiu închis. În adevăr, dacă  $x_n \in E_{\lambda_0}$  și  $\{x_n\} = \{(T - \lambda_0)y_n\}$  este convergent,  $x_n \rightarrow x$ . Cum  $\|x'_n\| \leq M\|x_n\|$  și conform teoremei de mai sus șirul  $\{x'_n\}$  are un subșir  $\{x'_{n_k}\}$  convergent către un element  $x'_0$ . Evident că

$$\lim (T - \lambda_0)x'_{n_k} = x = (T - \lambda_0)x'_0.$$

și prima afirmație a teoremei este demonstrată.

Să presupunem acum că  $\lambda_0$  nu este o valoare proprie și deci

$$T_{\lambda_0} : E \rightarrow E_{\lambda_0}$$

este injectivă, deci  $(T - \lambda_0)^{-1}$  există. Cum

$$\|(T - \lambda_0)^{-1}x\| = \|x'\| \leq M\|x\|$$

rezultă că  $\|(T - \lambda_0)^{-1}\| \leq M$  și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.15.17.** Dacă  $\{e_i\}$  este un șir de elemente ortonormale și

$$Te_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i} e_i + \lambda_k e_k,$$

atunci  $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\lambda_k) = 0$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este așa. Deci există un subșir  $\{\lambda_{k_n}\}$ , astfel că  $|\operatorname{Im} \lambda_{k_n}| \geq \varepsilon$ . Cum avem identitatea

$$T_2 e_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i} e_i + \lambda_k e_k - T_1 e_k$$

și deci pentru  $h < k$  avem

$$\begin{aligned} \|T_2 e_k - T_2 e_h\| &\geq |\langle T_2 e_k - T_2 e_h, e_k \rangle| = \\ &= |\lambda_k - \langle T_1 e_k, e_k \rangle + \langle T_1 e_h, e_k \rangle| \geq |\operatorname{Im}\{\lambda_k - \langle T_1 e_k, e_k \rangle + \\ &+ \langle T_1 e_h, e_k \rangle\}| = |\operatorname{Im} \lambda_k + \operatorname{Im} \langle T_1 e_h, e_k \rangle| \geq |\operatorname{Im} \lambda_k| - \\ &- |\langle T_1 e_h, e_k \rangle|, \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq \|T_2 e_k - T_2 e_h\| + |\langle T_1 e_h, e_k \rangle|$$

și cum membrul drept poate fi făcut oricât de mic rezultă că avem o contradicție și teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă cu ușurință următoarea :

**TEOREMA 1.15.18.** *Dacă  $\lambda_0$  este o valoare proprie pentru  $T$  și  $\text{Im} \lambda_0 \neq 0$  atunci  $E_{\lambda_0} = T_{\lambda_0} E$  este diferit de  $E$ .*

*Demonstrație.* Să presupunem că  $E_{\lambda_0} = E$  și deci există un șir  $\{x_n\}_1^\infty$  astfel ca

$$(T - \lambda_0)x_i = x_{i-1} \text{ cu } x_0 = 0.$$

Să notăm cu  $\{y_n\}$  șirul ortonormal obținut din șirul  $\{x_n\}_1^\infty$ . Deci

$$y_k = \sum_{i=1}^k \beta_{k,i} x_i$$

și

$$(T - \lambda_0) y_k = \sum_{i=2}^k \beta_{k,i} x_{i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i} y_i,$$

de unde rezultă că avem

$$Ty_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i} y_i + \lambda_0 y_k.$$

Din teorema precedentă deducem că  $\text{Im} \lambda_0 = 0$  care este o contradicție, deci  $E_{\lambda_0} \neq E$ . Teorema este demonstrată.

Teoremele următoare dau informații privind structura spectrului unui operator definit pe un spațiu Hilbert cu parte imaginară compactă.

**TEOREMA 1.15.19.** *Orice punct  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im} \lambda \neq 0$  este o valoare proprie.*

*Demonstrație.* Fie  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im} \lambda_0 \neq 0$  și să presupunem că nu este valoare proprie. Știm că  $E_{\lambda_0}$  este un spațiu închis. Dacă  $E_{\lambda_0} = E$  și  $\lambda_0$  nu este valoare proprie atunci  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$  și deci avem o contradicție. Rezultă că trebuie să avem  $E_{\lambda_0} \neq E$ . În acest caz există un element  $x_0$  ortonormal spațiului  $E_{\lambda_0}$ . Deci pentru orice  $x \in E$  avem

$$\langle (T - \lambda_0) x, x_0 \rangle = 0$$

sau că

$$\langle x, (T^* - \bar{\lambda}_0)x_0 \rangle = 0$$

și cum  $x \in E$  arbitrar, rezultă că

$$(T^* - \bar{\lambda}_0)x_0 = 0.$$

Evident că operatorul  $T^*$  este cu parte imaginară compactă și putem aplica teorema de mai înainte. Deci

$$(T^* - \bar{\lambda}_0)E \neq E$$

și  $(T^* - \bar{\lambda}_0)E$  este un subspațiu închis. Exact ca mai sus deducem că există  $y_0$ , astfel ca  $(T - \lambda_0)y_0 = 0$  care este o contradicție. Deci  $\lambda_0$  este o valoare proprie și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.15.20.** *Mulțimea punctelor  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im } \lambda \neq 0$  este finită sau numărabilă și punctele de acumulare se pot afla numai pe axa reală.*

*Demonstrație.* Este suficient să demonstrăm că  $\{\lambda_k\}$  fiind un șir de puncte din  $\sigma(T)$  atunci  $|\text{Im } \lambda_k| \geq \varepsilon$  pentru un  $\varepsilon > 0$  ne dă o contradicție. În adevăr, conform teoremei precedente, fiecare  $\lambda_k$  este o valoare proprie și deci  $Tx_k = \lambda_k x_k$  pentru  $k = 1, 2, 3, \dots$ , evident că sistemul  $\{x_i\}$  este liniar independent. Să construim șirul ortonormal atașat

$$y_k = \sum_{i=1}^k \beta_{k,i} x_i$$

și deci

$$Ty_k = \sum_{i=1}^k \beta_{k,i} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i} y_i + \lambda_k y_k.$$

Din teorema de mai înainte rezultă că  $\text{Im } \lambda_k \rightarrow 0$  și avem astfel o contradicție. Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă informații privind spațiul  $E_{\lambda_0}$ , pentru anumite puncte din  $\sigma(T)$ .

**TEOREMA 1.15.21.** *Dacă  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im } \lambda_0 \neq 0$  atunci spațiul  $E_{\lambda_0}$  este finit dimensional.*

*Demonstrație.* Putem presupune că  $E_{\lambda_0}$  este infinit-dimensional și similar cu raționamentul din teoremele de mai sus ajungem la concluzia că  $\text{Im } \lambda_0 = 0$ , care este o contradicție. Detaliile le lăsăm în seama cititorului.

**TEOREMA 1.15.22.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  și  $\text{Im } T \in K$ , iar  $T$  este nilpotent generalizat atunci  $T$  este în  $K$ .*

*Demonstrație.* În adevăr, să considerăm algebra lui Calkin  $\mathcal{L}(E)/K$ . Evident că  $\hat{T}$  imaginea lui  $T$  în această algebră este un operator hermitic și nilpotent generalizat. Deci este nul. Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.15.23.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  și  $\text{Im } T \in K$ , iar pentru un întreg  $n \geq 1$ ,  $T^n \in K$ . În acest caz  $T \in K$ .*

*Demonstrație.* Fie  $\hat{T}$  ca în teorema de mai sus și care este evident nilpotent. Deci este nul și teorema este demonstrată.

*Observație.* Teoremele acestea sînt utile în teoria subspațiilor invariante pentru operatorii cu parte imaginară compactă într-o clasă  $C_p$ -Neumann-Schatten.

## 15.2 OPERATORI DE TIP RIESZ

Operatorii de tip Riesz sînt operatori definiți pe spații Banach și care posedă o teorie spectrală asemănătoare cu cea pentru operatorii compacți.

Fie  $T \in \mathcal{L}(E)$  unde  $E$  este un spațiu Banach complex și  $(M, N)$  o pereche de subspații închise în  $E$  astfel ca

$$1. \quad M \oplus N = E$$

(adică  $z \in E$ ,  $z = x + y$ ,  $x \in M$ ,  $y \in N$  și descompunerea este unică).

2.  $M$  și  $N$  sînt subspații invariante pentru  $T$  adică oricare ar fi  $x \in M$  și  $y \in N$ ,  $Tx \in M$  și  $Ty \in N$ .

Vom spune că perechea  $(M, N)$  reduce operatorul  $T$  și este evident că această noțiune extinde noțiunea de subspațiu care reduce un operator (adică este invariant pentru  $T$  și  $T^*$ ) definit pe un spațiu Hilbert.

Vom nota cu  $N(T) = \{x, Tx = 0\}$  și  $R(T) = \{Tx, x \in E\}$  și  $\sigma_0(T) = \{\lambda, \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0\}$ .

DEFINIȚIA 1.15.24. Un punct  $\lambda \in \sigma(T)$  se spune că este punct Riesz pentru operatorul  $T$  dacă

$$E = N(T - \lambda) \oplus F(\lambda, T).$$

cu  $\dim N(T - \lambda) < \infty$  și  $F(\lambda, T)$  este un subspațiu închis cu următoarele proprietăți:

( $\alpha$ )  $(T - \lambda I)_{N(T - \lambda)}$  este nilpotent,

( $\beta$ )  $(T - \lambda I)_{F(\lambda, T)}$  este homeomorfism.

Cu ajutorul noțiunii de punct Riesz putem defini noțiunea de operator de tip Riesz.

DEFINIȚIA 1.15.25. Un operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  este operator de tip Riesz dacă orice punct  $\lambda \in \sigma_0(T)$  este punct Riesz pentru  $T$ .

Are loc următoarea:

TEOREMA 1.15.26. Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  și  $\lambda_0$  este un punct Riesz pentru  $T$  atunci  $\lambda_0$  este un punct izolat în  $\sigma(T)$ .

*Demonstrație.* Cum  $E = N(T - \lambda_0 I) \oplus F(\lambda_0, T)$  și  $T = T_1 \oplus T_2$ , unde  $T_1 = T|_{N(T - \lambda_0)}$ ,  $T_2 = T|_{F(\lambda_0, T)}$  și  $I = I_1 \oplus I_2$ ,  $I_1(x) = P_1^* x$  pe spațiul  $N(T - \lambda_0)$  și  $I_2(x) = P_2^* x$  pe  $F(\lambda_0, T)$ . Evident că  $\sigma(T_1) = \{\lambda_0\}$ , iar cum  $T_2 - \lambda_0 I_2$  este un homeomorfism există o vecinătate  $V_{\lambda_0} \ni \lambda_0$  astfel ca  $\sigma(T_2) \cap V_{\lambda_0} = \emptyset$  și deci

$$\sigma(T) = \{\lambda_0\} \cup \sigma(T_2),$$

de unde rezultă că  $\sigma(T) \cap V_{\lambda_0} = \{\lambda_0\}$  și teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat

COROLAR 1.15.27. Dacă  $T \in \mathcal{L}(E)$  și este un operator de tip Riesz, atunci  $\sigma(T)$  este o mulțime cel mult numărabilă cu zero (cel mult) punct de acumulare și dacă  $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$  atunci  $\lambda_0$  este o valoare proprie.

Toate afirmațiile sînt consecințe evidente din teoremă exceptînd ultima. Fie  $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$  și  $C_\varepsilon$  un cerc care conține numai pe  $\lambda_0$  din  $\sigma_0(T)$  și fie

$$P_{\varepsilon, \lambda_0}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} R(\lambda, T) d\lambda$$

care este un proiector și

$$R(P_{\varepsilon, \lambda_0}(T)) = N(T - \lambda_0 I).$$

## 15.3. OPERATORI FREDHOLM

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $K$  un operator compact definit pe  $E$ . Să considerăm operatorul

$$T = I + K.$$

Se poate verifica următoarea proprietate:  $N(T) = \{x, Tx = 0\}$  este un spațiu de dimensiune finită și că  $E/T(E)$  este un spațiu finit dimensional.

Clasa de operatori pe care o studiem este definită tocmai cu aceste proprietăți. Menționăm că operatorii Fredholm au o deosebită importanță în mai multe capitole ale matematicii; noi vom studia aceasta la teoria spectrului Weyl. Vom menționa, așa după cum a arătat Atiyah că operatorii Fredholm pot fi folosiți la definirea grupului  $K(X)$  al lui Grothendieck din geometria algebrică.

Scopul nostru va fi de a expune principalele proprietăți ale operatorilor Fredholm.

Fie  $E, F$  spații Banach și  $\mathcal{L}(E, F)$  spațiul Banach al operatorilor liniari și mărginiți definiți pe  $E$  cu valori în  $F$ .

**DEFINIȚIA 1.15.28.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  se spune că este un operator Fredholm dacă

1.  $\text{Ker } T = \{x, Tx = 0\}$  este finit-dimensional,
2.  $\text{coker } T = F/T(E)$  este finit-dimensional.

Pentru orice element  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  care este de tip Fredholm se poate defini o funcție cu valori numere întregi prin

$$\text{ind } (T) = \dim \ker T - \dim \text{coker } T.$$

Dăm mai întâi câteva rezultate care sînt interesante și în sine.

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $S$  un subspațiu închis al său.

**LEMA 1.15.29.** Dacă  $S$  are una din următoarele proprietăți:

1.  $\dim S < \infty$ ,
2.  $\dim E/S < \infty$ ,

atunci există un subspațiu închis  $T$ , astfel ca

$$E = S \oplus T.$$

adică orice element  $e \in E$  este de forma  $e = s + t$  cu  $s \in S$ ,  $t \in T$  și scrierea este unică și aplicațiile

$$P_S(e) = s,$$

$$P_T(e) = t$$

sînt continue.

Se mai spune că  $S$  admite un complement.

**Demonstrație.** Cum  $S$  este un subspațiu de dimensiune finită, fie

$$\{s_1, \dots, s_n\}$$

o bază a sa și fie  $\{s_i^*\}$  elemente din  $S^*$ , astfel ca

$$s_i^*(s_j) = \delta_{ij}$$

și să aplicăm teorema lui Hahn-Banach-Sobczyk-Bohnenblust ca să obținem funcționalele definite pe  $E$ . Să definim operatorul

$$P: E \rightarrow S$$

prin  $P(x) = \sum_{i=1}^n s_i^*(x) s_i$  care este un operator mărginit și evident că  $\ker P = P^{-1}(0)$  este un subspațiu închis care poate fi luat drept spațiu  $S$ . Teorema este demonstrată în această ipoteză.

Să presupunem acum că  $\text{codim } S = \dim E/S < \infty$ .

Vom face mai întâi câteva observații. Fie  $E$  un spațiu Banach și  $E_1$  un subspațiu al său. Putem defini, în mod obișnuit spațiul vectorial al claselor de echivalență modulo  $E_1$ :  $x_1, x_2$  sînt în aceeași clasă dacă  $x_1 - x_2 \in E_1$ . Să considerăm acum un subspațiu  $S$  arbitrar în  $E$  și să considerăm familiile libere de elemente în  $S$ , adică familii pentru care orice parte finită este liniar independentă. Din lema lui Zorn rezultă că există elemente maximale în mulțimea familiilor libere. Un astfel de element îl vom numi bază a lui  $S$ . Cum spațiul claselor modulo  $E_1$  este un spațiu vectorial, conform celor spuse mai sus există o bază a sa: fie aceasta  $\{\hat{x}_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  o familie de indici. Să luăm pentru fiecare  $i \in I$ , un element  $x_i \in \hat{x}_i$  și relația

$$\sum \alpha_i \hat{x}_i = 0 \Leftrightarrow \sum \alpha_i x_i \in E_1$$

ne arată că familia  $\{x_i\}$  este liberă (liniar independentă), și să luăm spațiul vectorial  $E_2$  generat de această mulțime. Evident că

$$E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

și dacă  $x \in E$ ,  $x$  aparține unei clase,  $\hat{x} = \sum \alpha_i x_i$  de unde rezultă că  $x - \sum \alpha_i x_i \in E_1$ . Punînd  $x - \sum \alpha_i x_i = x_1$  avem că  $x = \sum \alpha_i x_i + x_1 = x_1 + x_2$ , cu  $x_i \in E_i$  și deci putem să enunțăm următoarea:

**LEMA 1.15.30.** *Orice subspațiu  $E_1$  vectorial al unui spațiu  $E$  admite un complement adică există  $E_2$  astfel ca:*

1.  $E_2$  este subspațiu
2.  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
3.  $E_1 + E_2 = E$  adică orice  $x \in E$  admite scrierea  $x = x_1 + x_2$ , cu  $x_i \in E_i$ ;  $i = 1, 2$ .

În legătură cu aceasta putem arăta și:

**LEMA 1.15.31.** *Spațiile  $E_2$  și  $E/E_1$  sînt izomorfe.*

*Demonstrație.* Pentru orice  $x \in E_2$  să definim

$$\varphi(x) = \hat{x}$$

clasa sa modulo  $E_1$ , care are următoarele proprietăți, după cum se poate verifica ușor :

1.  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ,
2.  $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ .

Ca să demonstrăm lema este suficient să demonstrăm că

1.  $\varphi$  este injectivă,
2.  $\varphi$  este surjectivă.

În adevăr, dacă  $x_1 \neq x_2$  atunci și  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ , căci în caz contrar am avea  $\varphi(x_1 - x_2) = 0$  și deci  $x_1 - x_2 \in E_1$  și  $x_1 - x_2 \in E_2$ ; de unde rezultă că  $x_1 = x_2 = 0$ . Deci  $\varphi$  este injectivă. Să arătăm că  $\varphi$  este surjectivă.

În adevăr, avem pentru o clasă  $\hat{x}$  există  $x_2 \in E_2$ , astfel ca

$$\varphi(x_2) = \hat{x},$$

căci oricare ar fi  $x \in \hat{x}$ ,  $x = x_1 + x_2$  cu  $x_1 \in E_1$ , cu  $x - x_2 \in E_1$  și lema este demonstrată.

Să trecem acum la demonstrația lemei 1.15.29. partea a doua. Să considerăm complementarul spațiului  $E_1$  în sensul dat în observațiile de mai sus și cum  $E/E_1$  este finit-dimensional și este izomorf cu complementarul lui  $E_1$  și nu avem decât să aplicăm considerațiile din prima parte.

Lema este astfel demonstrată.

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $E_1$  un subspațiu al său, iar  $E^*$  dualul lui  $E$ . Noi presupunem că  $E_1$  este închis. Prin  $E_1^\perp$  vom însemna mulțimea :

$$\{x^* \in E^*, x^*(x) = 0, \forall x \in E_1\}.$$

Are loc următoarea

LEMA 1.15.32. Dacă  $E_1$  și  $E_2$  sînt spații Banach, iar  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  spațiul Banach al operatorilor mărginiți pe  $E_1$  cu valori în  $E_2$ , iar  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  atunci au loc următoarele afirmații :

1.  $\ker T^* = (TE_1)^\perp$ ,
  2. dacă  $TE_1$  este închis în  $E_2$  atunci  $T^*E_2^* = (\ker T)^\perp$
- și deci  $T^*E_2^*$  este închis în  $E_1^*$ .

Demonstrație. Cum avem relațiile :

$$T^*(l) = 0 \Leftrightarrow \{T^*(l)(x) = 0, \forall x \in E_1\} \Leftrightarrow \{l(Tx) = 0, \forall x \in E_1\} \Leftrightarrow l \in TE_1^\perp$$

și prima afirmație este demonstrată.

Pentru a demonstra afirmația a doua vom remarca faptul că

$$\tilde{T} : E_1/\ker T \rightarrow TE_1$$

este izomorfism. În adevăr, este clar că este o aplicație liniară.

Să arătăm că este surjectivă. În adevăr, pentru orice  $y = Tx$  să luăm clasa elementului  $x$ ,  $\hat{x}$  care ne dă că  $\tilde{T}$  este surjecție. De asemenea

este clar că este și injectivă. Deci conform teoremei aplicației deschise  $\tilde{T}$  este un izomorfism și fie  $S$  inversa lui  $\tilde{T}$

$$S : TE_1 \rightarrow E_1/\ker T.$$

Fie  $\pi$  aplicația canonică

$$\pi : E_1 \rightarrow E_1/\ker T$$

și  $\tilde{l} \in (\ker T)^\perp$  care induce un element în  $(E_1/\ker T)^*$  astfel ca  $\tilde{l} \circ \pi = l$  și

$$S^*\tilde{l} \in (TE_1)^*,$$

care conform teoremei lui Hahn-Banach-Sobczyk-Bohnenblust poate fi prelungită la un element din  $E_2^*$ , notat cu  $l'$ .

Cum  $\tilde{T} \circ \pi = T$  deducem că  $\pi = S\tilde{T}\pi = ST$  și deci avem

$$T^*l'(x) = l'(Tx) = S^*\tilde{l}(Tx) = \tilde{l}(STx) = \tilde{l}(\pi x) = l(x)$$

adică  $Tl' = l$ , de unde rezultă incluziunea

$$(\ker T)^\perp \subseteq T^*(E_2^*).$$

Dacă însă  $l \in T^*E_2^*$  avem  $l = T^*l'$  și deci

$$l(x) = T^*l'(x) = l'(Tx) = 0 \text{ dacă } x \in \ker T,$$

de unde deducem că  $l \in (\ker T)^\perp$  și deci  $T^*E_2^* \subseteq (\ker T)^\perp$ .

Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă ca un corolar următoarea

**TEOREMA 1.15.33.** Fie  $E$  un spațiu Banach și  $E_1$  un subspațiu închis al său; în acest caz  $\pi_{E_1}^*$  este un izomorfism între spațiile

$$(E/E_1)^* \text{ și } E_1^\perp.$$

*Demonstrație.* Aplicația  $\pi_{E_1}$  este aplicația canonică

$$\pi_{E_1} : E \rightarrow E/E_1.$$

Vom observa mai întâi că aplicația  $\pi_{E_1}$  fiind surjectivă, aplicația  $\pi_{E_1}^*$  este de asemenea surjectivă și că  $\pi_{E_1}^*$  este injectivă cu valori în  $(\ker \pi_{E_1})^\perp = E_1^\perp$  care este închis în  $E_1^*$  și din teorema aplicației deschise rezultă afirmația teoremei.

De asemenea are loc :

TEOREMA 1.15.34. Dacă  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  este cu proprietatea că  $TE_1$  este închis și atunci avem relațiile

1.  $\ker T^* \stackrel{\text{izomorf}}{\sim} (E_2/TE_1)^* = (\text{coker } T)^*$ ,
2.  $\ker T^* \stackrel{\text{izomorf}}{\sim} (E_1^*/T^*(E_2^*)) = \text{coker } T^*$ .

*Demonstrație.* Rezultă din lema 1.15.33. și teorema lui Hahn-Banach Bohnenblust-Sobczyk.

Teorema următoare furnizează exemple de operatori Fredholm.

TEOREMA 1.15.35. Dacă  $E$  este un spațiu Banach și  $K$  un operator mărginit și compact atunci operatorul

$$T = I - K$$

este un operator Fredholm.

*Demonstrație.* Cum faptul că  $\ker T$  este finit-dimensional este cunoscut, pentru a demonstra că  $T$  este un operator Fredholm va fi suficient să demonstrăm că

$$\text{coker } T = E/TE$$

este finit-dimensional. Vom remarca mai întâi că în cazul nostru  $TE$  este un subspațiu închis. Cum  $\ker T$  este finit-dimensional putem scrie

$$E = \ker T \oplus W$$

cu  $W$  un subspațiu închis și  $T$  aplică subspațiul  $W$  pe spațiul  $TE$  și  $T$  este injectiv pe  $W$ . Pentru a demonstra că  $TE$  este închis este suficient să demonstrăm că  $(T/W)^{-1}$  este mărginit (continuu). În caz contrar, există un șir  $\{\omega_n\}$  cu următoarele proprietăți :

1.  $\|\omega_n\| = 1$ ,
2.  $T\omega_n \rightarrow 0$ .

Cum  $T = I - K$  cu  $K$  operator compact putem presupune, fără a restrânge generalitatea că

$$K\omega_n \rightarrow x$$

Deci  $T\omega_n = \omega_n - K\omega_n \rightarrow 0$  și deci  $x \in \ker T$  și deci  $x \in \ker T \cap W$ , deci  $x = 0$ . Dar  $\|x\| = \lim \|\omega_n\| = 1$  și avem o contradicție.

Din cele demonstrate mai înainte,

$$(E/TE)^* = \ker T^* = \ker (I - K^*)$$

și cum  $K^*$  este de asemenea un operator compact, rezultă că

$$\text{codim } T = (E/TE)^* < \infty$$

și teorema este demonstrată.

Vom da acum câteva proprietăți importante ale operatorilor Fredholm.

**TEOREMA 1.15.36.** Fie  $E_1, E_2$  două spații Banach și  $T: E_1 \rightarrow E_2$  un operator Fredholm. În acest caz au loc afirmațiile:

1.  $TE_1$  este un subspațiu închis în  $E_2$ ,
2.  $T^*$  este de asemenea de tip Fredholm,
3.  $\text{ind}(T) = -\text{ind}(T^*)$ .

*Demonstrație.* Operatorul  $T$  poate fi reprezentat ca o compunere de doi operatori:

$$h: E_1 \rightarrow E_1/\ker T$$

(scufundarea canonică: oricărui element îi corespunde clasa sa de echivalență în raport cu  $\ker T$ ).

$$S: E_1/\ker T \rightarrow E_2.$$

Descompunerea este de forma  $T = S \circ h$ . Cum subspațiul  $TE_1$  are un complement  $W$  și  $\dim W < \infty$ . Spațiul  $W$  este închis. Dar atunci definind pe spațiul  $E_1 \oplus W$  normat prin

$$\|(e_1, \omega)\| = \|e_1\| + \|\omega\|$$

operatorul  $\tilde{T}$  prin

$$\tilde{T}(e_1, \omega) = Te_1 + \omega,$$

care este un operator continuu și biunivoc, de unde rezultă că este un izomorfism al spațiului  $E_1$  pe  $E_2$ . Cum  $E_1$  este închis în  $E_1 \oplus W$  atunci  $TE_1$  va fi închis în  $E_2$  și prima afirmație este demonstrată.

Cum avem:

$$\dim \ker T^* = \dim E_1/TE_1,$$

$$\dim \ker T = \dim E_1^*/T^*E_2^*,$$

deducem că  $T^*$  este de tip Fredholm și are loc relația 3.

Teorema este demonstrată.

Înainte de a expune alte rezultate vom face câteva observații.

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $\mathcal{L}(E)$  spațiul Banach al operatorilor liniari și continui definiți pe  $E$ , iar  $\mathcal{K}(E)$  idealul bilateral închis al operatorilor compacți definiți pe  $E$ . În acest caz putem considera cîtul  $\mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$  care este o algebră Banach și pentru orice element  $T$  să notăm cu  $\tilde{T}$  imaginea sa în această algebră care se mai numește și algebra lui Calkin a spațiului  $E$ .

Apare în mod natural problema legăturii între elementul  $T \in \mathcal{L}(E)$  și elementul  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ . În cele ce urmează vom expune proprietăți în legătură cu această problemă.

**DEFINIȚIA 1.15.37.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  are operatorul  $Q \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$  ca regularizator la stînga dacă

$$QT = I + K,$$

unde  $K \in \mathcal{K}(E_1)$  și  $I$  este operatorul identitate. De asemenea se spune că  $T$  are operatorul  $Q \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$  ca regularizator la dreapta dacă

$$TQ = I + K,$$

unde  $I$  este operatorul identitate și  $K \in \mathcal{K}(E_2)$ .

Vom observa că demonstrația dată în teorema 1.15.35. poate fi adaptată ușor pentru a demonstra următoarele:

**LEMA 1.15.38.** Dacă  $E_2 = R(T) \oplus W$ ,  $W$  un subspațiu închis, atunci  $R(T)$  este închis.

**LEMA 1.15.39.** Dacă  $E_1$  este un spațiu Banach și

$$E_1 \supset M, N, \quad M \cap N = \{0\}$$

cu  $N, M$  subspații închise atunci  $M \oplus N$  este închis în  $E_1$ .

Are loc următoarea

**TEOREMA 1.15.40.** Fie  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Operatorul  $T$  admite un regularizator la stînga dacă și numai dacă următoarele afirmații sînt adevărate:

1.  $\dim \ker T < \infty$ ,
2.  $R(T) = \{y, y = Tx, x \in E_1\}$  are un complement.

*Demonstrație.* Să arătăm mai întîi că cele două condiții sînt suficiente și să punem  $E_1 = \ker T \oplus M$ ,  $E_2 = R(T) \oplus W$  cu  $M$  și  $W$  subspații închise. Cum restricția lui  $T$  la  $M$ ,  $T/M$  este un operator închis și injectiv cu proprietatea că  $R(T/M) = R(T)$ . Operatorul  $T/M^{-1}$  există și  $Q = T/M^{-1} \circ P$ , unde  $P$  este proiecția lui  $E_2$  pe  $R(T)$  are proprietatea că  $QT = I$  pe  $M$  și cum  $R(QT - I) \subset \ker T$ , operatorul  $QT - I$  este compact deoarece valorile sale sînt într-un spațiu finit-dimensional și evident

$$QT = I + K,$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Să arătăm că cele două condiții sînt necesare. Cum avem relația

$$\ker T \subset \ker (QT); \quad \dim \ker (QT) < \infty$$

rezultă că  $\dim \ker T < \infty$  și 1 este demonstrată. Să arătăm acum că și a doua relație este adevărată.

Fie  $E_2^1 = R(T) \cap \ker Q$  care este un subspațiu finit-dimensional și cum  $T$  are proprietatea că  $T(\ker QT) = E_2^1$ .

Punînd

$$Y_0 = R(T) + \ker (Q) = \{x + y, x \in R(T), y \in \ker (Q)\}$$

avem că  $Q(Y_0) = R(QT)$  este închis deoarece  $\dim E_2/(QT)E_1 < \infty$ .

Însă  $Q$  este un operator mărginit și deci  $Y_0$  este închis (ca preimagine). Să considerăm  $X_2$  un subspațiu închis din  $\ker(Q)$  astfel ca

$$\ker(Q) = X_1 \oplus X_2$$

și atunci  $Y_0 = R(T) \oplus X_2$ . Dacă  $X_3$  este complementul în sensul dat în lema 1.15.31, al subspațiului  $Y_0$  în  $E_2$ , cum avem

$$\ker(Q) \subset Y_0, \quad E_2 = Y_0 \oplus X_3$$

deducem că  $Q$  este o aplicație injectivă pe  $X_3$  și

$$Q(E_2) = Q(Y_0) \oplus Q(X_3) = R(QT) \oplus Q(X_3)$$

de unde, din  $\dim E_2/(QT)E_1 < \infty$  ne dă că  $\dim Q(X_3) < \infty$  și deci  $X_3$

este complement topologic. Dar atunci  $X_2 \oplus X_3$  este un subspațiu închis și  $E_2 = R(T) \oplus (X_2 \oplus X_3)$  care arată că  $R(T)$  este închis și are complement topologic.

Teorema este astfel demonstrată.

În legătură cu rezultatul obținut în această teoremă vom menționa o conjectură a lui Mikhlin și anume: dacă un operator  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  admite un regularizator la stînga atunci  $\dim \ker T < \infty$  și  $R(T)$  este închis, atunci aceste proprietăți sînt necesare și suficiente pentru existența regularizatorului la stînga.

Pentru a arăta că afirmația lui Mikhlin este falsă, să considerăm un spațiu Banach  $X$  și un subspațiu  $X_1$  al său care nu are complement și să definim  $T: X_1 \rightarrow X$  prin:

$$1. \quad T(x) = x$$

care are proprietatea că

$$1. \quad \dim \ker T = 0,$$

$$2. \quad R(T) = X_1 \text{ este închis}$$

și conform teoremei de mai înainte nu are regularizator la stînga. Vom menționa acum un exemplu de spațiu cu proprietatea de a nu avea complement.

Să considerăm

$$X = \left\{ f, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

și  $X_1 = \{f, f \in X, \text{coeficienții Fourier sînt zero pentru indice negativ}\}.$

Este un rezultat celebru al lui D.J. Newman că perechea  $(X, X_1)$  are proprietatea dată în exemplul de mai înainte. Vom menționa de asemenea că W. Rudin a generalizat rezultatul lui Newman pentru o clasă de grupuri abeliene local compacte.

Vom menționa de asemenea că afirmația lui Mikhlin este adevărată dacă avem operatori definiți pe spații Hilbert, deoarece, după cum este cunoscut, orice subspațiu închis admite un complement (ortogonal).

Următoarea teoremă dă condiții necesare și suficiente pentru ca un operator  $T$  să aibă regularizator la dreapta.

**TEOREMA 1.15.41.** *Fie  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Operatorul  $T$  admite un regularizator la dreapta dacă și numai dacă următoarele condiții sînt satisfăcute :*

1.  $\dim \text{coker } T = \dim E_2/TE_1 < \infty$ ,
2.  $\ker T$  are un complement topologic.

*Demonstrația* acestei teoreme este asemănătoare cu demonstrația teoremei 1.15.40. și din această cauză o vom da pe scurt.

Fie  $E_1 = \ker T \oplus M$ ,  $E_2 = R(T) \oplus W$ , spațiile  $M$  și  $W$  sînt cu proprietățile :  $M$  este închis, iar  $W$  are  $\dim < \infty$ . Să considerăm restricția lui  $T$ ,  $T/M$  la subspațiul  $M$  și fie  $P$  proiecția lui  $E_2$  pe  $R(T)$ . Operatorul  $Q = T/M^{-1} \circ P : E_2 \rightarrow M$  și este surjectiv. De asemenea, avem că

$$TQ = I \text{ pe } R(T),$$

$$R(TQ - I) \subset W,$$

care arată că  $TQ = I + K$ , unde  $K$  este compact și  $Q$  este un regularizator la dreapta. Rezultă că cele două condiții puse sînt suficiente.

Vom observa că are loc o afirmație mai generală și anume : dacă  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ,  $S \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$  sînt astfel ca  $ST$  este un operator Fredholm atunci

1.  $\dim \text{coker } S < \infty$ ,
2.  $\ker S$  are un complement topologic.

În adevăr, să luăm

$X_1 = R(T) \cap \ker Q$  și din teorema 1.15.40. rezultă că  $X_1$  este finit-dimensional și că  $Y_0 = R(T) + \ker Q$  este închis. Fie  $X_2$  din  $R(T)$  astfel ca  $R(T) = X_1 \oplus X_2$  ( $X_2$  este deci închis), și atunci  $Y_0 = \ker Q \oplus X_2$ . Dacă  $X_3$  este complementul algebric al lui  $Y_0$  în  $E_2$ , cum  $\ker Q \subset Y_0$ , rezultă că operatorul  $Q$  este injectiv pe  $X_3$  și

$$Q(E_2) = Q(Y_0) \oplus Q(X_3) = R(QT) \oplus Q(X_3).$$

Cum  $\dim \text{coker } QT < \infty$  spațiile  $Q(X_3)$  și  $X_3$  sînt finit-dimensionale și deci  $X_2 \oplus X_3$  este închis. Rezultă că  $\ker Q$  are un complement topologic. Să arătăm că  $\dim \text{coker } Q < \infty$ , care rezultă din

$$R(Q) \supset R(QT)$$

$$E_2/R(Q) \subset E_2/R(QT)$$

și teorema este demonstrată.

Din teoremele de mai sus rezultă o caracterizare importantă a operatorilor Fredholm dată de Atkinson.

**TEOREMA 1.15.42.** *Un operator  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  este de tip Fredholm dacă și numai dacă  $\bar{T}$  este invertibil în algebra lui Calkin.*

De asemenea demonstrațiile date teoremelor 1.15.40. și 1.15.41. arată că este adevărată și următoarea:

**TEOREMA 1.15.43.** *Dacă avem operatorii  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ,  $S \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$  și  $K = ST \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$  și astfel ca doi operatori sînt de tip Fredholm atunci și cel de al treilea este de tip Fredholm și  $\text{ind}(ST) = \text{ind } T + \text{ind } S$ .*

#### 15.4.a-CONTRACTII LINIARE MĂSURĂ DE NECOMPACITATE

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $M$  o mulțime mărginită în  $E$ . Pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  să considerăm mulțimi deschise care conțin punctele mulțimii  $M$  și al căror diametru să nu fie mai mare decît  $\varepsilon$ . Evident că dacă presupunem mulțimea  $M$  compactă există un număr finit de astfel de mulțimi care o acoperă, adică fiecare element din  $M$  este conținut într-o astfel de mulțime. Se poate arăta că are loc și afirmația reciprocă. Deducem că pentru mulțimile compacte

$\alpha = \inf \varepsilon$ , există un număr finit de mulțimi deschise cu diametrul  $\leq \varepsilon$ , care acoperă pe  $M$ , este zero. Aceasta sugerează considerarea unui număr care să indice cît de mult o mulțime diferă de o mulțime compactă.

Ideea de a considera acest număr este datorată lui Kuratowski și numărul respectiv se numește astăzi, numărul lui Kuratowski.

**DEFINIȚIA 1.15.44.** Dacă  $M$  este o mulțime mărginită în spațiul Banach  $E$ , numărul lui Kuratowski  $\alpha(M)$  al acestei mulțimi este prin definiție

$$\alpha(M) = \inf_{\varepsilon > 0} \{ \varepsilon, \text{există o descompunere a mulțimii}$$

$M$  în submulțimi cu diametrul  $\leq \varepsilon \}$ .

Au loc următoarele proprietăți:

1.  $0 \leq \alpha(M) \leq \text{diam } M$ .
2.  $\alpha(M_1 \cup M_2) \leq \max \{ \alpha(M_1), \alpha(M_2) \}$
3.  $\alpha(M) = 0$  dacă și numai dacă  $\bar{M} = \text{înciderea lui } M \text{ este o mulțime compactă}$
4. dacă  $M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \text{ cu } m_i \in M_i\}$  atunci

$$\alpha(M_1 + M_2) \leq \alpha(M_1) + \alpha(M_2)$$

5. dacă  $M_1 \subset M_2$ ; atunci  $\alpha(M_1) \leq \alpha(M_2)$ .

Pentru un spațiu Banach se mai pot introduce alte două numere care să conțină informații privind sfera unitate.

Fie  $S(E) = \{x, \|x\| = 1\}$  și pentru orice  $\varepsilon > 0$  să considerăm  $\varepsilon$ -rețele pentru  $S$ , adică o mulțime de puncte  $F$  astfel ca pentru fiecare  $s \in S$  există  $t \in F$ , astfel ca  $\|s - t\| \leq \varepsilon$ . Să definim  $A = \{a \geq 0$ ; pentru fiecare  $\varepsilon > a$ ,  $S(E)$  are o  $\varepsilon$ -rețea finită} și să definim

$$T(E) = \inf_{\alpha \in A} \alpha.$$

Se poate arăta că numărul  $T(E)$  astfel introdus posedă următoarele proprietăți:

1. dacă  $E$  este finit-dimensional atunci  $T(E) = 0$ ,
2. dacă  $E$  este infinit-dimensional  $1 \leq T(E) \leq 2$ ,
3. pentru orice  $t \in [1, 2]$  există un spațiu Banach  $E_t$  astfel ca:

$$T(E_t) = t.$$

Un alt număr legat de sfera unitate se poate introduce și în modul următor:  $t(E)$  este prin definiție  $\inf \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  astfel că pentru  $s_1, \dots, s_n$  în  $S(E)$  există  $s \in S(E)$ , astfel ca:

$$\max \|s - s_i\| < t(E) + \varepsilon.$$

Proprietățile numărului  $t(E)$  sînt următoarele:

1. dacă  $E$  este finit dimensional atunci  $t(E) = 2$ ,
2. pentru orice  $E$ ,  $t(E) \in [1, 2]$ ,
3. pentru orice  $t_0 \in [1, 2]$  există  $E_{t_0}$  astfel ca  $t(E_{t_0}) = t_0$ .

Aceste numere au fost introduse și studiate de R. J. Whitley în legătură cu problema legăturii între noțiunea de izometrie și aproape izometrie considerată de S. Banach.

### 15.5. NOȚIUNEA DE $\alpha$ -CONTRACȚIE

**DEFINIȚIA 1.15.45.** Un operator  $T$  liniar și mărginit pe  $E$  se va numi  $\alpha$ -contracție, dacă există  $k \in [0, 1)$  astfel ca pentru orice mulțime mărginită  $M$  să avem

$$\alpha(TM) \leq k \alpha(M),$$

unde  $TM = \{y, y = Tx, x \in M\}$ .

**DEFINIȚIA 1.15.46.** Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contracție atunci

$$\inf \{h, \alpha(TM) \leq h \alpha(M)\}$$

se notează  $h_T$  și se numește modulul  $\alpha$ -contracției.

*Exemple.* Orice operator compact este o  $\alpha$ -contracție și de asemenea orice contracție este o  $\alpha$ -contracție. Mai mult dacă  $T$  este un operator cu  $\|T\| < 1$  și  $K$  este un operator compact atunci operatorul  $S = T + K$  este o  $\alpha$ -contracție. De asemenea dacă  $T$  și  $S$  sînt  $\alpha$ -contracții atunci  $TS$  și  $ST$  sînt  $\alpha$ -contracții și  $h_{TS} < h_T \cdot h_S$  și de asemenea  $h_{ST} < h_S \cdot h_T$ .

Este natural, în virtutea exemplelor citate mai sus, să ne punem problema dacă proprietăți ale operatorilor compacți nu sînt adevărate și pentru operatori care sînt  $\alpha$ -contracții. În cele ce urmează vom prezenta câteva rezultate în acest sens.

**TEOREMA 1.15.47.** Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contracție atunci mulțimea valorilor proprii ale lui  $T$  cu modulul  $\geq 1$  este finită.

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este așa și fie  $\{\lambda_n\}$  o infinitate de valori proprii pentru  $T$  cu modulul  $\geq 1$ , iar pentru fiecare  $\lambda_n$  un element propriu  $x_n$ . Să considerăm pentru fiecare  $n$ , subspațiul generat de  $x_1, \dots, x_n$  pe care să-l notăm cu  $\mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$  și cum putem presupune sistemul  $\{x_1, \dots, x_n\}$  liniar independent,  $\mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$  este un spațiu propriu pentru  $\mathcal{V}(x_1, \dots, x_{n+1})$  oricare ar fi  $n$ . Conform lemei lui Riesz, există  $y_n \in \mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$ , astfel ca

1.  $\|y_n\| = 1$ ,
2.  $\|y_n - x\| \geq 1/2; \forall x \in \mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$ .

Cum  $y_n$  este de forma  $y_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  avem

$$T^v y_n = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^v x_i$$

și deci

$$T^v y_n - \lambda_n^v y_n \in \mathcal{V}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dacă  $n > m$  avem

$$Z_{n,m} = y_n - \lambda_n^{-v} T^v y_n + \lambda_m^{-v} T^v y_m \in \mathcal{V}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

și deci avem relația

$$(*) \left\| T^v \left( \frac{y_n}{\lambda_n^v} \right) - T^v \left( \frac{y_m}{\lambda_m^v} \right) \right\| = \|y_n - Z_{n,m}\| \geq 1/2.$$

Fie acum  $\delta < 1/2$  și  $v$  un număr astfel ca  $h_T^v \alpha(\tilde{S}(E)) < \delta$  și cum  $G = \{\lambda_n^{-v} y_n\}$  avem că  $G \subset \tilde{S}$  și deci  $\alpha(G) < \alpha(\tilde{S})$  și cum  $T$  este o  $\alpha$ -contrație avem că :

$$\alpha(T^v(G)) \leq h_T^v \alpha(G) \leq h_T^v \alpha(S) < \delta$$

care contrazice (\*) după cum am ales pe  $\delta$ . Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.15.48.** Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contrație și  $\lambda$  este un număr complex, astfel ca  $|\lambda| \geq 1$ , iar  $\{x_n\}$  este un șir mărginit, astfel ca

$$\lambda x_n - T x_n = y_n$$

cu  $y_n \rightarrow y$  atunci există  $x_n$  astfel ca  $\lim x_{n_k} = x$  și  $\lambda x - T x = y$ .

*Demonstrație.* Este suficient să demonstrăm că  $\{x_n\}$  este o mulțime cu  $\alpha(\{x_n\}) = 0$ . Fie  $M = \{x_n\}$  și  $N = \{y_n\}$  de unde rezultă că :

$$M \subseteq \frac{1}{\lambda} T M + \frac{1}{\lambda} N,$$

care ne dă

$$\alpha(M) \leq \frac{1}{|\lambda|} \alpha(TM)$$

și cum  $|\lambda| \geq 1$ , ne dă că  $\alpha(M) = 0$ . Teorema este demonstrată. Din această teoremă rezultă următoarea:

**TEOREMA 1.15.49.** *Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contracție și  $\lambda$  nu este o valoare proprie pentru  $T$ , iar  $|\lambda| \geq 1$  atunci  $(\lambda I - T)E$  este o mulțime închisă.*

*Demonstrație.* Fie  $y_n \in (\lambda I - T)E$  și  $y_n \rightarrow y$ , iar  $x_n \in E$  astfel ca:

$$y_n = (T - \lambda I)x_n.$$

Dacă  $\{x_n\}$  este nemărginit șirul  $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$  are proprietatea că:

1.  $\|z_n\| = 1$ ,
2.  $Tz_n - \lambda z_n \rightarrow 0$

și conform teoremei de mai înainte rezultă că ar exista  $z$  astfel ca:

1.  $\lim z_{n_k} = z$ ,
2.  $Tz = \lambda z$ ,

care este o contradicție. Deci  $\{x_n\}$  este mărginit și deci există  $\{x_{n_k}\}$  astfel ca:

1.  $\lim x_{n_k} = x$ ,
2.  $Tx - \lambda x = y$

și afirmația este demonstrată.

De asemenea are loc:

**TEOREMA 1.15.50.** *Dacă  $|\lambda| \geq 1$  nu este o valoare proprie pentru  $\alpha$ -contracția  $T$  atunci  $(\lambda I - T)^{-1}: (\lambda I - T)E \rightarrow E$  este un operator liniar și mărginit.*

*Demonstrație.* Rezultă din teoremele 1.15.48 și 1.15.49.

**TEOREMA 1.15.51.** *Fie  $T$  o  $\alpha$ -contracție și  $\lambda_n \in \rho(T)$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  cu  $\lambda$  un număr complex care nu este valoare proprie pentru  $T$  și  $|\lambda| \geq 1$ . În acest caz:*

$$\{\|(\lambda_n - T)^{-1}\|\} = \{a_n\}$$

*este un șir mărginit.*

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este așa. Din definiția normei unui operator rezultă că pentru  $\delta > 0$  fixat și fiecare  $n$  există  $y_n$ ,  $\|y_n\| = 1$  astfel ca să avem

$$\|(\lambda_n - T)^{-1} y_n\| \geq a_n - \delta.$$

Să considerăm șirul

$$v_n = \frac{1}{\|(\lambda_n - T)^{-1} y_n\|} (\lambda_n - T)^{-1} y_n$$

care are proprietatea că

$$\lambda_n v_n - T v_n = \omega_n, \quad \|v_n\| = 1, \quad \omega_n \rightarrow 0$$

și dacă punem

$$z_n = [(\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1}) T v_n + \lambda_n^{-1} \omega_n]$$

deducem că au loc relațiile :

$$1. z_n \rightarrow 0$$

$$2. \lambda v_n - T v_n = z_n$$

și deci există, conform teoremei 1.15.48, un subșir  $v_{n_k} \rightarrow v$  și avem

$$\lambda v - T v = 0,$$

adică o contracție și teorema este demonstrată.

Din această teoremă putem deduce informații privind partea din spectru situată în afara cercului unitate. Acestea sînt date în

**TEOREMA 1.15.52.** *Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contracție atunci :*

$$\sigma \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$$

*este formată numai din valori proprii.*

*Demonstrație.* Fie  $\Sigma$  complementara mulțimii valorilor proprii din  $\{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$  și  $\Sigma' = \Sigma \cap \rho(T)$ , iar  $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$  și pentru a demonstra teorema va fi suficient să demonstrăm că  $\Sigma'' = \emptyset$  (mulțimea vidă). Cum  $\Sigma$  este o mulțime deschisă și de asemenea  $\Sigma'$ , dacă  $\Sigma''$  nu este vidă, există  $\lambda_n \in \Sigma'$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , și aplicînd teorema de mai sus deducem că  $\lambda$  este un punct din  $\rho(T)$  care este o contradicție. Deci  $\Sigma'' = \emptyset$  și teorema este demonstrată.

Rezultatele obținute pînă acum permit să afirmăm că are loc :

**TEOREMA 1.15.53.** *Pentru orice operator  $T$  care este o  $\alpha$ -contracție*

$$\sigma(T) \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$$

*este o mulțime finită, și dacă  $S$  are proprietatea că pentru un întreg  $m$ ,  $S^m$  este o  $\alpha$ -contracție*

$$\sigma(S) \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$$

*este de asemenea finită.*

Pentru partea a doua este suficient să ținem seama de relația

$$(\sigma(S))^m = \sigma(S^m)$$

valabilă pentru orice întreg  $m$ .

**TEOREMA 1.15.54.** *Dacă  $T$  este o  $\alpha$ -contracție atunci*

$$\ker(I - T) = \{x, Tx = x\}$$

*este un spațiu finit dimensional.*

Este ușor de văzut că sfera unitate a acestui spațiu este compactă, căci

$$\alpha(S) = \alpha(TS) \leq h \alpha(S),$$

care este posibilă decât dacă  $\alpha(S) = 0$  și să aplicăm teorema cunoscută că un spațiu Banach este finit-dimensional dacă și numai dacă sfera sa unitate este compactă.

Rezultă astfel că operatorii care sînt  $\alpha$ -contractii posedă multe proprietăți asemănătoare celor de la operatorii compacți sau operatorii cu partea imaginară compactă (pe spații Hilbert sau operatori decompozabili pe spații Banach \*).

## § 16. ALGEBRE BANACH

DEFINIȚIA 1.16.1. Prin algebră Banach  $A$  vom înțelege un spațiu Banach complex și care posedă următoarele proprietăți:

1.  $A$  este un inel,
2.  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ ,

oricare ar fi  $x, y \in A$  și  $\alpha$  număr complex,

3.  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ .

Algebra  $A$  se spune că are unitate dacă există  $e \in A$  astfel încît  $ex = xe = x$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

LEMA 1.16.2. Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate  $e$  atunci

$$\|e\| \geq 1.$$

*Demonstrație.* Avem evident

$$e^2 = e = ee$$

și deci  $\|e\| \leq \|e\| \|e\| \Rightarrow \|e\| \geq 1$ .

LEMA 1.16.3. Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate atunci există o normă  $\|\cdot\|_1$  pe  $A$  echivalentă cu norma inițială astfel ca:

1.  $(A, \|\cdot\|, \|\cdot\|_1)$  este o algebră Banach
2.  $\|e\|_1 = 1$ .

*Demonstrație.* Pentru aceasta vom considera algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $A$ ,  $\mathcal{L}(A)$ . Pentru orice  $a \in A$  vom considera operatorul

$$T_a(x) = ax,$$

\*) Un operator mărginit  $T$  pe un spațiu Banach se spune că este decompozabil dacă  $T = T_1 + iT_2$ , unde  $T_i$  sînt operatori mărginiți și hermitieni.

care are proprietatea că este liniar și continuu, deoarece

$$\|T_a\| \leq \|a\|$$

și să notăm cu  $\mathcal{L}_A$  mulțimea acestor operatori.

Evident că  $\mathcal{L}_A$  este un spațiu vectorial și mai mult este un spațiu Banach care conține operatorul identitate  $I_e$ . Produsul a doi operatori  $T_a$  și  $T_b$  este

$$(T_a)(T_b x) = T_a(bx) = T_{ab}x = T_{ab}(x)$$

și deci este un element din  $\mathcal{L}_A$ .

Pentru orice element  $a \in A$ , să punem

$$\|a\|_1 = \|T_a\|$$

și să arătăm că această normă verifică condițiile lemei.

În adevăr am văzut că  $\|T_a\| \leq \|a\|$ . Cum însă

$$\|T_a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ax\| \geq \sup_{\|x\| \leq \|e\|} \|ax\| \cdot \|e\|^{-1} > \|e\|^{-1} \|a\|$$

și deci cele două norme sînt echivalente

$$\|e\|^{-1} \|a\| \leq \|T_a\| = \|x\|_1 \leq \|a\|.$$

Lema este demonstrată.

Această leamă ne permite să presupunem că orice algebră Banach cu unitate are norma elementului unitate egală cu 1.

**LEMA 1.16.4.** Într-o algebră Banach operația de înmulțire este continuă.

*Demonstrație.* Rezultă imediat din identitatea

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + x_0(y - y_0) + y_0(x - x_0).$$

**DEFINIȚIA 1.16.5.** Se spune că elementul  $a$  în algebra Banach  $A$  cu unitate  $e$  are invers dacă există elementul  $x^{-1}$  astfel ca

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Putem demonstra următoarea:

**LEMA 1.16.6.** Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate  $e$ , atunci următoarele două afirmații sînt adevărate:

1°. dacă  $x \in A$ ,  $\|x - e\| < 1$ , atunci  $x^{-1}$  există,

2°. dacă  $|\lambda| > \|x\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  corpul numerelor complexe atunci  $x - \lambda e = x - \lambda$  are invers.

*Demonstrație.* Să considerăm, pentru a demonstra 1°, seria

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots + (e - x)^n + \dots$$

care este convergentă, deoarece

$$\|(e - x)^n\| \leq (\|e - x\|)^n = q^n$$

unde  $q = \|e - x\| < 1$ . Deci există suma seriei și să notăm suma aceasta cu  $x^{-1}$ . În acest caz, înmulțind seria cu

$$x = e - (e - x),$$

avem

$$e + (e - x) + \dots + (e - x)^n + \dots + [-(e - x) - (e - x)^2 - \dots - (e - x)^{n+1} - \dots] = e$$

și 1° este demonstrată. Pentru a demonstra 2° se observă că

$$(x - \lambda) = \lambda \left( \frac{1}{\lambda} x - e \right)$$

și cum  $\lambda \neq 0$  avem

$$\left\| e - \frac{1}{\lambda} x - e \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|x\| < 1$$

de unde conform cu 1°,  $e - \frac{1}{\lambda} x = -\left(\frac{1}{\lambda} x - e\right)$  are invers. Deci și  $\frac{1}{\lambda} x - e$  are invers de unde și afirmația 2°.

Pentru orice algebră Banach  $A$  cu unitate prin  $A^{-1}$  se notează mulțimea elementelor invertibile. Are loc:

**LEMA 1.16.7.** *Mulțimea  $A^{-1}$  este deschisă în  $A$ .*

*Demonstrație.* Din lema 1.16.4. rezultă că există o vecinătate  $V(x)$ , dacă  $x$  este elementul din  $A$  pentru care  $x^{-1}$  există și o vecinătate  $W(e)$  a lui  $e$  astfel ca

$$zx^{-1} \in W(e),$$

oricare ar fi  $z \in V(x)$ . Putem presupune că  $W(e)$  este de forma

$$W(e) = \{\xi, \|\xi - e\| < 1\}.$$

În acest mod, pentru orice  $z$ , cu  $zx^{-1} \in W(e)$ ,  $zx^{-1}$  are invers de unde rezultă imediat că  $z$  are invers. Deci  $W(e) \subset A^{-1}$  ceea ce demonstrează afirmația noastră.

LEMA 1.16.8. *Funcția definită pe  $A^{-1}$  prin*

$$x \rightarrow x^{-1}$$

*este continuă.*

*Demonstrație.* Fie  $\{x_n\} \subset A^{-1}$  și  $x_n \rightarrow x$ . Trebuie să arătăm că  $x_n^{-1} \rightarrow x^{-1}$ . Evident că

$$x^{-1}x_n \rightarrow e$$

și cum  $(x^{-1}x_n)^{-1} = e + (e - x^{-1}x_n) + \dots + (e - x^{-1}x_n)^m + \dots$  și trebuie arătat numai că seria este convergentă, ceea ce rezultă din

$$x^{-1}x_n \rightarrow e,$$

deoarece există  $N$  astfel ca

$$\|x^{-1}x_n - e\| < q < 1,$$

oricare ar fi  $n \geq N$ . Deducem că

$$e - x_n^{-1}x = -(e - x^{-1}x_n) - (e - x^{-1}x_n)^2 - \dots - (e - x^{-1}x_n)^m - \dots$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} \|e - x_n^{-1}x\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|(e - x^{-1}x_n)^m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|e - x^{-1}x_n\|^m < \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \|x^{-1}\|^m \|x - x_n\|^m \end{aligned}$$

și alegînd  $N$  astfel ca pentru orice  $n \geq N$ ,  $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$  obținem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{-1}x = e.$$

De aici rezultă că  $\lim_n x_n^{-1} = x^{-1}$ .

Pentru cele ce urmează vom avea nevoie de cîteva rezultate privind funcțiile analitice cu valori într-o algebră Banach.

DEFINIȚIA 1.16.9. Fie  $D$  un domeniu în plan și

$$f: D \rightarrow A$$

unde  $A$  este o algebră Banach cu unitate. Se spune că funcția  $f$  este analitică în  $D$  dacă pentru orice  $z_0 \in D$  avem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

există și o notăm cu  $f'(z_0)$ .

Dacă  $A$  este o algebră Banach și  $A^*$  spațiul Banach dual, iar  $a^* \in A^*$  atunci se verifică imediat că funcția complexă

$$a^*(f) : D \rightarrow \mathbb{C}$$

definită în mod natural ca fiind

$$a^*(f)(z) = a^*(f(z))$$

este analitică și

$$[a^*(f)]'(z_0) = a^*(f'(z_0)).$$

Cu ajutorul teoremelor de prelungire obținem imediat:

**LEMA 1.16.10.** *Dacă  $f$  este o funcție definită pe planul complex cu valori în  $A$  cu proprietățile următoare:*

1. *analitică,*
2. *există  $M$ ,  $\|f(z)\| \leq M < \infty$ ,  $z$  în plan atunci  $f$  este o constantă, adică există  $a_0 \in A$ , astfel ca*

$$f(z) = a_0.$$

*Demonstrație.* Conform observației de mai sus pentru orice  $a^* \in A^*$ , funcția  $a^*(f(z))$  este analitică și mărginită în tot planul. Deci conform teoremei lui Liouville pentru orice  $a^* \in A^*$  avem

$$a^*(f(z)) = a^*(f(z_0))$$

și deci trebuie să avem

$$f(z) = f(z_0) = a_0.$$

Lema este astfel demonstrată.

Fie acum  $A$  o algebră Banach cu unitate  $e$  și  $x$  un element arbitrar în  $A$ . Să presupunem că pentru numerele complexe  $\xi$  și  $\eta$  există inversele elementelor  $x - \xi$  și  $x - \eta$ . Vom nota

$$(x - \xi)^{-1} = R_\xi(x), \quad (x - \eta)^{-1} = R_\eta(\xi).$$

Are loc următoarea :

Lema 1.16.11.  $R_\eta(x) - R_\xi(x) = (\eta - \xi)R_\xi R_\eta$ .

*Demonstrație.* Avem

$$\begin{aligned} R_\xi^{-1}R_\eta &= (x - \xi)(x - \eta)^{-1} = (x - \eta e + (\eta - \xi)e)(x - \eta)^{-1} = \\ &= e + (\eta - \xi)(x - \eta)^{-1} = e + (\eta - \xi)R_\eta \end{aligned}$$

și deci

$$R_\eta = R_\xi + (\eta - \xi)R_\xi R_\eta$$

ceea ce demonstrează afirmația.

**DEFINIȚIA 1.16.12.** Fie  $x$  un element arbitrar într-o algebră Banach  $A$  cu unitate. Un punct  $\xi$  din planul complex se spune că este regulat în raport cu  $x$  dacă elementul  $x - \xi e = x - \xi$  are invers.

**LEMA 1.16.13.** Mulțimea punctelor regulate în raport cu elementul  $x \in A$  este deschisă.

*Demonstrație.* Rezultă din 1.16.6. În adevăr, fie  $\lambda_0$  pentru care  $(x - \lambda_0)^{-1}$  există. Să luăm  $\lambda$ , astfel ca

$$|\lambda - \lambda_0| \frac{1}{2\|(x - \lambda_0)^{-1}\|} < 1$$

și să considerăm seria

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1} \left[ e + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m (x - \lambda_0)^{-m} \right],$$

care definește un element din  $A$ , deoarece

$$\|(\lambda - \lambda_0)^m (x - \lambda_0)^{-m}\| \leq 1/2^m; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Înmulțind cu  $(x - \lambda e) = x - \lambda$  avem

$$x - \lambda = (x - \lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda) = (x - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)$$

care ne dă

$$e + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m (x - \lambda_0)^{-m} - \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m (x - \lambda_0)^{-m} = e$$

și afirmația este demonstrată.

**DEFINIȚIE 1.16.14.** Mulțimea punctelor regulate în raport cu  $x \in A$  se mai numește și mulțimea rezolvată a lui  $x$  și se notează cu  $\rho(x)$ .

LEMA 1.16.15. Pentru orice  $x \in A$ , funcția

$$\lambda \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$$

definită pe  $\rho(x)$  cu valori în  $A$  este analitică.

*Demonstrație.* Conform lemei 1.16.11 pentru orice  $\lambda$  și  $\lambda_0$  în  $\rho(x)$  avem

$$\frac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = R_\lambda R_{\lambda_0}$$

și pentru  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , din lema 1.16.10 rezultă că

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda_0}^2$$

și lema este demonstrată.

Următoarea leamnă ne dă informații asupra mulțimii  $\rho(x)$ .

LEMA 1.16.16. Pentru orice  $x \in A$  să notăm  $\sigma(x) = C_{\rho(x)} =$  complementara mulțimii  $\rho(x)$  și să o numim spectrul elementului  $x$ . Mulțimea  $\sigma(x)$  nu este vidă.

*Demonstrație.* Să presupunem că  $\sigma(x)$  este vidă și deci funcția

$$\lambda \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$$

este analitică în tot planul. Mai trebuie să arătăm că este mărginită. Pentru aceasta este suficient să studiem comportarea pentru  $\lambda \rightarrow \infty$ . Cum

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left( e - \frac{1}{\lambda} x \right) = e,$$

rezultă că

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left( e - \frac{1}{\lambda} x \right)^{-1} = e$$

și deci

$$(*) \quad \|(x - \lambda e)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left( e - \frac{1}{\lambda} x \right)^{-1} \right\| \rightarrow 0,$$

pentru  $|\lambda| \rightarrow \infty$  ceea ce arată că funcția

$$\lambda \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$$

este mărginită în tot planul. Deci este o constantă care din (\*) rezultă

că trebuie să fie elementul zero. Deci

$$x - \lambda e = 0$$

ceea ce este absurd și lema este demonstrată.

Din lema 1.16.16 rezultă următorul rezultat celebru datorat lui Mazur și Gelfand.

**LEMA 1.16.17.** (Mazur - Gelfand). *Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate și  $A^{-1} = A - 0 = A$  fără elementul zero, în acest caz  $A$  este izomorfă și izometrică cu corpul numerelor complexe.*

*Demonstrație.* În adevăr, pentru orice  $x \in A$  există  $\lambda_x$ , astfel ca  $x - \lambda e = x - \lambda$  nu este invertibil și deci cum singurul element neinvertibil este zero, trebuie să avem

$$x = \lambda_x e.$$

Aplicația  $x \rightarrow \lambda_x$  definește izomorfismul căutat, care din

$$\|x\| = \|\lambda_x e\| = |\lambda_x| \|e\| = |\lambda_x|$$

rezultă că este o izometrie. Lema este demonstrată.

*Observație.* Acest rezultat (lema 1.16.14) are o importanță deosebită în teoria algebrelor Banach comutative în construcția așa numitei teorii gelfandiene a algebrelor Banach comutative.

Vom da acum un rezultat privind unele cantități legate de spectru și anume de raza spectrală.

**DEFINIȚIA 1.16.18.** Pentru orice element  $x$  al unei algebre Banach  $A$  cu unitate raza spectrală  $r_x$  este prin definiție numărul

$$r_x = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

Se pune problema de a calcula acest număr cu ajutorul elementului  $x$  și al puterilor sale  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ .

Are loc:

**LEMA 1.16.19.** *Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate și  $x$  un element arbitrar în  $A$ . În acest caz*

$$\sigma(x^n) = [\sigma(x)]^n.$$

*Demonstrație.* Fie  $\mu \in \sigma(x^n)$  și  $\mu_1, \dots, \mu_n$  rădăcinile sale de ordin  $n$ . În acest caz  $x^n - \mu = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_n)$  de unde rezultă că  $x^n - \mu$  este invertibil dacă și numai dacă  $x - \mu_i$  nu este invertibil pentru un indice  $i$ . Lema este demonstrată.

**LEMA 1.16.20.** *Fie  $A$  o algebră Banach cu element unitate  $x \in A$ . În acest caz*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$$

*Demonstrație.* Din lema 1.16.19, rezultă că pentru orice întreg  $n$  și  $\lambda \in \sigma(x)$ ,  $\lambda^n \in \sigma(x^n)$  și din lema 1.16.6, rezultă că

$$|\lambda|^n \leq \|x^n\|$$

de unde rezultă că

$$|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n},$$

oricare ar fi întregul  $n$  și deci

$$|\lambda| \leq \inf \|x^n\|^{1/n}.$$

Trebuie să demonstrăm și că

$$\sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \geq \sup \|x^n\|^{1/n}.$$

Pentru aceasta să considerăm  $a^*$  o funcțională liniară arbitrară din  $A^*$  și să punem

$$F(s) = a^*((s - x)^{-1}),$$

care este o funcție olomorfă în planul complex fără mulțimea  $\sigma(x)$  și deci și în

$$\{s, |s| > r_x\}.$$

Se observă că  $F(s)$  are expresia

$$F(s) = \sum_0^\infty \frac{a^*(x^n)}{s^{n+1}}$$

dacă  $|s| > \|x\|$ . Din teoria funcțiilor complexe de o variabilă complexă, se știe că seria va converge și pentru

$$|s| > r_x$$

de unde rezultă că  $\left\{a^*\left(\frac{x^n}{s^n}\right)\right\}$  este un șir mărginit pentru orice  $a^* \in A^*$ .

Din teorema lui Banach-Steinhaus rezultă că  $\left\{\frac{x^n}{s^n}\right\}$  este un șir mărginit în  $A$  dacă  $|s| > r_x$ . În acest mod am demonstrat că există o constantă  $k$ , astfel ca

$$\|x^n\| \leq k |s^n|$$

pentru orice  $n$ ,  $|s| > r_x$ . Rezultă astfel

$$\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq |s|$$

și deci

$$\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq r_x \leq \inf \|x^n\|^{1/n},$$

de unde egalitatea pe care vrem să o demonstrăm.

Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate și  $\mathfrak{I}$  o submulțime a sa.

DEFINIȚIA 1.16.21. Se spune că  $\mathfrak{I}$  este un ideal stîng dacă :

1. este o subalgebră (adică pentru operațiile induse de operațiile din  $A$  este o algebră),

2. pentru orice  $x \in \mathfrak{I}$  și  $y \in A$  elementul  $xy \in \mathfrak{I}$  iar dacă este satisfăcută 1 și,

2' pentru orice  $x \in \mathfrak{I}$  și  $y \in A$  elementul  $yx \in \mathfrak{I}$  vom spune că avem ideal drept.

DEFINIȚIA 1.16.22. O submulțime  $\mathfrak{I} \subset A$  se spune ideal bilateral dacă este în același timp ideal stîng și ideal drept.

Fie  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral într-o algebră Banach cu unitate și să definim o relație de echivalență în  $A$  astfel

$$x \sim y \text{ dacă și numai dacă } x - y \in \mathfrak{I}.$$

Să considerăm spațiul  $A/\mathfrak{I}$  care poate fi organizat și ca algebră în mod natural. Se spune că  $A/\mathfrak{I}$  este algebra cît.

DEFINIȚIA 1.16.23. Un ideal (la stînga sau la dreapta) într-o algebră se numește ideal maximal dacă și numai dacă nu există un alt ideal (la stînga sau la dreapta) propriu care să-l conțină.

Vom demonstra cîteva proprietăți importante legate de ideale maximale.

LEMA 1.16.24. Orice ideal (stîng sau drept) este conținut într-un ideal maximal (stîng sau drept) respectiv.

*Demonstrație.* Pentru demonstrație vom folosi lema lui Zorn. Fie  $\mathfrak{I}$  idealul considerat, iar  $M_{\mathfrak{I}}$  familia idealelor care-l conțin (de același tip cu  $\mathfrak{I}$ , adică stîngi sau drepte) și dacă  $M_{\mathfrak{I}}$  este o parte total ordonată din  $M_{\mathfrak{I}}$  să notăm cu  $\mathfrak{I}_m$  reuniunea idealelor din  $M_{\mathfrak{I}}$  care se verifică ușor că este un ideal de același tip cu  $\mathfrak{I}$ . Deci există un element maximal și deci există un ideal maximal care conține idealul  $\mathfrak{I}$ . Teorema este demonstrată.

LEMA 1.16.25. Orice ideal maximal este închis.

*Demonstrație.* Evident.

LEMA 1.16.26. O algebră  $A$  cu unitate care nu are nici un ideal stîng diferit de  $\{0\}$  și  $A$ , este un corp.

*Demonstrație.* Fie  $x \in A$  și  $x$  diferit de elementul zero. Trebuie să arătăm că este invertibil. Evident  $\mathfrak{I}_x = xA = \{xy, y \in A\}$  este un ideal care conține pe  $x$  și deci trebuie să fie  $A$ . Deci există  $x'$  astfel ca  $xx' = e$ , unde  $e$  este elementul unitate al algebrei  $A$ . Să considerăm  $x'$

(care este diferit de zero) și aplicînd același raționament, există  $x''$  astfel ca

$$x'' x' = e.$$

Să arătăm că  $x'$  este inversul elementului  $x$ . În adevăr, avem

$$x x' = e \quad x x' = x'' x' x x' = x'' e x' = x'' x' = e$$

ceea ce demonstrează lema.

**LEMA 1.16.27.** Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate și  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral în  $A$ . Condiția necesară și suficientă ca  $\mathfrak{I}$  să fie ideal maximal este ca  $A/\mathfrak{I}$  să fie un corp.

*Demonstrație.* Fie  $\varphi$  aplicația care face ca fiecărui element  $x \in A$  să-i corespundă clasa sa de echivalență notat cu  $\hat{x}$ . Fie  $\hat{\mathfrak{I}}$  un ideal la stînga în  $A/\mathfrak{I}$  și se verifică ușor că

$$\{x, \hat{x} \in \hat{\mathfrak{I}}\} = \varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{I}})$$

este un ideal la stînga în  $A$  care conține pe  $\mathfrak{I}$ . Dacă  $\mathfrak{I}$  este maximal atunci trebuie să avem egalitatea

$$\varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{I}$$

și deci  $\mathfrak{I}$  trebuie să fie egal cu idealul  $\{0\}$ , sau

$$\varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{I}}) \xi = A$$

și deci

$$\hat{\mathfrak{I}} = \varphi(\varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{I}})) = \varphi(A) = A/\mathfrak{I}.$$

Rezultă că dacă  $\hat{\mathfrak{I}}$  este un ideal în  $A/\mathfrak{I}$  atunci el este sau idealul  $\{0\}$  sau  $A/\mathfrak{I}$ . Deci  $A/\mathfrak{I}$  este un corp.

Reciproc, dacă  $A/\mathfrak{I}$  este un corp atunci nu există ideale diferite de  $\{0\}$  și  $A/\mathfrak{I}$  și dacă în  $A$  ar exista un ideal care ar conține idealul  $\mathfrak{I}$  atunci  $\varphi(\mathfrak{I})$  ar fi ideal propriu în  $A/\mathfrak{I}$  care știm că nu are ideale. Deci  $\mathfrak{I}$  este maximal.

Lema este demonstrată.

**LEMA 1.16.28.** Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate. Orice element  $x$  care nu are invers este conținut într-un ideal maximal.

*Demonstrație.* Mulțimea  $\mathfrak{I}_x = \{yx, y \in A\}$  este un ideal care conține elementul  $x$  și nu conține elementul unitate. Fie  $\mathfrak{I}_{\max, x}$  idealul maximal care-l conține. Evident că acesta satisface condițiile puse în lema.

Am văzut mai înainte că  $A$  fiind o algebră Banach cu unitate și  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral atunci mulțimea claselor de echivalență pentru relația definită prin

$$x R y \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{I}$$

se poate organiza ca algebră. În cele ce urmează vom arăta că se poate introduce o normă pe  $A/\mathfrak{I}$  astfel ca să devină algebră Banach.

Pentru orice  $x \in A$ ,  $\hat{x} \in A/\mathfrak{I}$  va fi clasa de echivalență care-i aparține. Putem demonstra următoarea :

LEMA 1.16.29. Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate și  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral închis, iar  $A/\mathfrak{I}$  algebra claselor de echivalență numită și algebra cât. Dacă punem

$$\|\hat{x}\| = \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|$$

atunci  $\{A/\mathfrak{I}, \|\hat{x}\|\}$  este o algebră Banach cu element unitate.

*Demonstrație.* Înainte de a începe demonstrația vom remarca faptul că din definiție, rezultă că

$$\|\hat{x}\| \leq \|x\|.$$

Trebuie să demonstrăm că

$$\hat{x} \rightarrow \|\hat{x}\|$$

este o normă.

În adevăr, avem

$$\|\hat{x} + \hat{y}\| = \inf_{\substack{x \in \hat{x} \\ y \in \hat{y}}} \|x + y\| \leq \inf_{x \in \hat{x}} \|x\| + \inf_{y \in \hat{y}} \|y\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$$

și

$$\|\lambda \hat{x}\| = \inf_{x \in \hat{x}} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf_{x \in \hat{x}} \|x\| = |\lambda| \|\hat{x}\|.$$

Să presupunem, acum că

$$\|\hat{x}\| = 0.$$

Evident că dacă  $\hat{x} = 0$ , atunci  $\|\hat{x}\| = 0$ .

Reciproc, dacă  $\|\hat{x}\| = 0$ , atunci există  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in \hat{x}$ , astfel ca

$$\lim_n \|x_n\| = 0.$$

Fie  $y \in \hat{x}$  și cum  $y - x_n \in \mathfrak{I} = \tilde{\mathfrak{I}}$  ( $\mathfrak{I}$  este un ideal închis), deducem

$$y = \lim_n (y - x_n) \in \mathfrak{I}$$

adică  $\hat{x}$  este clasa zero.

Cum însă

$$\|\hat{x} \hat{y}\| \leq \inf_{\substack{x \in \hat{x} \\ y \in \hat{y}}} \|xy\| = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\| \inf_{y \in \hat{y}} \|y\| = \|\hat{x}\| \|\hat{y}\|,$$

ca să demonstrăm că  $A/\mathfrak{I}$  este o algebră Banach mai rămîne să arătăm că este un spațiu complet. Fie deci  $\{\hat{x}_n\}$  un șir Cauchy și să alegem un șir de indici  $\{n_j\}$ , astfel ca

$$\|\hat{x}_{n_{j+1}} - \hat{x}_{n_j}\| \leq 1/2^j; \quad j = 1, 2, \dots$$

de unde, rezultă că

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{x}_{n_{j+1}} - \hat{x}_{n_j}\| < \infty.$$

Să alegem  $x_{n_j} \in \hat{x}_{n_j}$ , astfel ca

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_j}\| < \infty,$$

ceea ce se poate face astfel: dacă  $x_{n_1} \in \hat{x}_{n_1}$  ales arbitrar, să alegem  $z_{n_i} \in \hat{x}_{n_i} - \hat{x}_{n_{i-1}}$  și să punem  $x_{n_i} = x_{n_1} + z_{n_2} + \dots + z_{n_i}$ .

În acest caz șirul  $\{x_{n_j}\}$  este și Cauchy și deci există  $x = \lim x_{n_j}$ .

Însă

$$\|\hat{x}_{n_j} - \hat{x}\| \leq \|x_{n_j} - x\|.$$

Să arătăm că  $\{\hat{x}_n\}$  converge către  $\hat{x}$ .

În adevăr pentru fiecare  $x$  să alegem un indice  $n_{j(n)} \geq n$  și din egalitatea

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\| \leq \|\hat{x}_n - \hat{x}_{j(n)}\| + \|\hat{x}_{j(n)} - \hat{x}\|$$

rezultă afirmația noastră. Evident, clasa unitate este unitate în  $A/\mathfrak{I}$ . Lema este demonstrată.

**LEMA 1.16.30.** Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate iar  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral închis. Condiția necesară și suficientă ca  $A/\mathfrak{I}$  să fie un corp Banach este ca  $\mathfrak{I}$  să fie ideal maximal stîng.

*Demonstrație.* Rezultă din lema 1.16.27. și lema 1.16.29.

**LEMA 1.16.31.** Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate și  $\mathfrak{I}$  este un ideal bilateral închis atunci  $A/\mathfrak{I}$  este izomorfă și izometrică cu corpul numerelor complexe.

*Demonstrație.* Rezultă din lema 1.16.16. și lema 1.16.17.

Vom studia acum câteva proprietăți ale algebrelor Banach legate de anumite funcționale liniare și continue definite pe ele.

DEFINIȚIA 1.16.32. Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate. O funcțională liniară definită pe  $A$  se spune că este multiplicativă dacă oricare ar fi  $x$  și  $y$  în  $A$  avem

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \Phi(y).$$

Mulțimea funcționalelor liniare multiplicative pe algebra  $A$  se notează cu  $M_A$ .

LEMA 1.16.33. Pentru orice  $\Phi \in M_A$  sînt adevărate proprietățile:

1.  $\Phi(1) = 1$ ,
2.  $\Phi(f^{-1}) = \Phi^{-1}(f)$ ,  $f \in A^{-1}$ ,
3.  $\|\Phi\| = 1$ .

*Demonstrație.* Primele două proprietăți sînt evidente. Rămîne să demonstrăm numai proprietatea 3. Dacă  $s$  are proprietatea

$$|s| \geq \|x\| \text{ cu } x \in A \text{ atunci } s - x \in A^{-1} \text{ și deci}$$

$$\Phi(s - x) \neq 0 \Rightarrow \Phi(x) \neq \Phi(s),$$

de unde rezultă că

$$|\Phi(s)| \leq \|x\|,$$

oricare ar fi  $x \in A$  și deci  $\|\Phi\| = 1$ .

DEFINIȚIA 1.16.34. Fie  $A$  o algebră Banach cu unitate și  $x \in A$ .

Se spune că funcția

$$\hat{x} : M_A \rightarrow \mathbb{C}$$

definită prin  $\hat{x}(\Phi) = \Phi(x)$  este transformata Gelfand a elementului  $x$ .

DEFINIȚIA 1.16.35. Topologia Gelfand pe  $M_A$  este prin definiție cea mai slabă topologie pe  $M_A$  pentru care funcțiile  $\{\hat{x}\}_{x \in A}$  sînt continue<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Fie  $X$  o mulțime și  $Y$  un spațiu topologic, iar

$$f_\alpha : X \rightarrow Y \quad \alpha \in \Gamma$$

o familie de funcții. Pentru orice  $\alpha$  fie  $\tau_\alpha$  topologia definită pe  $X$  generată de  $\{f_\alpha^{-1}(G), G \text{ deschisă în } Y\}$ . Topologia generată de  $\bigcup G_\alpha, G_\alpha \in \tau_\alpha$  se spune că este topologia sup  $\tau_\alpha$  și este prin definiție topologia slabă generată de familia  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ .

Să observăm acum legătura dintre topologia Gelfand și topologia  $\omega^*$  pe  $A^*$ . În adevăr, mulțimea

$$\{\Phi, \Phi \in A^*, \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)\} = D$$

este  $\omega^*$ -încisă și

$$M_A = D \cap \{\Phi \in A^*, \Phi(1) = 1\}$$

rezultă că  $M_A$  este o mulțime  $\omega^*$ -încisă a sferei unitate din  $A$ . De aici rezultă că această mulțime,  $M_A$  este o mulțime compactă cu topologia Gelfand.

Este evident că  $\hat{A} = \{\hat{x}\}_{x \in A}$  este o algebră de funcții continue.

**DEFINIȚIA. 1.16.36.** Se spune că o mulțime de funcții  $\Gamma$  definite pe un spațiu topologic  $X$  separă punctele spațiului dacă pentru orice  $t_0$  și  $t_1$  din  $X$  există  $f \in \Gamma$  astfel ca  $f(t_0) \neq f(t_1)$ .

Este clar din construcția funcțiilor  $\hat{x}$  că are loc :

**LEMA 1.16.37.** Algebra  $\hat{A}$  separă punctele spațiului  $M_A$ .

Se mai spune că aplicația

$$x \rightarrow \hat{x}$$

a algebrei  $A$  pe o subalgebră a funcțiilor continue definite pe  $M_A$ , este reprezentarea lui Gelfand a algebrei  $A$ .

În cele ce urmează ne vom ocupa de câteva rezultate privind reprezentarea Gelfand pentru anumite clase de algebre.

Fie  $A$  o algebră Banach comutativă cu element unitate, iar  $I$  un ideal propriu care conform lemei 1 este inclus într-un ideal maximal  $M$ . În acest caz cum  $M$  este ideal bilateral, algebra  $A/M$  este un corp Banach și deci este izomorfă și izometrică cu corpul numerelor complexe.

Fie deci  $M$  ideal maximal și pentru orice  $x \in A$  există un număr  $x(M) \in \mathbb{C}$ , astfel ca  $x - x(M) \in M$ . Să definim funcționala  $\hat{x}_M$  pe  $A$  prin

$$\hat{x}_M(x) = x(M).$$

Este evident că avem o funcțională liniară și continuă pe  $A$  și multiplicativă cu

$$\ker \hat{x}_M = M.$$

Invers, dacă  $f$  este o funcțională liniară continuă și multiplicativă pe  $A$ , atunci

$$\ker f = M_1$$

unde  $M_1$  este un ideal maximal.

În adevăr, este evident că  $M_1$  este un ideal în  $A$ . Cum  $f(1) = 1$  (1 este și unitate în  $A$ )  $\ker f$  este un ideal propriu. Cum pentru orice  $x \in A$  putem scrie

$$x = \left( x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right) + \frac{f(x)}{f(y)} y$$

unde  $y$  este arbitrar în  $C_{M_1}$  cu proprietatea că  $f(y) \neq 0$ , deducem că  $M_1$  este chiar ideal maximal.

În acest mod am demonstrat următoarea :

**TEOREMA 1.16.38.** *Dacă  $A$  este o algebră Banach comutativă cu element unitate atunci :*

1. *dacă  $f$  este o funcțională liniară continuă și multiplicativă pe  $A$ ,  $\ker f$  este un ideal maximal,*
2. *dacă  $M$  este un ideal maximal atunci există o funcțională liniară continuă și multiplicativă  $f$  astfel*

$$\ker f = M.$$

Pentru orice  $x \in A$ ,  $\hat{x}(M) = x(M)$  este reprezentarea Gelfand.

De aici rezultă următoarea :

**TEOREMA 1.16.39.** *Dacă  $A$  este o algebră Banach comutativă cu element unitate și  $x_1, \dots, x_n \in A$  atunci sau există  $f$ , funcțională liniară și continuă, multiplicativă astfel ca  $f(x_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  ori există  $y_1, \dots, y_n \in A$  cu proprietatea că*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1.$$

*Demonstrație.* Să considerăm  $I$  idealul elementelor de forma

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i, y_i \in A \right\}$$

care este conținut într-un ideal maximal  $M$  și deci

$$I = \ker f.$$

Dacă  $I$  nu este propriu atunci  $1 \notin I$  și deci are loc cealaltă alternativă.

Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 1.16.40.** *Dacă  $A$  este o algebră Banach cu unitate atunci*

$$\sup |\hat{x}(M)| = \lim \|x^n\|^{1/n}.$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema 1.16.38.

**DEFINIȚIA 1.16.41.** Se spune că  $A$  este o algebră de funcții dacă :

1.  $\mathcal{X}$  este un spațiu topologic compact,
2.  $A \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$  și  $A$  separă punctele lui  $\mathcal{X}$  (adică există pentru orice  $t_1 \neq t_2$  în  $\mathcal{X}$ ,  $\exists f \in A$  astfel încît  $f(t_1) \neq f(t_2)$ ),
3.  $A$  este închisă și  $1 \in A$ .

Din teorema 1.16.40. rezultă imediat răspunsul la următoarea problemă : cînd este reprezentarea Gelfand  $\hat{x}$  o izometrie? Este evident că acest lucru este adevărat dacă și numai dacă

$$x \in A, \quad \|x^2\| = \|x\|^2.$$

De asemenea această formulă dă răspunsul și la problema cînd  $\tilde{x}$  este un izomorfism și descrierea radicalului algebrei (= intersecția tuturor idealelor maximale).

*Observație.* Dacă  $A$  este algebra Banach a tuturor funcțiilor definite pe  $[-\pi, \pi]$  care au serie absolut convergentă,  $f \in A$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$

atunci din teorema 1.16.40 se deduce ușor că dacă  $f_1, \dots, f_n \in A$  și nu au zerouri comune există  $g_1, \dots, g_n \in A$  astfel încât  $\sum f_i g_i = 1$ . (Aici se folosește faptul, ușor de demonstrat că spațiul idealelor maximale al algebrei  $A$  poate fi identificat topologic cu  $[-\pi, \pi]$ . Această teoremă pentru  $n=1$  a fost demonstrată de N. Wiener și demonstrația dată în teorema 1.16.37 a fost găsită de Gelfand și acest rezultat remarcabil a arătat puterea metodelor algebrice în analiză și a făcut să crească în mod deosebit interesul pentru algebre Banach. Vom menționa numai că algebrele Banach și o teorie a funcțiilor analitice în astfel de algebre a fost construită de matematicianul japonez Nagumo începând din 1936.

Dacă  $A$  este o algebră Banach comutativă cu unitate atunci se poate introduce, pentru un sistem finit de elemente din  $A$ , noțiunea de spectru comun și anume astfel: dacă  $(x_1, \dots, x_n) \subset A$ , atunci

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \{ (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$$

$f$  liniară continuă și multiplicată pe  $A$  },

care este o submulțime compactă în  $C^n$  și pentru  $n=1$  se reduce la noțiunea de spectru al unui element.

De asemenea se poate dezvolta un calcul funcțional pentru elemente dintr-o algebră.

Cum nu vom avea nevoie de un astfel de calcul nu vom expune această teorie importantă și interesantă. Pentru cazul algebrei  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  a operatorilor continui pe un spațiu Banach a se vedea și [392], iar pentru cazul unei algebre a se vedea [57], [350].

În cele ce urmează vom expune rezultatele fundamentale datorate lui Gelfand și Naimark privind reprezentarea unor clase importante de algebre ca algebre de funcții pe de o parte și ca algebre de operatori pe de altă parte. Menționăm că teorema de reprezentare a unor clase de algebre ca algebre de operatori are printre altele, aplicații la teoria spectrului Weyl al unui operator, în particular la considerarea proprietăților unui operator în raport cu algebra lui Calkin, care este prin definiție algebre cît  $\mathcal{L}(H) / \mathcal{I}(K)$  unde  $\mathcal{L}(H)$  este algebra operatorilor pe un spațiu Hilbert, iar  $\mathcal{I}(K)$  este idealul bilateral închis al operatorilor compacți.

Vom prezenta acum noțiunea de  $B^*$ -algebră.

**DEFINIȚIA 1.16.41.** O algebră Banach se spune că admite o involuție dacă există o aplicație\* :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  cu următoarele proprietăți:

1.  $(x + y)^* = x^* + y^*$ ,
2.  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ ,
3.  $(xy)^* = y^* x^*$ ,
4.  $(x^*)^* = x$ .

Este ușor de văzut că în cazul algebrei  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  a funcțiilor continue pe spațiul compact  $\mathcal{S}$ , o involuție este

$$(f)^*(t) = \overline{f(t)},$$

iar în cazul algebrei  $\mathcal{L}(H)$  a operatorilor liniari și mărginiți pe un spațiu Hilbert este, de exemplu, aplicația

$$*: T \longrightarrow T^*$$

unde  $T^*$  este adjunctul lui  $T$ .

DEFINIȚIA 1.16.42. O algebră Banach  $\mathcal{A}$  cu involuție se spune că este o  $B^*$ -algebră dacă oricare ar fi  $x \in \mathcal{A}$  are loc relația

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Este ușor de văzut că, o algebră Banach cu involuție satisface relația  $\|x^*x\| = \|x^*\| \|x\|$  dacă este o  $B^*$ -algebră. Este cunoscut că este adevărată și afirmația contrară. Vom da acum unele proprietăți ale  $B^*$ -algebrelor în următoarea:

TEOREMA 1.16.43. Dacă  $\mathcal{A}$  este  $B^*$ -algebră atunci :

1° oricare ar fi  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\|x^*\| = \|x\|$ ,

2° dacă  $e$  este element unitate pentru  $\mathcal{A}$ ,  $e^* = e$ .

3° dacă  $\mathcal{A}$  are element unitate și  $x^* = x$  atunci  $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$  cu

$$\|x\| = \gamma_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

*Demonstrație.* 1° Avem  $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\|$  și deci dacă  $x \neq 0$  obținem

$$\|x\| \leq \|x^*\|$$

și aplicând acum această relație pentru  $x^*$  obținem afirmația noastră.

2°  $e^* = e \cdot e^* = (ee^*)^* = (e^*)^* = e^{**} = e$ ,

3° Cum  $x^n = (x^n)^*$  și deci

$$\|x\|^2 = \|x^2\|,$$

de unde obținem că  $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ . De aici este evident că  $\gamma_x = \|x\|$ .

Afirmația privind spectrul este un rezultat celebru datorat lui R. Arens. Să presupunem că  $u + iv \in \sigma(x)$  cu  $v \neq 0$  și vom arăta că obținem contradicție.

Fie pentru aceasta  $t$  un număr real și să luăm elementul

$$y_t = x + ite,$$

unde  $e$  este unitatea lui  $A$ . În acest caz  $\lambda = u + iv + it$  este în spectrul lui  $y_t$  și  $\bar{\lambda}$  este în spectrul lui  $y_t^* = x - ite$ . Cum  $y_t$  și  $y_t^*$  sînt polinoame în  $x$ ,  $\lambda \bar{\lambda}$  este în spectrul lui  $y_t^* y_t = x^2 + t^2 e$  și deci

$$u^2 + (t + v)^2 = |\lambda|^2 \leq \|x^2 + t^2 e\| \leq \|x\|^2 + t^2,$$

adică

$$u^2 + 2tv + v^2 + t^2 \leq \|x\|^2 + t^2,$$

oricare ar fi  $t$  real, relație care nu este posibilă decît dacă  $v = 0$ . Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă o structură a unei clase importante de  $B^*$ -algebre.

**TEOREMA 1.16.44.** (Teorema de reprezentare a lui Gelfand-Naimark a  $B^*$ -algebrelor comutative). *Fie  $A$  o  $B^*$ -algebră comutativă cu element unitate. În acest caz este izomorfă și izometrică cu o algebră de funcții continue pe un spațiu compact.*

Fie  $x \in A$  și  $\hat{x}$  reprezentarea sa Gelfand. Vom avea :

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 = \|\hat{x}^* \hat{x}\| = \|\hat{x}\|^2$$

și deci  $\|x\| = \|\hat{x}\|$ , deoarece  $x^* x$  este hermitic și

$$\sup |\hat{h}| = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(h)\} = \lim \|h^n\|^{\frac{1}{n}} = \|h\|$$

dacă  $h$  este hermitic. Rămîne să arătăm că  $(\hat{x}^*) = \overline{\hat{x}}$ . Cum avem

$$x = x_1 + ix_2$$

cu  $x_1$  și  $x_2$  elemente hermitice,  $x^* = x_1 - ix_2$  și deci

$$\hat{x} = \hat{x}_1 + i\hat{x}_2,$$

$$(\hat{x}^*) = \hat{x}_1 - i\hat{x}_2$$

și  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  sînt reali deducem afirmația noastră. Teorema este demonstrată.

**Observație.** 1) Teorema se poate extinde și la cazul cînd  $A$  nu are unitate; în acest caz  $A$  este izomorfă și izometrică cu o algebră de funcții pe un spațiu local compact și care se anulează la infinit.

2) Faptul că  $x \rightarrow \hat{x}$  este o aplicație surjectivă rezultă din teorema lui Weierstrass-Stone.

În demonstrarea teoremei de reprezentare a algebrelor necomutative care sînt și  $B^*$ -algebre vom utiliza teorema de mai sus.

**DEFINIȚIA 1.16.45.** Fie  $A$  o  $B^*$ -algebră. În acest caz vom spune că :

1.  $h$  este hermitic dacă  $h^* = h$ ,

2.  $h$  este pozitiv dacă este hermitic și  $\sigma(h) \subset \mathbb{R}_+$ ,

3.  $\varphi \in \mathcal{A}^*$  este o stare pentru  $\mathcal{A}$  dacă

$$\|\varphi\| = \varphi(1) = 1.$$

Putem demonstra următoarea :

**TEOREMA 1.16.46.** *Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $B^*$ -algebră cu unitate atunci:*

1° *dacă  $h$  este hermitic și  $\lambda \in \sigma(h)$  atunci există o stare a lui  $\mathcal{A}$  astfel încât  $\varphi(h) = \lambda$ ,*

2°  *$h$  hermitic este pozitiv dacă și numai dacă oricare ar fi starea  $\varphi$ ,  $\varphi(h) \geq 0$ ,*

3°  *$h, k$  pozitive  $\Rightarrow h + k$  pozitiv,*

4° *orice element hermitic  $h$  are scrierea  $h = h_1 - h_2$  cu  $h_i$  pozitivi,*

5°  *$h$  este pozitiv dacă și numai dacă  $h = a^* a$  cu  $a \in \mathcal{A}$ .*

*Demonstrație.* 1° Fie  $\mathcal{A}_1$   $B^*$ -algebra generată de  $h$  și 1 care este comutativă și deci este \*-izomorfă și izometrică cu o algebră de funcții continue și cum spectrul lui  $h$  față de  $\mathcal{A}$  și  $\mathcal{A}_1$  este același, deoarece  $\sigma(h)$  este real față de  $\mathcal{A}$  deducem că dacă  $\lambda \in \sigma(h)$ , putem lua

$$f(h) = \hat{h}$$

care se prelungește la o funcțională pe  $\mathcal{A}$  și satisface 1°.

2° Cum  $\sigma(h) \subset \{\varphi(h), \varphi \text{ stare}\}$  rezultă că dacă  $\varphi(h) \geq 0$  oricare ar fi starea  $\varphi$ ,  $h \geq 0$ . Invers, dacă  $h \geq 0$  atunci algebra generată de  $h$  și 1 este izometrică și \*-izomorfă cu o algebră  $\mathcal{C}(S)$  de funcții continue, iar  $\sigma(h) = S$  și dacă  $\varphi$  este o stare atunci restricția sa la algebra generată de  $h$  și 1 induce o funcțională  $L$  liniară pe  $\mathcal{C}(\sigma)$  cu norma 1 și valoare 1 pentru funcția constantă 1. Deci este pozitivă și avem  $0 \leq L(h) \leq \varphi(h)$ .

3° Rezultă imediat din 2°.

4° Dacă  $\mathcal{A}_h$  este subalgebra generată de  $h$  și 1 atunci  $h = \hat{h}_1 - \hat{h}_2$  cu funcții pozitive  $\hat{h}_1 \hat{h}_2 = \hat{h}_2 \hat{h}_1 = 0$  și deci  $h = h_1 - h_2$ ,  $h_1 h_2 = h_2 h_1 = 0$ .

5° Dacă  $h \geq 0$  atunci  $\hat{h}$  este continuă și pozitivă și deci  $\hat{h}^{1/2}$  există și îi corespunde elementul pozitiv  $h^{1/2}$  care satisface ecuația  $(h^{1/2})^2 = h$ .

Invers, dacă  $h = a^* a$  să arătăm că este pozitiv. Evident  $h$  este hermitic și trebuie să arătăm numai că are spectrul pozitiv sau că în descompunerea dată de 4°,  $h = a_1 - a_2$  atunci  $a_2 = 0$ . Cum avem  $a_1 a_2 = -a_2 a_1$ , deducem că

$$(aa_2)^* (aa_2) = a_2 a^* a a_2 = a_2 (a_1 - a_2) a_2 = -a_2^3$$

și cum  $a_2 \geq 0$ , deducem că

$$(aa_2)^* (aa_2) \leq 0.$$

Similar

$(aa_2)(aa_2)^* \leq 0$ . Cum avem  $aa_2 = b_1 + ib_2$  deducem

$$0 \geq (aa_2)^* (aa_2) = 2(b_1^2 + b_2^2) \geq 0$$

și deci  $b_1 = b_2 = 0$  sau  $aa_2 = 0$ . Dar în acest caz

$$0 = (aa_2) * (aa_2) = -a_2^3 = 0$$

și deci  $a_2 = 0$  și deci 5° este demonstrată și cu aceasta și teorema.

Următoarea teoremă ne va fi utilă în construcția spațiului Hilbert pe care se va reprezenta, ca algebră de operatori, algebra  $\mathcal{A}$ .

**TEOREMA 1.16.47.** *Dacă  $\varphi$  este o stare pentru algebra Banach care este o  $B^*$ -algebră, atunci au loc afirmațiile următoare :*

- 1°  $\varphi(x^*x) \geq 0$  oricare ar fi  $x \in A$ ,
- 2°  $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$  oricare ar fi  $x \in A$ ,
- 3° dacă punem

$$[x, y]_\varphi = \varphi(y^*x),$$

aplicația

$$(x, y) \rightarrow [x, y]_\varphi$$

definește o aplicație biliniară, simetrică și semi definită.

$$4^\circ [xz, y]_\varphi = [z, x^*y]_\varphi.$$

*Demonstrație.* Este clar că 1° și 2° au loc după cum rezultă din cele afirmate mai înainte.

3° Este clar că  $[ \cdot, \cdot ]_\varphi$  este liniară în primul argument și antiliniară în al doilea, semidefinită și hermitică.

$$4^\circ [xz, y]_\varphi = \varphi(y^*xz) = \varphi((x^*y)^*z) = [z, x^*y]_\varphi$$

Teorema este demonstrată.

De asemenea vom avea nevoie de rezultatul dat în teorema următoare

**TEOREMA 1.16.48.** *Dacă  $\varphi$  este o stare pentru o  $B^*$ -algebră  $\mathcal{A}$  atunci :*

- 1°  $\mathfrak{I}_\varphi = \{x, [x, x]_\varphi = 0\}$  este un ideal stâng în  $\mathcal{A}$ ,
- 2°  $H_\varphi = \mathcal{A} / \mathfrak{I}_\varphi$  este un spațiu prehilbertian cu produsul scalar  $[ \cdot, \cdot ]_\varphi$ ,
- 3° dacă  $a \in \mathcal{A}$  și  $T_a^\varphi$  este definit pe  $H_\varphi$  prin

$$T_a^\varphi(x + \mathfrak{I}_\varphi) = ax + \mathfrak{I}_\varphi,$$

$T_a^\varphi$  este bine definit și  $\|T_a^\varphi\| \leq \|a\|$ ,  $[a, a]_\varphi^{1/2} \leq \|T_a^\varphi\|$ .

*Demonstrație.* Este evident că  $[ \cdot, \cdot ]_\varphi$  are toate proprietățile produsului scalar exceptînd  $[x, x]_\varphi = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ . Dacă  $x \in \mathfrak{I}$  și  $g \in \mathcal{A}$  vom avea

$$0 \leq [yx, yx] = [x, y^*yx]_\varphi \leq \|x\|_\varphi [yy]_\varphi = 0 \text{ și deci } 1^\circ \text{ are loc.}$$

2° Cum  $[ \cdot, \cdot ]_\varphi$  are proprietățile amintite,  $H_\varphi$  este un spațiu prehilbertian.

3° Deoarece  $\mathfrak{I}_\varphi$  este un ideal sting,  $T_a^\varphi$  este bine definit. Cum avem

$$\|ax\|_\varphi = \varphi(x^*a^*ax),$$

$$\|a\|^2 \|x\|_\varphi = \varphi(\|a\|^2 x^*x),$$

deducem că

$$\|a\|^2 \|x\|_\varphi - \|ax\|_\varphi^2 = \varphi(x^*(\|a\|^2 - a^*a)x)$$

și cum

$$\|a\|^2 - a^*a \geq 0$$

deducem că  $a^2 - a^*a = l^*l$  cu  $l \in \mathfrak{A}$ . În acest mod

$$\varphi(x^*(\|a\|^2 - a^*a)x) = \varphi(x^*l^*lx) \geq 0$$

și deci

$$\|ax\|_\varphi^2 \leq \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2$$

adică

$$\|T_\varphi^2\| \leq \|a\|.$$

Cum însă avem

$$\|ae\|_\varphi^2 = \varphi(a^*a)$$

deducem că

$$\|T_\varphi^2\| \geq [a, a]_\varphi^{1/2}.$$

Teorema este demonstrată.

Vom observa că dacă  $\varphi$  este o stare și  $\widetilde{H}_\varphi$  spațiul completat  $H_\varphi$ , pentru orice  $a \in \mathfrak{A}$  operatorul  $T_a^\varphi$  definit pe  $H_\varphi$  induce pe  $\widetilde{H}_\varphi$  un operator  $\widetilde{T}_a^\varphi$  liniar și continuu astfel încît:

1.  $a \rightarrow \widetilde{T}_a^\varphi$  este un homomorfism algebrei  $\mathfrak{A}$  în  $\mathfrak{L}(\widetilde{H}_\varphi)$ ,
2.  $(\widetilde{T}_a^\varphi)^* = \widetilde{T}_{a^*}^\varphi$ .

Acum sîntem în măsură să enunțăm și să demonstrăm teorema de reprezentare a  $B^*$ -algebrelor dată de Gelfand și Naimark.

**TEOREMA 1.16.49.** *Dacă  $\mathfrak{A}$  este o  $B^*$ -algebră cu unitate atunci este izometrică și  $*$ -izomorfă cu o algebră închisă de operatori pe un spațiu Hilbert și care este autoadjunctă (adică odată cu un element conține și adjunctul său).*

*Demonstrație.* Fie  $S$  mulțimea stărilor algebrei  $\mathfrak{A}$  și  $H_S$  spațiul Hilbert sumă directă a spațiilor  $\widetilde{H}_\varphi$ , adică mulțimea elementelor de forma  $h = (h_\varphi)_{\varphi \in S}$ :

1.  $h_\varphi \in \widetilde{H}_\varphi$ ,
2.  $\sum_\varphi \|h_\varphi\|_\varphi^2 < \infty$

cu produsul scalar, dacă  $k = (h_\varphi)$  este un alt element,

$$\langle h, k \rangle = \sum_{\varphi} \langle h_\varphi, k_\varphi \rangle.$$

Pentru orice element  $a \in \mathcal{A}$  vom defini un operator pe  $H_S$  astfel

$$T_a(h) = (\widetilde{T}_a^\varphi h_\varphi)_{\varphi \in S}$$

care este mărginit, deoarece

$$\|T_a(h)\|^2 = \sum_{\varphi} \|\widetilde{T}_a^\varphi h_\varphi\|^2 \leq \|a\|^2 \sum_{\varphi} \|h_\varphi\|_\varphi^2 = \|a\|^2 \|h\|^2.$$

De asemenea, ținând seama de proprietățile operatorilor  $\widetilde{T}_a^\varphi$  deducem că are loc și

$$(T_a)^* = T_{a^*}.$$

Pentru a arăta că teorema lui Gelfand - Naimark este adevărată este suficient să arătăm acum că

$$a \rightarrow T_a$$

este o izometrie.

Să considerăm un element  $h \in \mathcal{A}$  hermitic și deci există  $\varphi \in S$  astfel ca

$$\varphi(h^2) = \|h\|^2$$

deoarece  $h^2$  este pozitiv și  $\|h\|^2 \in \sigma(h^2)$ . Dar atunci

$$\|h\|^2 = \varphi(h^2) \leq \|\widetilde{T}_h^\varphi\| \leq h^2$$

și deci  $\|\widetilde{T}_h\| = \|h\|$ . Cum este evident ca  $\|T_h\| \geq \|\widetilde{T}_h^\varphi\|$  rezultă că în cazul elementelor hermitice avem egalitate.

Dacă  $x \in \mathcal{A}$  este arbitrar, atunci

$$\|Tx\|^2 = \|T_x^* T_x\| = \|Tx^* x\|$$

și cum  $x^* x$  este hermitic avem că

$$\|Tx\|^2 \geq \|x\|^2$$

de unde deducem că  $\|Tx\| = \|x\|$ . Teorema este astfel demonstrată.

Fie  $A$  o  $B^*$ -algebră și  $\mathfrak{I}$  ideal bilateral închis al lui  $\mathcal{A}$  și să considerăm algebra Banach  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  care poate fi înzestrată cu o involuție. Mai mult are loc următoarea:

**TEOREMA 1.16.50.** *Algebra  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  este o  $B^*$ -algebră și  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^*$  ( $\mathfrak{I}^* = \{x^*, x \in \mathfrak{I}\}$ ).*

Această teoremă nu o vom demonstra aici; ea este o consecință a teoremei lui Vidav-Palmer și va fi dată în teorema 2.10.10.

Dacă  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$  algebra Banach a operatorilor liniar și mărginiți pe un spațiu Hilbert și  $\mathcal{K} = \mathfrak{I}$  idealul bilateral închis al operatorilor compacți, teorema de mai sus a fost dată de Calkin și algebra  $\mathcal{C} = \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}$  se mai numește algebra lui Calkin.

## RANG NUMERIC

Vom prezenta mai întâi noțiunea de rang numeric în cazul spațiilor Hilbert și apoi pentru cazul algebrelor Banach dând o atenție deosebită algebrei operatorilor mărginiți pe un spațiu Banach.

## § 1. NOȚIUNEA DE RANG NUMERIC

DEFINIȚIA 2.1.1. Fie  $E$  un spațiu Hilbert și  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Prin rang numeric vom înțelege mulțimea

$$W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1 \}$$

unde  $\langle, \rangle$  este produsul scalar pe spațiul Hilbert  $H$ .

Are loc :

TEOREMA 2.1.2. (Hausdorff-Toeplitz). *Mulțimea  $W(T)$  este convexă.*

Vom prezenta mai multe demonstrații pentru această teoremă.

*Demonstrația I.* Teorema lui Hausdorff-Toeplitz spune că  $\xi \in W(T)$  și  $\eta \in W(T)$  atunci pentru orice  $t \in (0,1)$ ,  $\xi_t = t\xi + (1-t)\eta$  este în  $W(T)$ . Să arătăm mai întâi că putem presupune că  $\xi = 1$  și  $\eta = 0$ . În adevăr, fie  $\alpha, \beta$  soluții ale sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \alpha\xi + \beta = 1, \\ \alpha\eta + \beta = 1 \end{cases}$$

și cum  $W(T\alpha + \beta) = \alpha W(T) + \beta = \{ \alpha\omega + \beta \}_{\omega \in W(T)}$  să considerăm  $t \in (0,1)$  cu  $\alpha \langle T x_0, x_0 \rangle + \beta = t = \alpha(t\xi + (1-t)\eta) + \beta$ , ceea ce demonstrează afirmația noastră. Este suficient să presupunem că  $\xi = 1$  și  $\eta = 0$ .

Dacă  $T = T_1 + i T_2$  cu  $T_i, i = 1, 2$  operatori hermitici, rezultă că există  $x_0$  și  $x_1 \in E$  astfel ca

$$\langle T_1 x_0, x_0 \rangle = 1, \quad \langle T_2 x_0, x_0 \rangle = 0,$$

$$\langle T_1 x_1, x_1 \rangle = 0, \quad \langle T_2 x_1, x_1 \rangle = 0.$$

Înmultiplicând convenabil pe  $x_0$  și  $x_1$  putem presupune că

$$\operatorname{Re} \langle T x_0, x_1 \rangle = 0.$$

Cum  $x_0$  și  $x_1$  sînt liniar independenți și  $x_t = t x_0 + (1-t) x_1$  nu se anulează, avem

$$\begin{aligned} \langle T_2 x_t, x_t \rangle &= t^2 \langle T_2 x_0, x_0 \rangle + t(1-t) [\langle T_2 x_0, x_1 \rangle + \\ &+ \langle T_2 x_1, x_0 \rangle] + (1-t)^2 \langle T_2 x_1, x_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Să considerăm funcția  $\widehat{f}(t) = f(t) \cdot \frac{1}{\|x_t\|}$  unde

$$f(t) = \langle T x_t, x_t \rangle,$$

care este cu valori reale și cum  $f(0) = 0$ , iar  $f(1) = 1$  pentru ori ce  $t \in (0, 1)$  există  $t_0 \in (0, 1)$  astfel ca  $f(t_0) = t$ , adică

$$\left\langle T \frac{x_{t_0}}{\|x_{t_0}\|}, \frac{x_{t_0}}{\|x_{t_0}\|} \right\rangle = t,$$

ceea ce trebuia să demonstrăm.

*Demonstrația II.* Fie  $\xi \in W(T)$ ,  $\eta \in W(T)$  și

$$\xi = \langle T x_0, x_0 \rangle, \quad \eta = \langle T x_1, x_1 \rangle.$$

Să considerăm elementul  $\xi_z = x_0 + z x_1$  care este diferit de zero pentru orice  $z$  dacă  $\xi \neq \eta$ . În adevăr, în caz contrar  $z$  are proprietatea că  $|z| = 1$  și care ne dă  $\xi = \eta$ .

Teorema va fi demonstrată dacă arătăm că pentru orice  $t \in (0, 1)$  există un număr complex  $z$  astfel ca

$$\langle T \xi_z, \xi_z \rangle = [t\xi + (1-t)\eta] \|\xi_z\|^2.$$

Această ecuație este echivalentă cu următoarea ecuație

$$p|z|^2 + qz + r\bar{z} + s = 0$$

cu  $p = t(\eta - \xi)$ ,  $s = (1-t)(\xi - \eta)$ , iar  $q, r$  sînt numere complexe.

Această ecuație este echivalentă cu următoarele ecuații:

$$x^2 + y^2 + ax + by - [(1-t)/t] = 0,$$

$$cx + dy = 0.$$

Cum prima ecuație este un cerc cu rază pozitivă și cu originea axelor în interior, iar ecuația a doua este o dreaptă, este clar că punctele unde această dreaptă intersectează cercul sînt soluții ale ecuației de mai înainte și deci existența numărului complex  $z$  este demonstrată.

*Observație.* Această demonstrație arată că există două elemente cu proprietatea cerută

$$\tilde{\xi}_{x_1} = \frac{\xi_{x_1}}{\|\xi_{x_1}\|}, \quad \tilde{\xi}_{x_2} = \frac{\xi_{x_2}}{\|\xi_{x_2}\|}.$$

O noțiune strins legată de noțiunea de rang numeric este următoarea, utilă în special în estimarea normei unei derivări.

**DEFINIȚIA 1.2.** Prin rang numeric maximal al operatorului  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  un spațiu Hilbert, este prin definiție mulțimea

$$W_n(T) = \{\lambda, \text{ există } \{x_n\}, \|x_n\| = 1, \lambda = \lim \langle Tx_n, x_n \rangle, \lim \|Tx_n\| = \|T\|\}.$$

Are loc :

**TEOREMA 2.1.3.** *Mulțimea  $W_n(T)$  este nevidă, închisă, convexă și este conținută în închiderea mulțimii  $W(T)$ .*

*Demonstrație.* Toate proprietățile sînt evidente exceptînd convexitatea. Vom remarca în primul rînd că, dacă

$$\|T\| = \|x\| = 1 \text{ și } \|Tx\|^2 \geq 1 - \varepsilon,$$

atunci

$$\|T^*Tx - x\|^2 \leq 2\varepsilon.$$

În adevăr, avem

$$0 \leq \|T^*Tx - x\|^2 = \|T^*Tx\|^2 - 2\|Tx\|^2 + \|x\|^2 \leq \leq 2(1 - \|Tx\|^2) < 2\varepsilon.$$

Să presupunem acum că  $\xi, \eta$  sînt în  $W_n(T)$  și fie  $\{x_n\}, \{y_n\}$  șirurile corespunzătoare de elemente din  $E$ , astfel ca

$$\xi = \lim \langle Tx_n, x_n \rangle, \quad \eta = \lim \langle Ty_n, y_n \rangle$$

Fie  $P_n$  proiecția ortogonală pe spațiul generat de  $\{x_n, y_n\}$  și operatorul  $T_n = P_n T P_n$  pe acest spațiu. Dacă  $\mu$  este un punct pe segmentul de dreaptă care unește pe  $\xi$  cu  $\eta$  atunci conform teoremei lui Hausdorff-Toeplitz există  $u_n$ , astfel ca

$$(*) \quad \langle T u_n, u_n \rangle = \langle T_n u_n, u_n \rangle \rightarrow \mu$$

cu  $\|u_n\| = 1, u_n = \alpha_n x_n + \beta_n y_n$ . Însă avem și relația

$$|\langle x_n, y_n \rangle| \leq k < 1,$$

care se deduce din  $\|u_n\| = 1$  și (\*).

Rezultă astfel că există  $M$  ca

$$|\alpha_n| < M; \quad |\beta_n| < M$$

Atunci  $\|Tu_n\|^2 = \langle T^*Tu_n, u_n \rangle = \|u_n\|^2 - 2\varepsilon_n M$  cu  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  după cum rezultă din observația de la începutul demonstrației.

De aici, avem

$$\|Tu_n\| \rightarrow 1$$

și cum  $\langle Tu_n, u_n \rangle \rightarrow \mu$ , teorema este demonstrată.

Teorema următoare stabilește legătura între noțiunea de rang numeric și noțiunea de spectru.

TEOREMA 2.1.4. Pentru orice operator  $T \in \mathcal{L}(E)$ , avem

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)},$$

unde  $\overline{W(T)}$  = închiderea mulțimii  $W(T)$ .

Demonstrație. Să presupunem că  $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ , frontiera mulțimii  $\sigma(T)$  și în acest caz există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$ , astfel ca :

$$Tx_n - \lambda_0 x_n \rightarrow 0.$$

Evident că  $\lambda_0 = \lim \langle Tx_n, x_n \rangle$  și deci  $\lambda_0 \in \overline{W(T)}$ . Fie  $\lambda$  un punct arbitrar în  $\sigma(T)$ , iar  $L$  o dreaptă care trece prin  $\lambda$ . Să notăm cu  $L_T = L \cap \sigma(T)$  și  $\mu_1, \mu_2$  capetele celui mai mic segment închis care conține pe  $L_T$ . În acest caz este clar că  $\mu_i \in \sigma(T)$ ,  $i = 1, 2$  și deci  $\mu_i \in \overline{W(T)}$ . Cum  $\lambda$  este pe segmentul care unește  $\mu_1$  cu  $\mu_2$ , rezultă că se va găsi în  $\overline{W(T)}$  și teorema este demonstrată.

Observație. În general mulțimea  $W(T)$  nu este închisă și în unele teoreme vom considera mulțimea  $\overline{W(T)}$ .

În cele ce urmează vom da o caracterizare a semiplanelor închise care conțin rangul numeric al unui operator.

TEOREMA 2.1.5. Dacă  $H$  este un semiplan închis în planul complex, atunci  $W(T) \subset H$ , dacă și numai dacă

$$(T - \lambda I)^* (T - \lambda I) \geq \text{dist}(\lambda, H)^2 I$$

unde, dacă  $F$  este o mulțime închisă

$$\text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \text{dist}(x, y).$$

Demonstrația acestei teoreme va rezulta din câteva propoziții:

PROPOZIȚIA 2.1.6. Pentru  $T \in \mathcal{L}(E)$  și  $\text{Re } T = \frac{1}{2}(T + T^*) = T_1$

$\operatorname{Re} T \geq 0$  dacă și numai dacă  $(T - \alpha I)^* (T - \alpha I) \geq 0$  oricare ar fi  $\alpha < 0$ .

În adevăr, vom observa că avem identitatea

$$(T - \alpha I)^* (T - \alpha I) - \alpha^2 I = T^* T - \alpha(T + T^*)$$

și suficiența condiției puse se poate arăta astfel: din condiția pusă și identitatea scrisă, rezultă că

$$\alpha(T + T^*) \leq T^* T$$

și cum  $\alpha < 0$ , avem

$$T + T^* \geq \frac{1}{\alpha} T^* T.$$

Pentru  $\alpha \rightarrow -\infty$  deducem

$$T + T^* \geq 0,$$

care este echivalentă cu  $\operatorname{Re} T \geq 0$ .

Să demonstrăm acum necesitatea condiției puse. Fie deci  $\operatorname{Re} T \geq 0$  și deci pentru  $\alpha < 0$ , avem

$$T + T^* \geq \frac{1}{\alpha} T^* T,$$

care în virtutea identității de mai înainte este echivalentă cu condiția din propoziție.

PROPOZIȚIA 2.1.7. Dacă  $H_0 = \{\lambda, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ , atunci

$$W(T) \subset H_0,$$

dacă și numai dacă

$$(T - \lambda I)^* (T - \lambda I) \geq (\operatorname{Re} \lambda)^2 I$$

oricare ar fi  $\lambda \in H_0$ .

*Demonstrație.* Cum

$$\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle = \langle (\operatorname{Re} T) x, x \rangle$$

avem că  $W(T) \subset H_0$ , dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} T \geq 0$ .

Fie acum  $\lambda = a + ib$ ,  $\lambda \in H_0$  și  $a, b$  numere reale. În acest caz cum

$$T - \lambda I = (T - ibI) - aI,$$

$$\operatorname{Re} T = \operatorname{Re} (T - ibI),$$

din propoziția de mai sus rezultă că

$$(T - \lambda I)^* (T - \lambda I) \geq a^2 I,$$

dacă și numai dacă

$$\operatorname{Re}(T - ibI) \geq 0,$$

care revine la  $\operatorname{Re} T \geq 0$ .

Propoziția este demonstrată.

Demonstrația teoremei se face astfel: vom observa mai întâi că teorema enunțată, pentru semiplanul  $H_0$  este chiar propoziția 2 și să considerăm  $f(\lambda) = \mu\lambda + \tau$  care transformă semiplanul  $H$  în  $H_0$  (pentru  $\mu$  și  $\tau$  convenabil aleși,  $|\mu| = 1$ ). Punînd

$$S = f(T) = \mu T + \tau I,$$

avem

$$W(S) = f(W(T)) = \{f(\xi), \xi \in W(T)\}$$

și deci  $W(T) \subset H$ , dacă și numai dacă  $W(S) \subset H_0$ . Cum

$$S - f(\lambda)I = \mu(T - \lambda I),$$

avem și relația

$$(S - f(\lambda)I)^* (S - f(\lambda)I) = (T - \lambda I)^* (T - \lambda I).$$

Dar

$$\operatorname{dist}(f(\lambda), H_0) = \operatorname{dist}(f(\lambda), f(H)) = \operatorname{dist}(\lambda, H)$$

și aplicînd propoziția 2.1.7. operatorului  $S$  obținem concluzia teoremei.

Se pune problema legăturii între norma operatorului  $T \in \mathfrak{L}(E)$  și rangul numeric. Dăm mai întâi

DEFINIȚIA 2.1.8. Prin normă numerică a unui operator vom înțelege numărul definit astfel

$$\omega(T) = \sup \{|\xi|, \xi \in W(T)\}.$$

Următoarele teoreme dau rezultate care justifică denumirea de normă pentru aplicația

$$T \rightarrow \omega(T).$$

TEOREMA 2.1.9. Pentru orice operator  $T \in \mathfrak{L}(E)$  au loc relațiile:

$$1. \omega(T) = \omega(T^*);$$

$$2. \omega(T^*T) = \|T\|^2.$$

*Demonstrație.* Evident.

TEOREMA 2.1.10. Pentru orice operator  $T \in \mathfrak{L}(E)$ , avem

$$\frac{1}{2} \|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|.$$

*Demonstrație.* Cum pentru orice  $x \in E$ , avem

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\|$$

dacă  $\|x\| = 1$  și partea a II-a a inegalității este demonstrată.

Să considerăm identitatea

$$\|Tx\|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle = \frac{1}{2} \langle \lambda e^{2i\theta} T^2x + \lambda^{-1} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx + \lambda^{-1} x \rangle - \frac{1}{2} \langle \lambda e^{2i\theta} T^2x - \lambda^{-1} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x \rangle$$

$$Tx - \lambda^{-1} x \rangle$$

pentru  $\lambda > 0$ . Avem relația

$$|\langle Ty, y \rangle| \leq \omega(T) \|y\|^2,$$

deducem relația

$$|\|Tx\|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle| \leq \omega(T) \left( \lambda^2 \|Tx\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|x\|^2 \right),$$

și pentru  $\lambda^2 = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}$  avem (alegind  $\theta$  astfel ca  $e^{2i\theta} \langle T^2x, x \rangle = |\langle T^2x, x \rangle|$ )

$$\|Tx\|^2 \leq 2\omega(T) \|x\|$$

și deci

$$\|T\| \leq 2\omega(T).$$

Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 2.1.11. Aplicația**

$$T \rightarrow \omega(T)$$

este o normă pe  $\mathcal{L}(E)$  echivalentă cu norma inițială.

*Demonstrație.* Cum proprietățile :

$$1. \omega(T + S) \leq \omega(T) + \omega(S)$$

$$2. \omega(\lambda T) = |\lambda| \omega(T)$$

sînt evidente, proprietatea dată în teorema de mai sus arată echivalența cu cea inițială.

*Observații.* Se poate arăta că constantele  $\frac{1}{2}$  și 1 din teorema 2.1.10.

sînt exacte în sensul că există operatori pentru care avem

$$\omega(T) = \frac{1}{2} \|T\|$$

și operatori pentru care

$$\omega(T) = \|T\|.$$

Exemplele pot fi date chiar pe spații finit-dimensionale.

În adevăr, să considerăm un spațiu Hilbert de dimensiune 2 și fie  $\{e_1, e_2\}$  baza sa ortonormală. Să considerăm operatorul  $T$  definit astfel:

$$1. Te_1 = e_2,$$

$$2. Te_2 = 0.$$

În acest caz avem pentru  $x = \alpha e_1 + \beta e_2$ ,  $\|x\| = 1$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  și deci

$$\langle Tx, x \rangle = \langle \alpha e_2, \alpha e_1 + \beta e_2 \rangle = \alpha \bar{\beta}$$

și

$$\omega(T) \leq \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Să luăm acum  $\alpha = \sqrt{2}/2$ ,  $\beta = \sqrt{2}/2$ , de unde deducem că

$$\omega(T) \geq (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$$

și afirmația este demonstrată.

## §2. TEOREMA LUI HAUSDORFF-TOEPLITZ PE SPAȚII VECTORIALE

Fie  $V$  un spațiu vectorial complex și  $f: V \rightarrow C$  o funcție. Se spune că  $f$  este liniară dacă pentru orice  $\alpha, \beta$  numere complexe,  $x, y$  elemente din  $V$ , avem

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Funcția  $f_1$  se va numi antiliniară dacă

$$f_1(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f_1(x) + \bar{\beta} f_1(y).$$

Să presupunem că avem două spații vectoriale complexe  $V_1$  și  $V_2$ , iar  $F(x, y)$  o funcție definită pe  $V_1 \times V_2$  cu proprietățile

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2, z_2) = \alpha F(x_1, z_2) + \beta F(x_2, z_2)$$

$$F(x_1, \alpha z_2 + \beta \bar{z}_2) = \bar{\alpha} F(x_1, z_2) + \bar{\beta} F(x_1, \bar{z}_2).$$

Vom spune că în acest caz avem o funcțională hermitică biliniară. Forma  $F(x) = F(x, x)$  cu  $(V_1 = V_2)$  se spune că este o formă pătratică hermitiană. Din aceasta rezultă o strînsă legătură între formele pătratice hermitiene și funcționalele biliniare hermitiene; în adevăr, avem o corespondență biunivocă dată, după cum se verifică ușor, prin formula

$$Q(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 i^i \tilde{Q}(x + i^i y),$$

unde  $Q$  este o formă pătratică hermitiană.

Cum, dacă,  $Q$  este o funcțională biliniară hermitică atunci și

$$Q_1(x, y) = \overline{Q(y, x)}$$

este o funcțională biliniară hermitică și deci orice funcțională biliniară hermitică are forma

$$Q = Q_r + iQ_i,$$

unde  $Q_r, Q_i$  sînt simetrice ( $Q(x, y) = \overline{Q(y, x)}$ ); dacă avem forme pătratice,  $Q_r, Q_i$  sînt reale.

Fie  $Q$  o formă pătratică și să punem<sup>1</sup>

$$N_s = \{x, x \in V, Q(x, y) = 0, \text{ oricare ar fi } y \in V\},$$

$$N_a = \{x, x \in V, Q(y, x) = 0 \text{ oricare ar fi } y \in V\}.$$

Prin definiție o funcțională biliniară hermitică  $Q$  este de rang finit dacă  $N_s$  este de codimensiune finită în  $V$  (și rangul său este codimensiunea spațiului  $N_s$ ). Se poate arăta că pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$Q(x, y) = \sum_1^n \overline{F_k(x)} G_k(y), \quad n = \text{rang } Q$$

unde  $\{F_k, G_k\}$  este un sistem de funcționale antiliniare.

Să presupunem acum că  $V$  este un spațiu normat și  $Q$  este o formă pătratică pe  $V$ .

**DEFINIȚIA 2.2.1.** Norma formei pătratice  $Q$  este prin definiție cel mai mic număr  $M$  cu proprietatea că

$$|Q(x)| \leq M \|x\|^2,$$

<sup>1</sup> În cazul unor spații particulare,  $N_s$  reprezintă  $N(T)$  pentru un operator  $T$ , iar  $N_a$  este  $N(T^*)$  unde  $T^*$  este adjunctul lui  $T$ .

iar norma numerică este cel mai mic număr  $\tilde{M}$  cu proprietatea că

$$|Q(x, y)| \leq \tilde{M} \|x\| \|y\|,$$

oricare ar fi  $x, y \in V$ . Vom nota cele două numere  $\|Q\|$  și  $\omega(Q)$  respectiv. Se poate arăta că are loc inegalitatea

$$\omega(Q) \leq \|Q\| \leq C\omega(Q).$$

Teorema lui Hausdorff-Toeplitz se poate demonstra și pentru forme pătratice.

**TEOREMA 2.2.2.** (Hausdorff-Toeplitz). *Fie  $Q$  o formă pătratică pe un spațiu vectorial. În acest caz au loc afirmațiile:*

1°. mulțimea  $\{Q(x), x \in V - \{0\}\}$  este o mulțime convexă în planul complex.

2°. dacă  $\|\cdot\|$  este o normă care provine dintr-o formă pătratică, atunci mulțimea  $\left\{\frac{Q(x)}{\|x\|^2}, x \in V - \{0\}\right\}$  este o mulțime convexă.

*Demonstrație.* Vom observa mai întâi că din 2° rezultă 1° deoarece putem defini pe un spațiu vectorial o normă astfel: fie  $\{e_i\}_i$  o bază Hamel a spațiului și pentru orice  $x \in V$ , care are forma  $x = \sum_{i=1}^n e_{\tau_i} \xi_{\tau_i}$ , să punem

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_{\tau_i}|^2.$$

De asemenea este suficient să demonstrăm afirmația 2° pentru cazul spațiului de dimensiune 2. Să considerăm deci în planul complex numerele  $\frac{Q(x)}{\|x\|^2}$  și  $\frac{Q(y)}{\|y\|^2}$ , iar  $\theta$  astfel ca segmentul care unește punctele  $e^{i\theta} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}$  și  $e^{i\theta} \frac{Q(y)}{\|y\|^2}$  să fie paralel cu axa reală. Evident că în acest caz avem

$$h = \operatorname{Im} e^{i\theta} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \operatorname{Im} e^{i\theta} \frac{Q(y)}{\|y\|^2}$$

și  $e^{i\theta} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} - ih \|x\|^2$  este o formă pătratică, iar segmentul care unește punctele

$$e^{i\theta} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} - ih \text{ și } e^{i\theta} \frac{Q(y)}{\|y\|^2} - ih$$

este pe axa reală. Rezultă că putem presupune că numerele  $\frac{Q(x)}{\|x\|^2}$ ,

și  $\frac{Q(y)}{\|y\|^2}$  sînt reale. Fie  $\alpha, \beta$  numere complexe și

$$f(\alpha, \beta) = \frac{Q(\alpha x + \beta y)}{\|\alpha x + \beta y\|^2} = \frac{|\alpha|^2 Q(x) + \alpha \bar{\beta} Q(x, y) + \bar{\alpha} \beta Q(y, x) + |\beta|^2 Q(y)}{\|\alpha x + \beta y\|^2} +$$

$$+ \frac{|\beta|^2 Q(y)}{\|\alpha x + \beta y\|^2}.$$

Dacă punem  $\xi = |\alpha|$ ,  $\eta = |\beta|$ ,  $\varphi = \arg(\alpha \bar{\beta})$ ,  $B = Q(x, y)$   
 $C = Q(y, x)$ , atunci

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\xi^2 Q(x) + \xi \eta (e^{i\varphi} B + e^{-i\varphi} C) + \eta^2 Q(y)}{\|\alpha x + \beta y\|^2}.$$

Putem alege  $\varphi$ , independent de  $\xi$  și  $\eta$  astfel ca

$$\operatorname{Im}(e^{i\varphi} B + e^{-i\varphi} C) = 0.$$

Să alegem acum  $\xi e^{i\varphi} = \alpha$ ,  $\beta = \eta$  cu  $\xi + \eta = 1$ . În acest caz  $f$  este o funcție de  $\xi = 1 - \eta$  care are proprietatea că

$$f(e^{i\varphi}, 0) = \frac{Q(x)}{\|x\|^2}, \quad f(0, 1) = \frac{Q(y)}{\|y\|^2}$$

și cum este o funcție continuă rezultă că trebuie să aibă proprietatea lui Darboux și deci orice număr pe segmentul care unește  $\frac{Q(x)}{\|x\|^2}$  cu  $\frac{Q(y)}{\|y\|^2}$  este o valoare a funcției  $f$ .

Teorema este demonstrată.

*Observație 2.2.3.* Teorema lui Hausdorff-Toeplitz sub forma dată mai sus are aplicații privind formele pătratice coercive în diferite contexte.

Deoarece nu vom avea nevoie de rezultate în acest sens, nu vom insista asupra acestor aplicații.

### § 3. RANG NUMERIC ÎN SENS LUMER

Vom expune rezultate privind generalizarea noțiunii de rang numeric pentru cazul spațiilor Banach. Rezultatele pe care le expunem sînt grupate în jurul noțiunii de rang numeric introdusă de Lumer. O altă noțiune fundamentală este aceea de operator hermitian pe spații Banach și o definiție naturală este datorată lui Vidav.

Fie  $E$  un spațiu Banach și  $\mathcal{L}(E)$  algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $E$ .

Un spațiu Banach  $E$  se spune că posedă un semiprodus scalar dacă există o aplicație

$$E \times E \rightarrow K$$

notată cu  $[,]$  și care are următoarele proprietăți :

1.  $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$ ;
2.  $[\lambda x, y] = \lambda [x, y] \quad \lambda \in K$ ;
3.  $\|x\|^2 = [x, y] > 0$ , dacă  $x \neq 0$ ;
4.  $|[x, y]|^2 \leq [x, x]^{1/2} [y, y]^{1/2}$ ;
5.  $[x, \lambda y] = \overline{\lambda} [x, y]$ .

$K$  este corpul numerelor reale  $R$  sau  $C$  corpul numerelor complexe după cum  $E$  este real sau complex.

Are loc următoarea :

**LEMA 2.3.1.** 1) Orice spațiu Banach posedă un semiprodus scalar ;  
2) dacă pe un spațiu vectorial  $E$  există aplicația  $[,]$  cu proprietățile 1—5, atunci pe spațiul  $E$  se poate introduce o normă.

*Demonstrație.* Afirmația 1) din lema este exact teorema 1.13.8. Să demonstrăm acum afirmația a doua. Vom avea

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= [x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] \leq \\ &\leq [[x, x]^{1/2} + [y, y]^{1/2}] [x + y, x + y]^{1/2} \end{aligned}$$

care ne dă că

$$[x + y, x + y]^{1/2} \leq [x, x]^{1/2} + [y, y]^{1/2}.$$

Cum însă

$$[\lambda x, \lambda x] = \lambda \cdot \overline{\lambda} [x, x] = |\lambda|^2 [x, x],$$

deducem că

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Rezultă astfel că aplicația

$$x \rightarrow [x, x]^{1/2} = \|x\|$$

este o normă, ținând seama și de axioma 3.

Lema este demonstrată.

Apare în mod natural problema caracterizării spațiilor Hilbert printre spațiile cu semiprodus scalar. Un răspuns este dat în lema următoare :

**LEMA 2.3.2.** *Un spațiu Hilbert  $E$  este un spațiu Banach cu semiprodus unic : un semiprodus scalar este un produs scalar dacă și numai dacă are loc identitatea paralelogramului :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}.$$

*Demonstrație.* Fie  $E$  un spațiu Hilbert și  $[,]$  un semiprodus scalar. Pentru orice  $y \in E$ , fie aplicația

$$x \rightarrow [x, y]$$

este o funcțională liniară și continuă. Conform teoremei de reprezentare există  $z \in E$ , astfel ca

$$[x, y] = \langle x, z \rangle$$

și  $\|z\| = \|y\|$ . Cum avem  $\|y\|^2 = \langle x, z \rangle$  rezultă, din inegalitatea lui

Schwarz că  $z = \lambda y$  și cum  $\langle y, \lambda y \rangle = \|y\|^2$ , rezultă că  $\lambda = 1$  și prima afirmație a lemei este demonstrată.

A doua afirmație se demonstrează astfel. Să presupunem că o normă satisface identitatea paralelogramului. Să arătăm că există un produs scalar  $\langle, \rangle$ , astfel ca

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

oricare ar fi  $x \in E$ . Să presupunem că semiprodusul scalar  $[,]$  satisface identitatea paralelogramului și să punem

$$4 \langle x, y \rangle = [[x + y]]^2 - [[x - y]]^2 + i[[x + iy]]^2 - i[[x - iy]]^2.$$

Să arătăm, că punând  $\|z\|^2 = [[z]]^2 = [z, z]$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Conform definiției avem

$$\begin{aligned} 4 \overline{\langle y, x \rangle} &= 4(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2) = \\ &= 4(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y + ix\|^2 + i\|y - ix\|^2) = \\ &= 4(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y + ix\|^2 + i\|y - ix\|^2) = 4 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

și afirmația este demonstrată.

Pentru a demonstra că este aditiv, vom remarca mai întâi că

$$4 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2,$$

$$4 \langle x, y \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle - i \operatorname{Re} \langle ix, y \rangle$$

și deci

$$\begin{aligned} & 4 \operatorname{Re} \langle x_1 + x_2, y \rangle + 4 \operatorname{Re} \langle x_1 - x_2, y \rangle = \\ & = (\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2 - \|x_1 - \\ & - x_2 - y\|^2) = 2 \{ \|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 \} = 2 \operatorname{Re} \langle x_1, y \rangle \end{aligned}$$

Pentru  $x_1 = x_2$ , avem

$$\operatorname{Re} \langle 2x_1, y \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle x_1, y \rangle$$

și deci

$$\operatorname{Re} \langle x_1 + x_2, y \rangle + \operatorname{Re} \langle x_1 - x_2, y \rangle = \operatorname{Re} \langle 2x_1, y \rangle.$$

Fie acum

$$x_1 = \frac{x'_1 + x'_2}{2} \quad x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{2},$$

deci obținem

$$\operatorname{Re} \langle x'_1, y \rangle + \operatorname{Re} \langle x'_2, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x'_1 + x'_2, y \rangle.$$

De asemenea pentru  $x_1 = i x'_1$ ,  $x'_2 = i x_2$  obținem

$$\langle x'_1 + x'_2, y \rangle = \langle x'_1, y \rangle + \langle x'_2, y \rangle.$$

Rezultă că aplicația

$$x \rightarrow \langle x, y \rangle$$

este aditivă pentru orice  $y$ . Obținem pentru orice număr întreg

$$\langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle$$

și deci pentru orice număr rațional  $p = \frac{m}{n}$  avem

$$\langle px, y \rangle = \left\langle mn \frac{x}{n^2}, y \right\rangle = mn \left\langle \frac{x}{n^2}, y \right\rangle = \frac{mn}{n^2} \langle x, y \rangle = p \langle x, y \rangle.$$



Dacă  $\alpha$  este un număr real, atunci cum

$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

este continuă, avem

$$\langle \alpha x, y \rangle = \lim \langle r_n x, y \rangle = \lim r_n \langle x, y \rangle,$$

unde  $\{r_n\}$  este un șir de numere raționale care converge către  $\alpha$ . Deci

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

oricare ar fi  $\alpha$  real.

Pentru a arăta că

$$\langle zx, y \rangle = z \langle x, y \rangle$$

cu  $z$  complex, este suficient să demonstrăm că

$$\langle ix, y \rangle = i \langle x, y \rangle.$$

Cum avem

$$\begin{aligned} 4 \langle ix, y \rangle &= 4 (\|ix + y\|^2 - \|ix - iy\|^2 + i \|ix + iy\|^2 - i \|ix - iy\|^2) = \\ &= 4 (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i \|x + y\|^2 - i \|x - y\|^2) = \\ &= 4i (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2) = 4i \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

și teorema este astfel demonstrată.

*Observație.* 1) În cazul când spațiul este pe corpul numerelor reale, definirea produsului scalar este mai simplă și anume

$$4 \langle x, y \rangle = [x + y, x + y] - [x - y, x - y].$$

2) În cazul când corpul este cel al cuaternionilor, dacă  $q$  este forma care satisface identitatea paralelogramului, pentru

$$4 p(x, y) = q(x + y) - q(x - y)$$

produsul scalar se definește prin

$$\langle x, y \rangle = p(x, y) + ip(x, iy) + jp(x, jy) + kp(x, ky)$$

și verificarea se face în mod similar. (Am notat un cuaternion prin  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 + j\alpha_3 + k\alpha_4$ , sint numere reale).

Vom da acum câteva rezultate privind semiprodusele scalare pe unele spații particulare.

DEFINIȚIA 2.3.3. Un semiprodus scalar se va numi continuu dacă oricare ar fi  $x, y$  în spațiul respectiv are loc relația

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} [y, x + \lambda y] = \operatorname{Re} [y, x]$$

cu  $\lambda$  real.

DEFINIȚIA 2.3.4. Un semiprodus scalar se va numi uniform continuu dacă relația din definiția 2.3.3. are loc uniform în raport cu  $x, y$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$ .

DEFINIȚIA 2.3.5. Un spațiu Banach se va numi Gâteaux-diferențibil dacă pentru orice  $x, y$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$  există

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}.$$

DEFINIȚIA 2.3.6. Un spațiu Banach se va numi Fréchet-diferențibil uniform dacă limita de mai sus este uniformă în raport cu  $x, y$ . Are loc următoarea :

LEMA 2.3.7. Un semiprodus scalar pe un spațiu Banach are următoarele proprietăți :

- 1) este continuu dacă și numai dacă este Gâteaux-diferențibil.
- 2) uniform continuu dacă și numai dacă este Fréchet-diferențibil uniform.

*Demonstrație.* Pentru orice  $x, y$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$  și  $\lambda > 0$  avem

$$(*) \quad \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq \frac{|[x + \lambda y, x]| - \|x\|^2}{\lambda \|x\|} \geq \frac{\operatorname{Re} \{[x + \lambda y, x] - \|x\|^2\}}{\lambda \|x\|} =$$

$$= \frac{\operatorname{Re} [y, x]}{\|x\|^2}$$

și cum

$$(**) \quad \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \leq \frac{\|x + \lambda y\|^2 - |[x, x + \lambda y]|}{\lambda \|x + \lambda y\|} \leq$$

$$\leq \frac{|[x, x + \lambda y]| + \lambda \operatorname{Re} [y, x + \lambda y] - |[x, x + \lambda y]|}{\lambda \|x + \lambda y\|} = \frac{\operatorname{Re} [y, x + \lambda y]}{\|x + \lambda y\|}.$$

Aceste inegalități arată că dacă proprietățile din definițiile 2.3.3. și 2.3.4. sînt adevărate, atunci sînt adevărate proprietățile din definițiile 2.3.5. și 2.3.6. respectiv. Pentru a demonstra lema vom avea nevoie de încă două relații.

Pentru  $\lambda > 0$  avem

$$(***) \quad \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq \frac{\operatorname{Re} [y, x]}{\|x\|} \geq \frac{\|x + \lambda^* y\| - \|x\|}{\lambda^*}, \lambda^* < 0$$

și deci

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{\operatorname{Re} [y, x]}{\|x\|}$$

dacă presupunem că proprietățile din definițiile 2.3.5. și 2.3.4 au loc.

De asemenea pentru  $\lambda > 0$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$  și din (\*)

$$\begin{aligned}
 (****) \quad & \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \\
 & = \operatorname{Re} [x, x + \lambda y] + \lambda \operatorname{Re} [y, x + \lambda y] - \|x\| \|x + \lambda y\| \cdot \frac{1}{\lambda \|x + \lambda y\|} \geq \\
 & \geq \frac{\operatorname{Re} [y, x]}{\|x\|},
 \end{aligned}$$

care ne dă

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{[x, x + \lambda y] - \|x\| \|x + \lambda y\|\} \geq 0.$$

Dar cum

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re} [y, x + \lambda y]}{\|x + \lambda y\|} \geq \frac{\operatorname{Re} [y, x]}{\|x\|},$$

din (\*) și (\*\*), deducem că

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re} [y, x + \lambda y]}{\|x + \lambda y\|} = \operatorname{Re} \frac{[y, x]}{\|x\|}$$

și deci dacă proprietățile din definițiile 2.3.5 și 2.3.6 au loc atunci și proprietățile 1) respectiv 2) au loc.

Teorema este demonstrată.

Cu ajutorul noțiunii de semiprodus scalar se poate introduce și noțiunea de ortogonalitate.

**DEFINIȚIA 2.3.8.** Pentru orice  $x, y$ , elemente într-un spațiu Banach se spune că  $x$  este ortogonal pe  $y$  dacă  $[y, x] = 0$ . Se spune că  $x$  este ortogonal pe un subspațiu  $E_1$ , dacă  $[y, x] = 0$ , oricare ar fi  $y \in E_1$ .

Mai există o noțiune de ortogonalitate în spații Banach introdusă de Birkhoff și anume:

**DEFINIȚIA 2.3.9.** Elementul  $x$  din spațiul Banach  $E$  se spune că este ortogonal pe elementul  $y \in E$  dacă oricare ar fi scalarul  $\lambda$ , avem

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Se pune problema legăturii între cele două definiții. Aceasta este dată în :

**LEMA 2.3.10.** *Dacă spațiul Banach  $E$  posedă un semiprodus scalar continuu în sensul definiției 2.3.3., atunci cele două definiții sînt echivalente.*

**Observație.** Rezultatul obținut aici ne arată că ambele definiții generalizează noțiunea cunoscută de ortogonalitate de la spații Hilbert.

**Demonstrație.** Să presupunem că  $x$  este ortogonal pe  $y$  în sensul definiției 2.3.8. Cum avem

$$\|x\| \|x + \lambda y\|^2 \geq |[x + \lambda y, x]| = |[x, x] + \lambda[y, x]| = \|x\|^2$$

și deci  $x$  este ortogonal pe  $y$  în sensul definiției 2.3.9. Vom observa că această implicație este adevărată pe orice spațiu Banach.

Fie acum  $x$  ortogonal pe  $y$  în sensul definiției 2.3.9. și deci pentru orice scalar  $\lambda$  avem

$$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

și deci

$$[\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2] \|x + \lambda y\| \geq 0,$$

de unde deducem că

$$\operatorname{Re} \{[x, x + \lambda y]\} + \operatorname{Re} \{\lambda[y, x + \lambda y]\} - |[x, x + \lambda y]| \geq 0$$

și deci

$$\operatorname{Re} \{\lambda[y, y + \lambda y]\} \geq 0.$$

Prin urmare, avem și

$$\operatorname{Re} [y, x + \lambda y] \geq 0; \lambda \geq 0$$

$$\operatorname{Re} [y, x + \lambda y] \leq 0; \lambda \leq 0.$$

Cum semiprodusul scalar este continuu, deducem că pentru  $\lambda$  real avem

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} [y, x + \lambda y] = \operatorname{Re} [y, x]$$

și deci

$$\operatorname{Re} [y, x] = 0.$$

Dacă  $\lambda = i\mu$  cu  $\mu$  real deducem că

$$\operatorname{Re} \{\lambda[y, x + \lambda y]\} = \mu \operatorname{Re} [iy, x + i\mu y].$$

Din continuitate deducem

$$\operatorname{Re} [iy, x] = 0$$

și cum

$$\operatorname{Re} [iy, x] = \operatorname{Im} [y, x],$$

teorema este astfel demonstrată.

Vom defini acum noțiunea de rang numeric pentru un operator și vom stabili câteva proprietăți în legătură cu spectrul operatorului.

**DEFINIȚIA 2.3.11.** Fie  $E$  un spațiu Banach și  $T$  un operator liniar și mărginit pe  $E$ . Să presupunem că  $[,]$  este un semiprodus scalar. Prin rang numeric al operatorului  $T$  în raport cu semiprodusul scalar  $[,]$  vom înțelege mulțimea

$$W(T) = \{[Tx, x], \|x\| = 1\},$$

iar prin rază numerică a operatorului  $T$  numărul

$$\omega(T) = \sup_{\lambda} \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

Se verifică ușor că au loc următoarele afirmații:

1.  $\omega(T) \leq \|T\|$ ,
2.  $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$ ,
3.  $W(T + S) \subset W(T) + W(S) = \{\lambda + \mu, \lambda \in W(T); \mu \in W(S)\}.$

Pentru orice operator,  $P_\sigma$  înseamnă spectrul punctual sau mulțimea valorilor proprii. De o importanță deosebită este și noțiunea de spectru punctual aproximativ.

**DEFINIȚIA 2.3.12.** Prin spectru punctual aproximativ al operatorului  $T$  vom înțelege mulțimea notată cu  $\pi(T)$  definită astfel:  $\lambda \in \pi(T)$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x, \|x\| = 1$ , astfel ca

$$\|(T - \lambda)x\| < \varepsilon.$$

Prin  $\partial_{\sigma(T)}$  vom însemna frontiera spectrului  $\sigma(T)$ . Are loc:

**LEMA 2.3.13.** Pentru orice operator  $T$  liniar și mărginit, avem

$$\partial_{\sigma(T)} \subseteq \pi(T).$$

*Demonstrație.* Fie deci  $\lambda_0 \in \partial_{\sigma(T)}$  și  $\delta = \operatorname{dist}(\lambda_0, \pi(T))$ . Să presupunem că  $\delta > 0$  și să arătăm că obținem o contradicție. Cum  $\lambda_0 \notin \pi(T)$  rezultă că există  $\varepsilon \in (0, \delta)$ , astfel ca

$$\|(T - \lambda_0)x\| \geq \varepsilon \|x\|.$$

Fie acum  $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon/2$  și deci

$$\|(T - \lambda)x\| \geq \|(T - \lambda_0)x\| - |\lambda - \lambda_0| \|x\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \|x\|,$$

care ne arată că  $\lambda \in \pi(T)$ . Fie  $\lambda_n \in \sigma(T)$ ,  $|\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $n = 1, 2, \dots$ , și deci  $(T - \lambda_n)^{-1}$  este mărginit. Să arătăm că  $(T - \lambda_0)E$  este dens în  $E$ . Să presupunem că nu este așa. Deci conform lemei lui F. Riesz există  $y \in E$ ,  $\|y\| = 1$ , astfel ca :

$$\|y - (T - \lambda_0)x\| \geq 1/2,$$

oricare ar fi  $x \in E$ . Cum însă, pentru orice  $n$ ,  $(T - \lambda_n)E$  este dens în  $E$ , există  $y_n$ , astfel ca :

$$1. y_n \in (T - \lambda_n)E,$$

$$2. \|y_n\| = 1,$$

$$3. \|y_n - y\| \leq 1/n.$$

Fie  $x_n = (T - \lambda_n)^{-1} y_n$  și deci avem

$$\|y - (T - \lambda_0)x_n\| \leq \|y - (T - \lambda_n)x_n\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_n\| \leq 1/n + \frac{2}{\varepsilon} |\lambda_0 - \lambda_n|.$$

Dacă  $n$  este suficient de mare obținem

$$\|y - (T - \lambda_0)x_n\| < 1/2$$

care este o contradicție. Rezultă astfel că  $\overline{(T - \lambda_0)E} = E$  și obținem  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ , care este o contradicție. Teorema este demonstrată.

LEMA 2.3.14. Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit atunci

$$\pi(T) \subset \overline{W(T)}$$

(bara înseamnă că noi considerăm închiderea mulțimii).

**Demonstrație.** Dacă  $\lambda \in \pi(T)$  atunci există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel că  $(T - \lambda)x_n \rightarrow 0$  și deci

$$\lim [Tx_n, x_n] = \lambda,$$

ceea ce demonstrează afirmația teoremei.

Pentru rezultatul care urmează avem nevoie de noțiunea de spațiu Banach uniform convex în sensul lui Clarkson.

**DEFINIȚIA 2.3.15.** Un spațiu Banach se spune că este uniform convex dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel ca

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x + y\| > 2 - \delta \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon.$$

Exemple de spații uniform convexe:  $l^p$ ,  $\mathbb{R}^p$ .

Vom avea nevoie de următoarea:

**LEMA 2.3.16.** Dacă  $E$  este un spațiu Banach uniform convex și  $\{a_n\} \subset E$  astfel încât  $\|a_n\| \rightarrow 1$ ,  $\|a_n + a_m\| \rightarrow 2$ , atunci  $\{a_n\}$  este un șir Cauchy.

*Demonstrație.* Vom reaminti, condiția  $\|a_n + a_m\| \rightarrow 2$ , înseamnă că pentru orice  $\eta > 0$  există  $N$  astfel ca  $m, n \geq N$ , atunci

$$|\|a_n + a_m\| - 2| < \eta.$$

Deosebim două cazuri:

a)  $\|a_n\| \leq 1$ ;

b)  $\|a_n\| \rightarrow 1$ .

În primul caz, fie  $\varepsilon > 0$  și  $\delta$  din definiție, de unde rezultă că

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

În cazul b) putem presupune că  $\|a_n\| \neq 0$  și din  $\|a_n\| \rightarrow 1$  rezultă că șirul  $\left\{ \frac{a_n}{\|a_n\|} \right\}$  satisface condiția din 1) și deci șirul  $\left\{ \frac{a_n}{\|a_n\|} \right\}$  este un șir Cauchy deoarece

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left\| \frac{a_n}{\|a_n\|} + \frac{a_m}{\|a_m\|} \right\| = \frac{\|a_n + a_m\|}{\|a_n\|} + \frac{\|a_n\| - \|a_m\|}{\|a_n\| \|a_m\|} \|a_m\| \geq \\ &\geq \frac{\|a_n + a_m\| - \|a_n\| - \|a_m\|}{\|a_n\|} \rightarrow 2 \text{ pentru } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lema este astfel demonstrată.

**LEMA 2.3.17.** Fie  $E$  un spațiu Banach uniform convex și  $T$  un operator liniar și mărginit. În acest caz

$$\{\lambda, \|T\| = |\lambda|\} \cap \overline{W(T)} \subset \partial_{\sigma(T)}.$$

*Demonstrație.* Putem presupune fără a restrânge generalitatea, că  $\lambda = 1 = \|T\|$  și deci există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca  $[Tx_n, x_n] \rightarrow 1$ .

Cum avem  $\left[ \frac{x_n + Tx_n}{2}, x_n \right] \rightarrow 1$ , deducem că

$$1 \leq \lim \left[ \frac{x_n + Tx_n}{2}, x_n \right] \leq \frac{\|x_n + Tx_n\|}{2} \leq 1$$

și deci  $\|x_n + Tx_n\| \rightarrow 2$ . Conform lemei  $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$  și deci  $1 \in \sigma(T)$ . Lema este demonstrată.

**COROLAR.** Orice operator  $T$  definit pe un spațiu Banach uniform convex cu proprietatea că  $\omega(T) = \|T\|$  este normaloid,  $\gamma_T = \|T\|$ .

**Observație.** Pe spații Hilbert demonstrația lemei 2.3.17. este mult mai simplă și anume: fie  $\lambda$  cu proprietățile menționate și  $\{x_n\}$  un șir de elemente astfel ca  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ ,  $\|T\| = |\lambda|$ . Cum avem

$$\|(T - \lambda)x_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n \rangle - \lambda \langle x_n, Tx_n \rangle - \bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle + |\lambda|^2$$

care tinde către zero, deoarece

$$\lim \| (T - \lambda)x_n \|^2 \leq \lim [\lambda^2 - \lambda \langle x_n, Tx_n \rangle - \bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle + |\lambda|^2] = 0.$$

De asemenea pentru acest șir are loc și

$$\lim \| T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \| = 0,$$

după cum se poate verifica ușor în același mod.

Dăm acum câteva rezultate privind structura spațiului dual  $E^*$  în cazul cînd  $E$  satisface condiții legate de semiprodusul scalar și uniform convexitate.

**DEFINIȚIA 2.3.18.** Un spațiu Banach se spune că este strict convex dacă  $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$  cu  $x, y \neq 0$ , atunci există  $\lambda > 0$ , astfel ca  $y = \lambda x$ .

**LEMA 2.3.19.** Orice spațiu uniform convex este strict convex.

În adevăr, fie  $\|x\| = \|y\| = 1$ ,  $x \neq y$ . Atunci  $\|x + y\| = 2 > 2 - \delta$  oricare ar fi  $\delta \in (0, 2)$ , în timp ce  $\|x - y\|$  este pozitiv, ceea ce este o contradicție.

**LEMA 2.3.20.** Dacă  $E$  este un spațiu Banach uniform convex cu semiprodus scalar continuu și  $E_1$  este un subspațiu propriu închis, există un element  $z$  ortogonal în sensul lui Birkhoff, spațiului  $E_1$ .

**Demonstrație.** Exact ca în cazul spațiilor Hilbert se arată că în orice spațiu Banach uniform convex, există un singur element  $x_0 \in E_1$ , astfel ca

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in E_1} \|y - x\|.$$

Fie  $z_0 = y - x_0$  și deci

$$\|z_0\| \leq \|z_0 + x\| \quad x \in E_1$$

și lema este demonstrată.

**LEMA 2.3.21.** Un spațiu Banach  $E$  cu un semiprodus scalar este strict convex dacă și numai dacă  $x, y \neq 0$ ,  $[x, y] = \|x\| \|y\|$ , atunci  $y = \lambda x$ .

**Demonstrație.** În adevăr, dacă  $E$  este strict convex și  $[x, y] = \|x\| \|y\|$  atunci  $y = \lambda x$ . În adevăr, avem

$$\begin{aligned} \|y\| \|x + y\| &\geq |[x + y, y]| = |[x, y] + [y, y]| = \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= \|y\| (\|x\| + \|y\|) \end{aligned}$$

și deci

$$\|x\| + \|y\| = \|x + y\|,$$

de unde rezultă că  $y = \lambda x$ .

Fie acum  $x, y, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  și deci avem

$$\begin{aligned} [x + y, x + y] &= [x, x + y] + [y, x + y] = \|x\| (\|x + y\|) + \\ &+ \|y\| (\|x + y\|) \end{aligned}$$

și trebuie să avem relațiile

$$[x, x + y] = \|x\| \|x + y\|,$$

$$[y, x + y] = \|y\| \|x + y\|,$$

de unde rezultă că

$$x + y = \lambda x,$$

$$x + y = \mu y.$$

Deci

$$x + y = \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right) (x + y),$$

rezultă că

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$$

și

$$\frac{1}{\lambda} y = \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) x,$$

adică  $y = \mu x$  cu  $\mu > 0$  și lema este demonstrată.

Are loc următoarea teoremă de reprezentare dată în :

**LEMA 2.3.22.** Fie  $E$  un spațiu Banach cu un semiprodus scalar continuu. În acest caz orice funcțională liniară din dualul  $E, f \in E^*$  are forma  $f(x) = [x, y]$  cu  $y \in E$ .

**Demonstrație.** Demonstrația pe care o dăm este o modificare a celei date în cazul spațiilor Hilbert. Dacă  $f$  este identic zero, atunci nu avem ce demonstra căci putem lua  $y = 0$ . Dacă  $f$  nu este identic nulă, atunci  $\{x, f(x) = 0\}$  nu este identic cu  $E$  și este un subspațiu propriu închis al lui  $E$  și conform rezultatului de mai înainte există un element ortogonal acestui subspațiu. Fie acesta  $y_0$ . Dacă  $x \in N = \{x, f(x) = 0\}$  atunci avem

$$f(x) = 0 = [x, y_0].$$

Cînd  $x = y_0$  avem  $f(x) = [x, y_0] = f(y_0)$  cu  $y = \frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2} y_0$ .

Cum orice  $x \in E$  se poate reprezenta sub forma

$$x = z + \lambda y_0, \quad z \in N,$$

atunci pentru  $\lambda = f(x)/f(y_0)$  avem,

$$f(x) = f(z + \lambda y_0) = [z + \lambda y_0, y] = [x, y]$$

și teorema de reprezentare este demonstrată. Vom remarca faptul că  $y$  din teorema de reprezentare este și unic. În adevăr, să presupunem că există  $y'$  astfel ca

$$f(x) = [x, y']$$

și deci

$$\|y\|^2 = [y, y'] \leq \|y\| \cdot \|y'\|, \quad \|y'\|^2 \leq \|y\| \cdot \|y'\|.$$

Astfel

$$[y, y'] = \|y\| \cdot \|y'\|,$$

de unde rezultă că  $y = \lambda y'$  și deci  $y = y'$ .

De asemenea putem demonstra că are loc și

**LEMA 2.3.23.** *Dacă  $E$  este un spațiu Banach cu semiprodus scalar uniform continuu atunci dualul său  $E^*$  este de același tip.*

*Demonstrație.* Vom defini un semiprodus scalar în  $E^*$  prin

$$[f, g] = [y, x],$$

unde  $x, y$  sînt elemente care intră în reprezentarea dată în lema 2.3.22 pentru  $f$  și  $g$  avem

$$f(z) = [z, x],$$

$$g(z) = [z, y].$$

Se verifică ușor că avem chiar un semiprodus scalar.

Conform unei teoreme a lui Smulian rezultă că  $E$  are proprietatea de a fi cu semi-produs scalar uniform continuu.

Lema este demonstrată.

#### § 4. EXEMPLE

Vom menționa cîteva exemple de spații cu semi-produs scalar cu proprietăți speciale.

1) spațiul Banach real  $\mathcal{E}^p(X, B, \mu)$ ,  $2 \leq p < \infty$ ,

$$[x, y] = \frac{1}{\|y\|_p^{p-2}} \int_X x \|y\|^{p-1} \operatorname{sgn} x \, d\mu,$$

care are proprietățile enunțate și proprietatea de a fi uniform continuu.

2) spațiul Minkowski. Un spațiu Minkowski este un spațiu afin  $n$ -dimensional metric cu metrica  $d$  dată de o funcție  $F$  cu următoarele proprietăți :

1.  $d(x, y) = F(y, x)$ ,
  2.  $F(x) > 0$  dacă  $x \neq 0$ ,
  3.  $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$ ,  $\lambda$  real,
  4.  $F(x + y) \leq F(x) + F(y)$  și egalitatea avînd loc dacă și numai dacă  $y = \lambda x$  cu  $\lambda > 0$ ,
  5.  $F$  este de clasă  $C^2$  în fiecare din argumentele sale.
- Din teorema lui Euler privind funcțiile omogene rezultă că

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = F(x),$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \quad x_i = 0$$

și avem identitatea

$$\frac{1}{2} \sum \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + F(x) \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i},$$

Deducem că are loc relația

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = F(x) \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

și de asemenea relația

$$\frac{1}{2} \sum \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = F^2(x).$$

Să punem  $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$  și să definim pe spațiul Minkovskian forma

$$[y, x] = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$$

care utilizînd proprietățile funcțiilor convexe de clasă  $C^2$

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j > 0$$

și aplicînd teorema de medie se pot demonstra proprietățile de la semi-produs scalar.

Vom da acum elemente ale teoriei unor clase de operatori definiți pe spații Banach și care să reprezinte analogul operatorilor hermitieni, unitari și normali cît și al altor clase.

## § 5. UNELE APLICAȚII

Vom da acum o aplicație a noțiunii de semiprodus scalar pe spații Banach la caracterizarea unei clase de operatori. Are loc:

**TEOREMA 2.5.1.** *Fie  $X$  un spațiu Banach și  $T: X \rightarrow X$ . Operatorul  $T$  este o izometrie dacă și numai dacă există un semiprodus scalar  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  astfel ca*

$$\langle\langle Tx, Ty \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle,$$

oricare ar fi  $x, y$  în  $X$ .

*Demonstrație.* Este evident că condiția pusă este suficientă.

Să arătăm că este necesară și fie  $[\cdot, \cdot]$  un semiprodus scalar pe  $X$  și să definim

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \lim [T^n x, T^n y]$$

unde  $\lim$  este o limită Banach. Este ușor de văzut după cum rezultă din proprietățile  $\lim$ , că avem în fapt un semiprodus scalar. Cum  $\lim$  este invariantă la translație, deducem că

$$\langle\langle Tx, Ty \rangle\rangle = \lim [T^{n+1} x, T^{n+1} y] = \lim [T^n x, T^n y]$$

și afirmația teoremei este demonstrată.

**TEOREMA 2.5.2.** *Un operator  $T$  definit pe un spațiu Banach este similar cu o izometrie dacă și numai dacă există  $\delta > 0$  și  $M < \infty$ , astfel ca pentru orice întreg  $n$  și orice  $x \in X$ , să avem*

$$\|T^n x\| \geq \delta \|x\|, \quad \|T^n\| \leq M.$$

*Demonstrație.* Să demonstrăm că condițiile puse sînt suficiente. Fie pentru aceasta, o normă

$$\|x\|_* = \lim \|T^n x\|,$$

care este echivalentă cu norma inițială, deoarece

$$\delta \|x\| \leq \|x\|_* \leq M \|x\|.$$

Este evident că pe spațiul Banach  $(X, \|\cdot\|_*)$ ,  $T$  este un operator care este o izometrie și este similar cu  $T$ .

Teorema este demonstrată.

Pe spații Hilbert este ușor de văzut că dacă  $T$  este un operator izometric și  $\xi \in \{z \in \sigma(T), |z|=1\}$  atunci

$$E_\xi = \{x, Tx = \xi x\}$$

formează o familie de subspații ortogonale.

Demonstrăm acum că același lucru se întâmplă pe spații Banach.

**TEOREMA 2.5.3.** *Dacă  $T$  este un operator izometric atunci*

$$E_\xi = \{x, Tx = \xi x\}, |\xi| = 1$$

formează o familie de subspații ortogonale.

*Demonstrație.* Conform rezultatelor expuse mai înainte este suficient să demonstrăm că  $x \in E_\xi, y \in E_\eta, \xi \neq \eta$ , atunci  $y \perp x$ , adică  $[y, x] = 0$ . În adevăr, să considerăm semiprodusul scalar cu proprietatea din teorema 2.5.1. și deci avem

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle\langle Tx, Ty \rangle\rangle = \xi \bar{\eta} \langle\langle x, y \rangle\rangle$$

care ne dă că  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$ . Aceasta implică evident că

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|,$$

oricare ar fi  $\lambda$  deoarece avem,

$$\|x + \lambda y\| \|x\| \geq |\langle\langle x + \lambda y, x \rangle\rangle| = |\langle\langle x, x \rangle\rangle + \lambda \langle\langle y, x \rangle\rangle| = \langle\langle x, x \rangle\rangle = \|x\|^2$$

și teorema este demonstrată.

Un rezultat de acest tip se poate demonstra pentru o clasă de operatori definită pe spații Banach.

**DEFINIȚIA 2.5.4.** Un operator  $T$  definit pe un spațiu Banach  $X$  se spune că este o contracție unimodulară dacă :

1.  $\|T\| \leq 1$ ,
2.  $\sigma(T) \subset \{z, |z|=1\}$ .

Vom demonstra că are loc

**TEOREMA 2.5.5.** *Dacă  $T$  este o contracție unimodulară definită pe un spațiu Banach, atunci*

$$E_\xi = \{x, Tx = \xi x\}, |\xi| = 1$$

este o familie de subspații, ortogonale.

*Demonstrație.* Pentru orice  $x, y \in X$  să punem

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \lim [T^n x, T^n y]$$

care are toate proprietățile semiproduselor scalare exceptînd

$$\langle\langle x, x \rangle\rangle = \|x\|^2,$$

care nu este adevărată pentru toate elementele  $x$  din  $X$ . Vom observa că

$$\langle\langle x, x \rangle\rangle = \|x\|^2$$

este adevărată pentru toate elementele din spațiile  $E_\xi$ . Deducem că are loc relația

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$$

pentru  $x \in E_\xi$ ,  $y \in E_\eta$ ,  $\xi \neq \eta$ . Ca mai sus, deducem că

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

oricare ar fi  $\lambda$ , și teorema este demonstrată.

Este natural să punem următoarea problemă: rămîne teorema 1.4. adevărată pentru operatori cu proprietățile următoare:

1.  $\omega(T) \leq 1$ ,
2.  $\sigma(T) \subseteq \{z, |z| = 1\}$ ,

care se mai numesc și contracții numerice unimodulare. Vom observa că pe spații Hilbert răspunsul este afirmativ.

Vom arăta acum că izometriile au proprietatea importantă legată de noțiunea de normalitate pe spații Hilbert.

**TEOREMA 2.5.6.** *Un operator  $T$  care este o izometrie este de clasă (N) adică satisface relația*

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|, \|x\| = 1.$$

*Demonstrație.* Fie  $\langle\langle, \rangle\rangle$  semiprodusul scalar definit ca mai înainte prin

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \lim [T^n x, T^n y],$$

care ne dă că

$$\begin{aligned} \langle\langle Tx, Tx \rangle\rangle &= \langle\langle x, x \rangle\rangle = \|x\|^2 = \lim [T^n x, T^n x] = \\ &= \lim [T^{2n} x, T^{2n} x] = \langle\langle T^2 x, T^2 x \rangle\rangle \end{aligned}$$

și afirmația este demonstrată.

**Observația 2.5.7.** Teorema 2.5.6. este interesantă în legătură cu noțiunea de operator isoabelian, adică un operator  $U$  pentru care există un semiprodus scalar  $[,]$ , astfel ca

$$[Ux, y] = [x, U^{-1}y]$$

care reprezintă generalizarea operatorilor unitari. Din teorema 2.5.1. rezultă că un operator este isoabelian dacă și numai dacă este o izometrie invertibilă.

*Observația 2.5.8.* Exemple de operatori izometrice vor fi dați cu ajutorul operatorilor hermitici pe spații Banach.

## § 6. RANG NUMERIC PE SPAȚII BANACH ȘI ALGEBRE BANACH

Vom prezenta acum o variantă a noțiunii de rang numeric în cazul când operatorul este definit pe un spațiu Banach. De asemenea vom arăta cum se poate defini rangul numeric pentru un element într-o algebră Banach.

Clase de operatori reprezentând analogul unor clase foarte cunoscute în cadrul spațiilor Hilbert ca, de exemplu, operatorii hermitici și normali, vor fi de asemenea considerate mai întâi pentru algebra operatorilor liniari și mărginiți pe un spațiu Banach și apoi în cadrul algebrelor Banach arbitrare.

6.1. Noțiunea de rang numeric pentru operatori pe spații Banach, în sensul lui Palmer.

Fie  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach și  $x \in \mathfrak{X}$  un element arbitrar. Să punem

$$C(x) = \{x^* \in \mathfrak{X}^*, \|x^*\| = \|x\|, x^*(x) = \|x\|^2\}$$

unde  $\mathfrak{X}^*$  este dualul lui  $\mathfrak{X}$ . Mulțimea  $C(x)$  este numită mulțime conjugată a lui  $x$ . Este clar că mulțimea  $C(x)$  este nevidă, afirmație care rezultă din teorema lui Hahn-Banach. Aceasta este o mulțime de asemenea convexă.

Exemplele următoare dau anumite indicații privind natura mulțimilor  $C(x)$ .

( $\alpha$ ) Fie  $\Omega$  un spațiu compact și  $\mathcal{C}(\Omega)$  spațiul Banach al funcțiilor continue pe  $\Omega$  cu valori complexe, cu norma

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$$

și să punem pentru fiecare  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$M_f = \{\omega, \omega \in \Omega, |f(\omega)| = \|f\|\}.$$

Este ușor de văzut că  $M_f$  este o mulțime închisă. Deoarece  $\Omega$  este compact și  $f$  continuă,  $M_f$  este nevidă.

Dacă  $\mu$  este o măsură Borel regulată cu suportul în  $M_f$ ,  $\mu$  nenegativă,  $\mu(M_f) = 1$ , atunci

$$f^*(f) = \int \bar{f} d\mu$$

este în  $C(f)$  și se poate arăta că orice  $f^* \in C(f)$  are o astfel de reprezentare.

( $\beta$ ). Fie  $\mathfrak{L}^p(X, d\mu)$ ,  $1 < p < \infty$  și  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ . Aici  $\mu$  este o măsură arbitrară nenegativă definită pe spațiul cu măsură  $X$ . Dacă  $f \in \mathfrak{L}^p(X, d\mu)$  atunci

$$C(f) = \{\bar{f} |f|^{p-2} \|f\|^{2-p}\}.$$

(γ) Fie  $X = H$  un spațiu Hilbert. În acest caz

$$C(x) = \{x\}.$$

Vom defini acum noțiunea de rang numeric pentru operatori definiți pe spații Banach.

DEFINIȚIA 2.6.1. Dacă  $T$  este un operator cu domeniul  $\mathfrak{D}_T \subset \mathfrak{X}$ , atunci rangul său numeric este mulțimea

$$W(T) = \{x^*(Tx), x \in \mathfrak{D}_T, \|x\| = 1, x^* \in C(x)\}.$$

*Observație.* Noțiunea de rang numeric introdusă aici, urmînd pe T. W. Palmer coincide cu noțiunea de rang numeric, introdusă pentru prima dată pe spații Banach de către G. Lumer, atunci cînd mulțimea  $C(x)$  se reduce la un singur element. [A se vedea și def. 2.3.11.]

Vom da acum cîteva exemple care arată natura mulțimii  $W(T)$ . Vom reaminti mai întîi că dacă  $\mathfrak{X} = H$  este un spațiu Hilbert și  $T$  un operator liniar și mărginit, mulțimea  $W(T)$  este convexă.

(α) Fie  $\Omega$  un spațiu compact și  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\Omega)$  spațiul Banach al funcțiilor continue pe  $\Omega$  cu norma

$$\|f\| = \sup_{\omega} |f(\omega)|.$$

Să considerăm operatorul  $T$  definit prin

$$T(g) = fg,$$

unde  $f$  este un element fix din  $\mathcal{C}(\Omega)$ , iar  $g$  arbitrar în  $\mathcal{C}(\Omega)$ . În acest caz

$W(T) \subset \text{conv} \{f(\omega)\} = \text{înfașurătoarea convexă a mulțimii } \{f(\omega)\}_{\omega \in \Omega}.$

(β) Așa după cum am menționat mai sus, în cazul spațiilor Hilbert mulțimea  $W(T)$  este convexă. În cazul spațiilor Banach această proprietate nu mai este adevărată. În adevăr, să considerăm spațiul

$$l_1^2 = \{(x_1, x_2)\}$$

cu norma  $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$  și operatorul  $T$  definit cu ajutorul matricei

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

și care conține punctele

$$[1, 2] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + i$$

$$[1, 2] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + i$$

și nu conține numărul „i” care este o combinație convexă a numerelor  $z + i$  și  $-z + i$ .

Dăm acum câteva proprietăți ale rangului numeric :

**TEOREMA 2.6.2.** Dacă  $T$  este un operator cu  $\mathfrak{D}_T \subset \mathfrak{X}$  atunci următoarele afirmații au loc :

- 1) închiderea rangului numeric conține spectrul punctual aproximativ al operatorului,
- 2) dacă  $T_1$  și  $T_2$  sînt doi operatori, iar  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  două numere complexe atunci

$$W(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) \subseteq \alpha_1 W(T_1) + \alpha_2 W(T_2).$$

- 3) dacă  $\{T_n\}$  este un șir de operatori care converge slab către operatorul  $T$ , atunci

$$W(T) \subset \{\lambda, \lambda = \lim \lambda_n, \lambda_n \in W(T_n)\}.$$

*Demonstrație.* (1) După cum se știe numărul  $\lambda$  este în spectrul punctual aproximativ al operatorului  $T$  dacă și numai dacă există șirul de elemente  $x_n$  cu  $\|x_n\| = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $x_n \in \mathfrak{D}_T$ , astfel ca

$$\lim \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0.$$

De aici rezultă imediat că dacă  $x_n^* \in C(x_n)$

$$x_n^*(\lambda - T)x_n \rightarrow 0$$

și deci  $\lim x_n^*(Tx_n) = \lambda$  de unde rezultă afirmația făcută.

(2) este evidentă.

(3) dacă  $x \in \mathfrak{D}_T$  și  $x^* \in C(x)$ , avem

$$\lim x^*(Tx_n) = x^*(Tx)$$

de unde afirmația făcută.

*Observație.* Deoarece spectrul aproximativ al unui operator  $T$  conține spectrul punctual, spectrul continuu și frontiera spectrului, de unde rezultă că aceste mulțimi sînt în închiderea rangului numeric.

**DEFINIȚIA 2.6.3.1)** Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $\mathfrak{X}$ , atunci

$$\tilde{\omega}(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}$$

este numită raza numerică a lui  $T$ .

2) raza spectrală a lui  $T$  este prin definiție numărul

$$\gamma_T = \lim \|T^n\|^{1/n} = \sup \{|\lambda_2|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

În cele ce urmează vom prezenta unele rezultate privind funcțiile considerate mai sus.

TEOREMA 2.6.4. Dacă  $T$  este ca în definiția 2.6.3., atunci

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|e^{-itT}\| - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|I - itT\| - 1}{t} = \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T)\} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Vom demonstra mai întâi că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T + tI\| - t = \sup \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\}.$$

În adevăr pentru  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\|x\| = 1$  și  $x^* \in C(x)$

$$\|T + tI\| \geq \operatorname{Re}(x^*(Tx + tx)) = t + \operatorname{Re} x^*(Tx),$$

de unde rezultă că

$$\|T + tI\| - t \geq \sup \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\}.$$

Să arătăm acum că are loc și inegalitatea în sens contrar. Vom avea

$$\begin{aligned} \|T + tI\| &= \|(T^2 - t^2I)(T - tI)^{-1}\| \leq \\ &\leq t^2 \|(T - tI)^{-1}\| + \|T^2\| \|(T - tI)^{-1}\| \leq \\ &\leq t^2 d(t, W(T))^{-1} + o(1) \leq t^2 [t - \sup \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\}]^{-1} + o(1) \end{aligned}$$

și deci

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|T + tI\| - t \leq \sup \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\}.$$

Relația este astfel demonstrată.

Să demonstrăm acum că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{itT}\|}{t} = \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T)\}.$$

Într-adevăr, cum avem pentru orice  $x$

$$\|e^{itT}x\| = \|I + itT\| + o(t),$$

dacă  $t$  este suficient de mic, și deci

$$\begin{aligned} \|e^{-itT}\| &= \sup \{\|e^{-itT}y\|, \|y\| = 1\} = \sup \left\{ \frac{\|x\|}{\|e^{itT}x\|}, \|x\| = 1 \right\} < \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|x\|}{1 - tx^*(Tx) + o(t)}, \|x\| = 1 \right\} < \\ &< \frac{1}{1 - t \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T)\} + o(t)} = 1 + t \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T)\} + o(t). \end{aligned}$$

Obținem în acest mod că

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|e^{itT}\| - 1}{t} = \sup \{ \operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T) \}.$$

Dar

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|I - itT\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|e^{-itT}\| - 1}{t}$$

și

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \|e^{itT}\| - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|I - itT\| - 1}{t},$$

de unde deducem egalitatea indicată mai sus.

*Observație.* În existența limitelor de mai sus am folosit următoarea afirmație: dacă  $f(t)$  este o funcție subaditivă și mărginită pe  $(a, \infty)$ , atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \inf_{t > a} \frac{f(t)}{t}.$$

Această afirmație se demonstrează astfel: cum  $f(t)$  este mărginită să punem

$$\beta = \inf_{t > a} \frac{f(t)}{t}$$

care este sau finită sau  $-\infty$ . Vom presupune că  $\beta$  este finit, dacă este  $-\infty$  se poate face un raționament similar. Fie acum  $b > a$  astfel ca  $f(b) < (\beta + \varepsilon)b$  și să punem

$$(n+2)b < t < (n+3)b,$$

de unde rezultă

$$\beta < \frac{f(t)}{t} < \frac{nb}{t} \cdot \frac{f(b)}{b} + \frac{f(t-nb)}{t} < \frac{nb}{t}(\beta + \varepsilon) + \frac{f(t-nb)}{t}.$$

Cum  $t - nb \in [2b, 3b]$  deducem că  $f(t - nb)$  este mărginită inferior și membrul drept al inegalității de mai sus tinde către  $\beta + \varepsilon$ , dacă  $t \rightarrow \infty$  și deci  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}$  există. Este evident că este egală cu  $\beta$ .

Din teorema de mai înainte rezultă o formulă de calcul pentru raza numerică dată de Lumer.

**TEOREMA 2.6.5.** Pentru orice operator liniar și mărginit are loc relația

$$\omega(T) = \tilde{\omega}(T) = \max_0 \lim_{t \rightarrow \infty} (\|T + te^{i\theta}I\| - t).$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema 2.6.4.

Următoarea teoremă prezintă un rezultat privind spectrul unui operator liniar mărginit.

**TEOREMA 2.6.6.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $X$ , atunci*

$$\inf_{t>0} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t} = \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in \sigma(T)\}$$

*Demonstrație.* Faptul că cele două expresii,  $\inf_{t>0} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t}$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{-itT}\|}{t}$  sînt egale, rezultă din afirmația de mai înainte privind funcțiile subaditive în același mod ca în teorema 4.

Cum dacă  $\Phi(t) = \log \|e^{-itT}\|$  deducem că este o funcție subaditivă și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{-inT}\|^{1/n} = \log \{\max |\lambda|, \lambda \in \sigma(e^{-T})\} =$$

$$= \log \{\max |e^{-i\lambda}|, \lambda \in \sigma(T)\} = \max \{\overline{\operatorname{Im} \lambda}, \lambda \in \sigma(T)\},$$

afirmația teoremei este acum evidentă.

Are loc de asemenea analogul teoremei 2.6.6. pe care numai o enunțăm :

**TEOREMA 2.6.7.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $x$  atunci*

$$\gamma(T) = \max_0 \left\{ \inf_{t>0} \frac{\log \|e^{i\theta t T}\|}{t} \right\} = \max_0 (\inf \log \gamma(e^{i\theta T}))$$

cu  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Următoarea teoremă arată o legătură între raza numerică și normele pe un spațiu Banach.

**TEOREMA 2.6.8.** *Pe spațiul Banach  $\mathcal{L}(X)$  al operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul Banach  $X$ , cu norma  $\|\cdot\|$ ,*

$$T \in \mathcal{L}(X), \quad T \rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

*aplicația*

$$T \rightarrow \tilde{\omega}(T)$$

*este o normă echivalentă cu norma  $\|\cdot\|$ .*

*Demonstrație.* Faptul că  $T \rightarrow \tilde{\omega}(T)$  este normă este evident. Rămîne să demonstrăm că această normă este echivalentă cu norma  $T \rightarrow \|T\|$ .

Mai mult, vom demonstra că are loc șirul de inegalități

$$\gamma(T) \leq \tilde{\omega}(T) \leq \|T\| \leq e\tilde{\omega}(T),$$

în care numai  $\|T\| \leq e\tilde{\omega}(T)$  mai trebuie demonstrată.

Vom da demonstrația lui B.W. Glickfeld și vom prezenta un exemplu care arată că numărul „e” reprezintă cea mai bună constantă care poate fi luată în inegalitatea de mai sus.

Să presupunem că  $T$  este un operator, astfel că  $\tilde{\omega}(T) < 1$  și cum raza spectrală  $r(T) < \tilde{\omega}(T)$ , deducem că  $I - T$  este un operator invertibil. Dacă  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\|x\| = 1$  și  $x^* \in C(x)$  vom avea

$$\|(I - T)x\| \geq |x^*(I - T)x| \geq 1 - \omega(T)$$

și deci pentru orice  $x$  arbitrar în  $\mathfrak{X}$ , vom obține

$$\|(I - T)x\| \geq (1 - \tilde{\omega}(T)) \|x\|.$$

Să luăm acum  $x = (I - T)^{-1}y$  cu  $\|y\| = 1$ , în relația de mai sus,

$$1 \geq (1 - \tilde{\omega}(T)) \|(I - T)^{-1}y\|,$$

care ne dă

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{\omega}(T)}.$$

Să considerăm acum  $T$  cu proprietatea că  $r(T) < 1$  și să arătăm că pentru orice  $n$  avem relația

$$T = \frac{1}{n \cdot 2\pi i} \int_C \frac{\xi^n}{(\xi - T)^n} d\varphi,$$

unde  $C$  este cercul unitate.

Pentru a demonstra această formulă vom observa mai întâi că, formal, aceasta se obține din formula

$$(*) \quad T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^n}{(\xi - T)} d\xi,$$

prin derivare formală de  $(n - 1)$  ori în raport cu  $T$ . Aceasta poate fi justificată astfel: formula este, adevărată dacă  $T$  este un număr complex în cercul unitate și dacă  $C'$  este un cerc cu centrul în origină iar  $\xi$  este cu modulul 1, vom avea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dz}{(\xi - z)^n (z - T)} = \frac{1}{(\xi - T)^n},$$

de unde deducem că

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\xi^n}{(\xi - T)^n} d\xi &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \int_{C'} \frac{\xi^n}{(\xi - z)^n (z - T)} dz d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2 \cdot n} \int_C \int_{C'} \frac{\xi^n d\xi dz}{(\xi - z)^n (z - T)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dz}{z - T} = T \end{aligned}$$

și afirmația este demonstrată. În acest caz dacă  $T$  este un operator cu proprietatea că  $\tilde{\omega}(T) < 1$ , deducem că

$$\|T\| \cdot n(1 - \tilde{\omega}(T))^n < 1$$

oricare ar fi  $n$ . În adevăr din formula (\*) obținem

$$\|T\| \leq \frac{1}{n} \cdot \max_{|\xi|=1} \|(\xi - T)^{-1}\|^n$$

și din  $\|(\xi - T)^{-1}\| \leq (1 - \tilde{\omega}(T))$  deducem că are loc relația cerută (\*).

Demonstrația inegalității  $\|T\| \leq e\tilde{\omega}(T)$  este acum simplă. Într-adevăr, dacă  $\tilde{\omega}(T) = 0$  deducem că

$$\|T\| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

oricare ar fi întregul  $n$ . Deci  $T = 0$ . Dacă  $\tilde{\omega}(T) \neq 0$  putem presupune că  $\tilde{\omega}(T) = 1$ . Deci pentru orice întreg  $n$  vom avea

$$\|T\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

și pentru  $n \rightarrow \infty$  obținem afirmația făcută. Teorema este demonstrată. Următorul exemplu arată că există operatori  $T$  pentru care  $\|T\| = e\tilde{\omega}(T)$ ; Menționăm că M.J. Crabb a arătat că există un operator, astfel ca

$$\|T^n\| = n! (e/n)^n \tilde{\omega}(T)$$

oricare ar fi întregul  $n$ .

Fie pentru aceasta  $S = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  și  $f, g$  două funcții definite pe  $S$  prin

$$f(1) = e^t \log t, \quad g(t) = t$$

și să punem

$$P = \{rf + sg; r, s \geq 0\}.$$

Se observă că  $f$  are următoarele proprietăți:

1.  $f(1/e) = 1, f(1) = 0, f \geq 0, f', f$  sînt strict descrescătoare  $f'(1/2) = 0$  și  $f'(1) = 0$ ,

2.  $f(t)/t - f'(t) = e$  oricare ar fi  $t \in [1/e, 1]$ .

Dacă  $h \in P$  și  $h \neq 0$ , atunci există un singur punct  $s_h \in S$  astfel ca

$$\|h\| = |h(s_h)|.$$

Să definim acum o aplicație  $[\cdot]$  pe spațiul  $P \times P$  cu valori reale, prin relația

$$[u, v] = u(s_u) \cdot v(s_v)$$

care satisface proprietățile următoare :

$$(1) \quad [u_1 + u_2, v] = [u_1, v] + [u_2, v],$$

$$(2) \quad [ru, v] = r[u, v],$$

$$(3) \quad [u, u] = \|u\|^2,$$

$$(4) \quad [u, v] \leq \|u\| \|v\|.$$

În cele de mai sus am notat pentru orice  $u \in P$  prin  $s_u$  punctul unic din  $S$  pentru care avem relația  $\|u\| = |u(s_u)|$ .

Să definim acum o aplicație  $P$  pe mulțimea  $P$  prin

$$\tilde{S}(rf + sg) = rg$$

și să definim

$$\|\tilde{S}\| = \sup \{\|\tilde{S}h\|, h \in P, \|h\| = 1\},$$

$$|W(\tilde{S})| = \sup \{[\tilde{S}h, h], h \in P, \|h\| = 1\}.$$

Să arătăm că  $\|\tilde{S}\| = 1$  și  $W(\tilde{S}) = 1/e$ . În adevăr, avem

$$\|\tilde{S}(rf + sg)\| = r\|g\| \leq \|rf + sg\|,$$

de unde rezultă că  $\|\tilde{S}\| \leq 1$ . Cum însă  $\tilde{S}(f) = g$  și  $\|f\| = \|g\| = 1$  deducem că  $\|\tilde{S}\| = 1$ .

Să demonstrăm acum cealaltă relație. Fie pentru aceasta  $y \in S$  arbitrar și să notăm prin  $\Gamma_y$  mulțimea

$$\{h, h \in P, \|h\| = 1, sh = y\}$$

și să punem

$$W_y = \sup \{[\tilde{S}h, h], h \in \Gamma_y\}.$$

Relația va fi demonstrată dacă arătăm că pentru orice  $y$ ,  $W_y = 1/e$ . Dar cum pentru  $h = rf + sg$  cu  $\|h\| = 1$  avem

$$[\tilde{S}h, h] = [rg, h] = rs_h$$

de unde, rezultă că

$$W_y = \sup \{r_y, rf + sg \in \Gamma_y\}$$

și cînd  $y = 1/2$  avem  $\Gamma_{1/e} = \{f\}$  de unde  $W_{1/e} = 1/e$ .

Dacă  $y \in (1/e, 1)$ ,  $rf + sg \in \Gamma_y$  dacă și numai dacă

$$rf(y) + sy = 1,$$

$$rf'(y) + s = 0.$$

În acest caz există  $r$  și  $s$  unici

$$r = (f(y) - f'(y)y)^{-1} = 1/ey,$$

$$s = -f'(y) (f(y) - f'(y)y)^{-1} = -f'(y)/ey,$$

de unde rezultă că

$$W_y = (1/ey) y = 1/e.$$

Să presupunem acum că  $y = 1$ . În acest caz  $rf + sg \in \Gamma_1$  dacă și numai dacă  $r \leq -1/f'(1)$  și  $s = 1$ . Deci  $W_1 = -1/f'(1) = 1/e$ .

Dacă  $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$  să definim  $f^*$  și  $g^*$  pe  $S \times \Gamma$  prin

$$f^*(t, z) = zf(t),$$

$$g^*(t, z) = g(t),$$

unde  $f$  și  $g$  sînt funcțiile definite mai înainte pe  $S$  și să considerăm spațiul

$$X = \{\lambda f^* + \mu g^*; \lambda, \mu \text{ numere complexe}\}.$$

Pe  $X \times X$  putem defini aplicația

$$[\varphi, \psi] = \varphi(y_\psi) \psi(y_\psi),$$

unde dacă  $\psi$  în  $X$ ,  $\psi$  își atinge maximum în punctul  $(y_\psi, z_\psi)$  din  $S \times \Gamma$ . Este evident că pentru orice  $x \in X$ ,  $C(x)$  este format dintr-un singur element și în acest mod este clar că  $[\cdot, \cdot]$  este un semiprodus scalar.

Să definim

$$U: X \rightarrow P$$

avem

$$U(\lambda f^* + \mu g^*) = |\lambda| f + |\mu| g$$

și să observăm că  $\|u\psi\| = \|\psi\|$  oricare ar fi  $\psi \in X$ . Într-adevăr, dacă  $\psi = \lambda f^* + \mu g^*$ , avem

$$|\psi(y, z)| \leq |\lambda f^*(y, z)| + |\mu| g^*(y, z) = |\lambda| f(y) + |\mu| g(y),$$

de unde

$$\|\psi\| \leq \|U\psi\|.$$

Dacă  $y \in S$  și  $\sigma, \tau$  sînt numere reale, astfel ca

$$|\lambda| f(y) + |\mu| g(y) = \lambda e^{i\sigma} f(y) + \mu e^{i\tau} g(y) = |\lambda f^*(y, e^{i(\sigma-\tau)}) + \mu g^*(y, -e^{i(\sigma-\tau)})|$$

deducem că  $\|\psi\| \geq \|U\psi\|$ . Deci avem egalitatea  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ .

Să mai remarcăm și faptul că dacă  $\psi \in X$ ,  $\psi \neq 0$ ,  $y_\psi = yU\psi$ .

În adevăr

$$\|\psi\| = |\psi(y_\psi, z_\psi)| \leq U(\psi)(y_\psi) \leq \|U(\psi)\| \leq \|\psi\|$$

și deci  $y_\psi = yU\psi$ .

Să considerăm operatorul

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda g$$

și să remarcăm faptul că  $UT = \tilde{S}U$  unde  $\tilde{S}$  este aplicația definită mai sus. Vom arăta că avem

$$\|T\| = 1 \quad \tilde{w}(T) = 1/e.$$

În adevăr

$$\|T\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|UT\psi\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|\tilde{S}U\psi\| = \|\tilde{S}\| = 1$$

și prima afirmație este demonstrată.

Fie  $\psi = \lambda f + \mu g \in P$  cu  $\|\psi\| = 1$ . Vom avea

$$|[T\psi, \psi]| = |\lambda| g^*(y_\psi, z_\psi) |\psi(y_\psi, z_\psi)| = |\lambda| y_\psi = |\lambda| yU\psi = [SU\psi, U\psi] = 1/e.$$

și deci

$$\tilde{w}(T) = \sup_{\|\psi\|=1} |[T\psi, \psi]| = \sup_{\|\psi\|=1} [SU\psi, U\psi] = 1/e.$$

Teorema este demonstrată.

## § 7. OPERATORI HERMITICI ȘI NORMALI PE SPAȚII BANACH

Extinderea noțiunilor de operator hermitic și operator normal cunoscute în cadrul spațiilor Hilbert a fost făcută de I. Vidav.

Contribuții importante la această teorie au adus G. Lumer, F.F. Bonsall, T.W. Palmer, E. Berkson, M. Crabb și alții.

În cele ce urmează vom expune rezultatele obținute în această teorie împreună cu unele aplicații; vom menționa de asemenea unele probleme deschise ale acestei teorii.

### 7.1. Funcția exponențială

Vom prezenta mai întâi cazul cînd avem algebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  a operatorilor liniari și mărginiți pe un spațiu Banach  $\mathfrak{X}$ .

DEFINIȚIE. Pentru orice  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  vom pune prin definiție

$$e^T = \exp(T) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n$$

Are loc următoarea :

TEOREMA 2.7.1. Dacă  $T, S$  sînt doi operatori din  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  care comută (adică pentru orice  $x \in \mathcal{X}$ ,  $(TS)(x) = (ST)(x)$ ) atunci

$\alpha)$   $e^{T+S} = e^T \cdot e^S,$

$\beta)$   $e^T \cdot e^{-T} = I,$

$\gamma)$   $e^T$  este invertibil.

Demonstrație. Să punem

$$a_n = I + \sum_{i=1}^n \frac{T^i}{i!},$$

$$b_n = I + \sum_{i=1}^n \frac{S^i}{i!},$$

$$c_n = I + \sum_{i=1}^n \frac{(S+T)^i}{i!}$$

și să observăm că

$$a_n \rightarrow e^T, \quad b_n \rightarrow e^S \quad \text{și} \quad c_n \rightarrow e^{T+S}.$$

De asemenea dacă punem

$$x_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \|T\|^i$$

$$y_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \|S\|^i$$

$$z_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} (\|T\| + \|S\|)^i,$$

avem că

$$a_n b_n - c_n = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} T^i S^k,$$

$$\|a_n b_n - c_n\| \leq \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \|T\|^i \|S\|^k = x_n y_n - z_n.$$

Însă

$$x_n y_n - z_n \rightarrow (e^{\|T\|} \cdot e^{\|S\|} - e^{\|T\| + \|S\|}) = 0$$

și prima afirmație este demonstrată. Afirmațiile de la  $\beta)$  și  $\gamma)$  sînt evidente.

Vom mai observa că dacă fiind o algebră Banach  $\mathcal{A}$  prin  $G(\mathcal{A})$  se notează așa după cum este cunoscut, mulțimea elementelor invertibile din  $\mathcal{A}$ , iar prin  $G_1$  componenta principală a lui  $G(\mathcal{A})$  adică cea mai mare mulțime conexă din  $G(\mathcal{A})$  care conține pe  $I$ .

Afirmația de la punctul 1) înseamnă că funcția exponențială  $\exp(\cdot)$  are valorile în  $G(\mathcal{L}(\mathcal{X}))$ .

**TEOREMA 2.7.2.** Pentru orice operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  are loc relația

$$e^T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{1}{n} T \right)^n.$$

*Demonstrație.* Să punem

$$x_n = I + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} T^i$$

$$y_n = \left( I + \frac{1}{n} T \right)^n$$

$$\xi_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \|T\|^i$$

$$\eta_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \|T\| \right)^n$$

și vom avea următoarele relații

$$\begin{aligned} Y_n &= I + \frac{1}{1!} T + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2!} T^2 + \dots + \\ &+ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right) \frac{1}{n!} T^n \end{aligned}$$

$$x_n - y_n = \sum_{i=2}^n \alpha_i T^i, \quad \alpha_i \geq 0,$$

de unde obținem că

$$\|x_n - y_n\| \leq \sum_{i=2}^n \alpha_i \|T\|^i = \xi_n - \eta_n.$$

Însă este evident că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n - \eta_n = 0$  deoarece

$$e^{\|T\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \|T\| \right)^n$$

și teorema este astfel demonstrată.

Vom considera acum o clasă de operatori introdusă de G. Lumer și R. Phillips.

**DEFINIȚIA 2.7.3.** Un operator  $T$  se spune că este disipativ dacă

$$\operatorname{Re} W(T) = \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\} \subset (-\infty, 0].$$

Vom scrie mai scurt astfel  $\operatorname{Re} W(T) \leq 0$

*Observație.* În lucrarea [308] G. Lumer și R. Phillips au considerat și cazul cînd operatorul este nemărginit; de altfel aplicații foarte importante la ecuații diferențiale cu derivate parțiale se referă tocmai la acest caz.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor disipativi.

**TEOREMA 2.7.4.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  este disipativ dacă și numai dacă pentru orice  $t \in \mathbb{R}^+$  are loc relația

$$\|e^{iT}\| = 1.$$

*Demonstrație.* Din teorema 2.6.4, rezultă că

$$\sup_{t \geq 0} \frac{\log \|e^{iT}\|}{t} = \sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(iT)\} = \sup \{\operatorname{Re} \lambda, \lambda \in W(T)\}$$

și deci dacă  $T$  este disipativ

$$\sup_{t > 0} \frac{\log \|e^{iT}\|}{t} \leq 0$$

de unde rezultă că  $\log \|e^{iT}\| \leq 0$ . Deci  $\|e^{iT}\| \leq 1$ . Este ușor de văzut că trebuie să avem egalitate. Reciproc, dacă  $\|e^{iT}\| = 1$ ,  $t \geq 0$  din aceeași teoremă 2.6.4. deducem că  $\operatorname{Re} W(T) \leq 0$ . Teorema este astfel demonstrată. O conjectură a lui Bohnenblust și Karlin referitoare la existența altor operatori disipativi care au spectrul concentrat în zero în afară de operatorul identic zero a fost rezolvată în sens negativ de către Lumer și Phillips.

## 7.2. Operatori hermitici și normali pe un spațiu Banach.

Fie  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach și  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  algebra Banach a operatorilor lineari și mărginiți pe spațiul Banach  $\mathfrak{X}$ .

**DEFINIȚIA 2.7.5.** Un operator  $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  se spune că este hermitic dacă pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ ,  $x^*(x) = \|x\|^2$  avem  $x^*(Tx) \in \mathbb{R}$ , cu alte cuvinte rangul său numeric este real.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor hermitici:

**TEOREMA 2.7.6.** Un operator  $T$  este hermitic dacă și numai dacă una din următoarele afirmații are loc:

- 1° pentru orice  $t$  real  $\|e^{iT}\| = 1$ ,
- 2°  $\|I + itT\| = 1 + o(t)$  dacă  $t \rightarrow 0$  și  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demonstrație.* Vom remarca în primul rând faptul că operatorul  $H$  este hermitian dacă și numai dacă

$$\max \operatorname{Re} W(iH) = \max \operatorname{Re} W(-iH) = 0.$$

Din această observație rezultă imediat că dacă  $H$  este un operator hermitic atunci are loc afirmația 1°. Să presupunem acum că are loc relația 1° și să arătăm că are loc 2°. Cum avem pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$ ,

$$\|x\| \geq \|e^{itH}x\| = \|(I + itH)x\| + o(t) \geq \|x\| - |t| \|x\|,$$

deducem că

$$\sup_{\|x\|=1} \|(I + itH)x\| - 1 = o(t)$$

și 3° este demonstrată.

Dacă 3° are loc atunci

$$\|e^{itH}x\| = \|(I + itH)x\| + o(t) = \|x\| + o(t)$$

și deci

$$\|e^{itH}x\| - \|x\| = o(t)$$

pentru  $t$  mic de unde rezultă că pentru  $\|x\| = 1$

$$\sup \{\operatorname{Im} \lambda, \lambda \in W(T)\} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|e^{-itH}\| - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|I - itH\| - 1}{t} = 0$$

și deci  $H$  este hermitic. Teorema este demonstrată.

Condiția 2° a fost considerată de I. Vidav drept definiție a operatorilor hermitici și chiar a elementelor hermitice. Următoarea teoremă justifică acest lucru.

**TEOREMA 2.7.7.** *Un operator  $H$  din  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  unde  $\mathfrak{X}$  este un spațiu Hilbert este hermitian dacă și numai dacă*

$$\|(I + itH)\| = 1 + o(t), \quad t \text{ real.}$$

*Demonstrație.* Evident.

O proprietate importantă a operatorilor hermitici este dată în:

**TEOREMA 2.7.8.** *Mulțimea  $H(\mathfrak{X})$  a elementelor hermitice din  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  este un spațiu Banach real; dacă  $h, k \in H(\mathfrak{X})$  atunci și  $i(hk - kh) \in H(\mathfrak{X})$ .*

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că formează un spațiu real. Faptul că este închis rezultă imediat ținând cont de exemplu de condiția 1° din teoria 2.7.2.

Fie acum  $h, k$  elemente din  $H(\mathfrak{X})$ . Deducem că are loc relația

$$\|e^{itk}e^{ihk}e^{-itk}e^{-ihk}\| = 1,$$

oricare ar fi  $t$  real. Scriind exponențialele obținem

$$\|I + t^2(h_k - k_h)\| = 1 + o(t^3)$$

dacă  $t \rightarrow 0$  și de asemenea

$$\|I + t^2(hk - kh)\| = 1 + o(t^3),$$

de unde deducem că are loc relația

$$\|I + t(hk - kh)\| = 1 + o(t)$$

dacă  $t \rightarrow 0$  obținem că are loc relația

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{\|I + it[(k_k - k_h)]i\| - 1\} = 0$$

care arată că elementul  $i(h_k - k_h)$  este un operator hermitic.

Acest rezultat reprezintă extinderea la spații Banach a faptului ușor de demonstrat în cazul spațiilor Hilbert: dacă  $H, K$  sînt operatori hermitici atunci  $i(HK - KH)$  este un operator hermitic.

O clasă importantă de elemente din  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  o considerăm în

DEFINIȚIA 2.7.9. Un operator  $T$  din  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  se spune că este pozitiv dacă

$$W(T) \subset R_+.$$

Se poate verifica ușor că mulțimea elementelor pozitive din  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  formează un con închis, adică suma a două elemente pozitive este tot un operator pozitiv și că înmulțirea cu un scalar pozitiv ne dă tot un element din mulțime; faptul că este închis este evident.

DEFINIȚIA 2.7.10. Pentru algebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  vom nota cu  $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$  ca fiind mulțimea elementelor de forma  $h + ik$  unde  $h, k$  sînt în  $H(\mathfrak{X})$ .

Are loc următoarea:

TEOREMA 2.7.11. Orice element  $j \in \mathcal{J}(\mathfrak{X})$  admite o scriere unică de forma

$$j = h + ik$$

cu  $h, k \in \mathcal{J}(\mathfrak{X})$ .

*Demonstrație.* Cum  $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$  este evident un spațiu liniar real, este suficient să arătăm că dacă  $h + ik = 0$  atunci în mod necesar  $k = h = 0$ . Dar avem

$$W(h) = W(ik) = 0$$

și deci raza numerică  $w(h) = w(k) = 0$  de unde și afirmația teoremei. În teza sa, T.W. Palmer a numit orice element din  $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$  operator decompozabil.

În general  $\mathfrak{J}(\mathfrak{X})$  nu coincide cu  $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ . Un exemplu simplu care arată acest lucru este următorul și este datorat lui Palmer.

Fie  $x = l_1^2 = \{x, x = (x_1, x_2), \|x\| = |x_1| + |x_2|\}$

În acest caz este ușor de văzut că

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{X}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\}$$

cu  $\alpha, \beta$  reali.

Următoarea teoremă dă unele informații privind mulțimea operatorilor decompozabili.

TEOREMA 2.7.12. Dacă  $j = h + ik \in \mathfrak{J}(\mathfrak{X})$  atunci :

1°  $\max \{\tilde{w}(h), \tilde{w}(k)\} \leq \tilde{w}(j) \leq (\tilde{w}^2(h) + \tilde{w}^2(k))^{1/2}$ ,

2°  $j^*$  — adjunctul lui  $j$ , este decompozabil.

3°  $\mathfrak{J}(\mathfrak{X})$  este un spațiu închis.

Demonstrație. Fie  $x_n, \|x_n\| = 1$  și  $x_n^* \in C(x_n)$  astfel ca

$$\lim |x_n^*(h(x_n))| = \tilde{w}(h).$$

În acest caz avem

$$|x_n^*(h(x_n))| = \operatorname{Re} |x_n^*(j(x_n))| \leq |x_n^*(j(x_n))| \leq \tilde{w}(j)$$

și deci  $\tilde{w}(h) \leq \tilde{w}(j)$ . Similar arătăm că  $\tilde{w}(k) \leq \tilde{w}(j)$ .

Fie  $y_n, \|y_n\| = 1$  și  $y_n^* \in C(y_n)$ ,

$$\lim |y_n^*(j(y_n))| = \tilde{w}(j).$$

Vom avea că

$$\begin{aligned} |y_n(j(y_n))| &= |y_n^*(h(y_n)) - iy_n^*(k(y_n))| \leq \\ &\leq ([y_n^*(h(y_n))]^2 + [y_n^*(k(y_n))]^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă imediat că

$$\tilde{w}(j) \leq (\tilde{w}^2(h) + \tilde{w}^2(k))^{1/2},$$

$$\tilde{w}(h - ik) \leq (\tilde{w}^2(h) + \tilde{w}^2(k))^{1/2}$$

și 1° este demonstrat.

Pentru 2° este suficient să observăm că

$$j^* = h^* + ik^*$$

cu  $h^*, k^*$  operatori adjuncți care sînt hermitici.

Faptul că  $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$  este un spațiu închis, adică  $3^\circ$ , rezultă imediat din  $1^\circ$ . În adevăr, dacă

$$j = \lim j_n = \lim (h_n + ik_n)$$

din

$$\tilde{w}(j_n - j_m) \geq (\tilde{w}^2(h_n - h_m) + \tilde{w}^2(k_n - k_m))^{1/2}$$

deducem că șirurile  $\{h_n\}$  și  $\{k_n\}$  sînt șiruri Cauchy în  $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  și deci există  $h \in H(\mathfrak{X})$  și  $k \in H(\mathfrak{X})$  astfel ca

$$h = \lim h_n, k = \lim k_n.$$

Evident  $j = h + ik$ . Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat :

**COROLAR 2.7.13.** *Mulțimea operatorilor decompozabili  $\mathcal{J}(\mathfrak{X})$  formează un spațiu Banach (complex) și care admite conjugarea,*

$$j = h + ik \rightarrow \bar{j} = h - ik.$$

**DEFINIȚIA 2.7.14.** Un operator  $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  se spune regulat dacă :

1.  $T \in \mathcal{J}(\mathfrak{X})$ ,
2.  $T = h + ik$  cu  $hk = kh$ .

Are loc următoarea teoremă care ne dă unele proprietăți ale acestei clase de operatori :

**TEOREMA 2.7.15.** *Mulțimea operatorilor regulați pe un spațiu Banach este închisă; pentru orice operator regulat  $T$  are loc relația*

$$r_T = \tilde{w}(T),$$

*adică orice operator regulat este spectraloid.*

**Demonstrație.** Fie  $\{T_n\}$  un șir de operatori regulați și  $T_n \rightarrow T$  în normă. În acest caz din

$$h_n + ik_n = T_n$$

deducem că  $h_n \rightarrow h$  și  $k_n \rightarrow k$ , unde  $h$  și  $k$  sînt operatori hermitici. Este ușor de văzut că

$$hk + kh$$

și deci prima parte a teoremei este demonstrată.

Fie  $T = h + ik$  un operator regulat și fie  $\lambda = s + it = re^{i\theta}$ . Să calculăm norma operatorului  $e^{\lambda T}$ . Vom avea, deoarece  $k$  și  $h$  sînt operatori hermitici

$$\|e^{\lambda T}\| = \|e^{sT - tT}\|.$$

Teorema va rezulta din următoarea teoremă privind operatorii hermitici.

TEOREMA 2.7.16. Dacă  $h$  este un operator hermitic atunci

$$r_h = \tilde{w}(h) \leq \|h\| < er_h$$

unde  $r_h$  înseamnă raza spectrală a operatorului  $h$ .

*Demonstrație.* Înainte de a începe demonstrația vom menționa că această importantă teoremă a fost dată de I. Vidav. O generalizare a acestei teoreme pe care o vom expune mai departe a fost obținută recent de către A. Sinclair și redemonstrată elementar de către F. Bonsall și M.J. Crabb.

Dăm acum demonstrația teoremei 2.7.15. Fie  $[a, b]$  cel mai mic interval închis care conține spectrul operatorului  $h$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\|x\| = 1$ , iar  $x^* \in \mathfrak{X}$  cu  $\|x^*\| = 1$ . Să considerăm funcția analică în  $\operatorname{Re} \lambda \geq -1$  definită prin

$$f(\lambda) = (\lambda + 1)^{-\varepsilon} e^{(b+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^*(h^n(x))}{n!}.$$

Vom arăta că  $|f(\lambda)| \leq 1$  dacă  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Dacă  $\lambda = s + it$  vom avea că

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^*(h^n(x))}{n!} \right| = |x^* e^{\lambda h}(x)| \leq \|e^{sh} e^{ith}\| \leq \|e^{sh}\|$$

și deci  $|f(\lambda)| \leq 1$  dacă  $\lambda$  se găsește pe axa imaginară. Din teoria privind raza spectrală deducem că

$$r_h = \lim_{s \rightarrow \infty} \|e^{sh}\|^{1/s} = e^b$$

și deci pentru  $\lambda$  cu partea reală suficient de mare,  $|f(\lambda)| \leq 1$ . Cum  $f$  este o funcție continuă pentru  $\lambda$  cu  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , este mărginită în modul pentru orice  $s = \operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Cum pentru  $\lambda$  cu  $\operatorname{Im} \lambda$  suficient de mare,  $|f(\lambda)| \leq 1$  din principiul maximului modulului rezultă că  $|f(\lambda)| \leq 1$  oricare ar fi  $\lambda$  în  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ .

Cum  $\varepsilon > 0$  a fost ales arbitrar, deducem că

$$|x^*(e^{\lambda h}(x))| \leq |e^{\lambda b}|,$$

dacă  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Dacă luăm operatorul hermitic  $h' = -h$ , obținem

$$|x^* e^{\lambda h}(x)| \leq |e^{\lambda a}|$$

dacă  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Cum

$$r_h = \max\{-a, b\},$$

deducem că

$$\|e^{\lambda h}\| \leq |e^{\lambda r_h}| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Cum raza numerică a unui operator se calculează cu relația

$$\tilde{w}(T) = \sup_{|\lambda| > 0} \frac{\log \|e^{\lambda T}\|}{|\lambda|},$$

deducem că

$$\tilde{w}(h) \leq rh,$$

deci avem egalitate deoarece  $rh \leq \tilde{w}(h)$ .

Teorema rezultă din inegalitatea dată în demonstrația teoremei 2.7.12. Înainte de a da demonstrația teoremei 2.7.15. vom mai face observația că din demonstrația prezentată mai sus pentru teorema 2.7.16. rezultă extinderea formulelor lui Ritz:

$$\max \{\lambda, \lambda \in \sigma(h)\} = \sup \{\lambda, \lambda \in W(h)\},$$

$$\min \{\lambda, \lambda \in \sigma(h)\} = \inf \{\lambda, \lambda \in W(h)\}.$$

Demonstrația teoremei 2.7.15. se poate face acum astfel: avem ca mai sus, că

$$\frac{\log \|e^{re^{i\theta}T}\|}{r} \leq r_T$$

este independent de  $r$  și deci este egal cu  $\tilde{w}(T)$  de unde obținem că  $r_T = \tilde{w}(T)$ . Teorema este demonstrată.

Pe mulțimea operatorilor regulați aplicația

$$j \rightarrow \bar{j}$$

este o izometrie și deci continuă. Următoarea teoremă arată că această proprietate este globală.

**TEOREMA 2.7.17. Aplicația**

$$j \rightarrow \bar{j}$$

pe mulțimea operatorilor decompozabili este continuă.

*Demonstrație.* Am văzut mai înainte că pentru orice operator  $j \in j(\mathfrak{A})$ ,

$$\tilde{w}(j) = \tilde{w}(\bar{j})$$

și de aici afirmația teoremei deoarece

$$\frac{1}{e} \tilde{w}(j) \geq \|j\|$$

conform inegalității din demonstrația teoremei 2.6.8.

Teorema este demonstrată.

### 7.3. $V^*$ -algebre.

Această clasă de algebre a fost studiată de I. Vidav și apoi de către Berkson și Palmer. În cele ce urmează vom considera numai algebre comutative.

DEFINIȚIA 2.7.18. O subalgebră  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$  se numește  $V^*$ -algebră comutativă dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

1.  $\mathcal{A}$  este o algebră comutativă,
2.  $\mathcal{A}$  este închisă și pentru orice  $\alpha \in \mathcal{A}$  există descompunerea

$$\alpha = h + ik \text{ cu } h, k \text{ operatori hermitici.}$$

Aplicația  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = h - ik$  este numită conjugare și  $(\mathcal{A}, -)$  va fi numită  $V^*$ -algebră.

Vom da cîteva noțiuni necesare în stabilirea teoremelor de structură pentru  $V^*$ -algebre; acestea vor fi utile și în aplicația foarte importantă a teoriei operatorilor hermitici la o problemă celebră în teoria operatorilor spectrali, aplicație dată de Berkson, Dowson și Elliot.

Fie  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach și  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  algebra Banach a operatorilor lineari și mărginiți pe  $\mathfrak{X}$ .

DEFINIȚIA 2.7.19. Prin măsură spectrală în  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  vom înțelege un omomorfism  $E(\cdot): (\mathfrak{m}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ , astfel ca

1.  $E(\mathfrak{m}) = I$ ,
2.  $\mathfrak{m}$  este o mulțime,  $\mathfrak{B}$  este o algebră booleană de părți ale lui  $\mathfrak{m}$  și valorile lui  $E(\cdot)$  sînt într-o algebră booleană de proiectori, uniform mărginită în  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ .

Dacă  $\Gamma$  este o submulțime din  $\mathfrak{X}^*$  atunci măsura spectrală  $E(\cdot)$  se spune că este  $\Gamma$ -numărabil aditivă dacă pentru orice  $x^* \in \Gamma$  și  $x \in \mathfrak{X}$  funcția

$$x^*(E(\cdot))x: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}$$

este numărabil aditivă.

Dacă  $\Gamma = \mathfrak{X}^*$  atunci orice măsură  $\Gamma$ -numărabil aditivă este numărabil aditivă ca topologia tare.

Dacă  $\mathfrak{m}$  este un spațiu Hausdorff local compact și  $\mathfrak{B}$  este corpul borelian al lui  $\mathfrak{m}$ , adică cel mai mic corp care conține mulțimile închise (deschise) atunci o măsură spectrală  $E(\cdot)$  se spune  $\Gamma$ -regulată dacă  $x^*(E(\cdot))x$  este regulată oricare ar fi  $x^* \in \Gamma$  și  $x \in \mathfrak{X}$ . În acest mod dacă  $\mathfrak{m}$  este separabil și local compact (Hausdorff) atunci orice măsură spectrală  $\Gamma$ -numărabil aditivă pe corpul borelian este  $\Gamma$ -regulată.

O mulțime  $\Gamma \subset \mathfrak{X}^*$  este totală dacă din  $x^*(x) = 0 \ \forall x^* \in \Gamma$  atunci în mod necesar  $x = 0$ .

Fie  $\Gamma$  o mulțime liniară totală în  $\mathfrak{X}^*$  și  $E(\cdot)$  o măsură spectrală  $\Gamma$ -numărabil aditivă cu domeniul  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{B})$ .

DEFINIȚIA 2.7.20. Un operator  $S$  se spune că este de tip scalar dacă există o măsură spectrală cu  $\mathfrak{m} = \mathbb{C}$  corpul numerelor complexe și

astfel ca  $S = \int_{\mathfrak{m}} \lambda dE(\lambda)$  cu  $E(\sigma) = I$  pentru o mulțime mărginită și pentru

o mulțime  $\Gamma$  totală în  $\mathfrak{A}^*$ . Se spune că  $E(\cdot)$  este descompunerea spectrală a unității pentru  $S$  de clasă  $\Gamma$ .

O măsură spectrală se spune că este autoconjugată sau hermitică dacă pentru orice  $\sigma \in \mathfrak{A}$ ,  $E(\sigma)$  este un operator hermitic.

O problemă importantă în teoria operatorilor scalari este unicitatea descompunerii spectrale a unității. Utilitatea teoriei elementelor hermitice este dovedită și prin rezolvarea în sens afirmativ a acestei probleme.

Vom menționa fără demonstrație următoarele teoreme de structură pentru  $V^*$ -algebre comutative.

**TEOREMA 2.7.21.** *Dacă  $U$  este o  $*$ -algebră comutativă atunci este  $*$ -izomorfă, și izometrică cu algebra  $C(m)$  a funcțiilor continue pe un spațiu compact  $m$ .*

**TEOREMA 2.7.22.** *Dacă  $U$  este o algebră comutativă în  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  și orice  $T \in U$  are o descompunere de forma  $T = T_1 + iT_2$  cu  $T_i, i=1,2$  operatori hermitici, atunci închiderea  $\bar{U}$  a mulțimii  $CI + U$  în topologia slabă este o  $V^*$ -algebră.*

## § 8. GENERALIZAREA NOȚIUNII DE OPERATOR AUTOADJUNCT

Conceptul de operator simetric pentru cazul operatorilor pe spații Hilbert este de o deosebită importanță. Cazul operatorilor nemărgiți este interesant și mai dificil de studiat. În cele ce urmează vom da, urmînd pe Palmer, extinderea acestor noțiuni la cazul operatorilor definiți pe un spațiu Banach.

**DEFINIȚIA 2.8.1.** Un operator  $A$  se va numi autoconjugat dacă următoarele condiții sînt satisfăcute: există o familie  $\{U(t, A)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de operatori astfel încît:

1.  $U(t, A)U(s, A) = U(t+s, A), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$
2.  $\lim_{t \rightarrow s} U(t, A) - U(s, A) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$
3.  $\|U(t, A)\| = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$
4.  $\mathfrak{D}_A = \left\{ x, x \in \mathfrak{X} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t, A)x - x}{t} \text{ există} \right\}.$

**DEFINIȚIA 2.8.2.** Un operator  $S$  se va numi simetric dacă

$$W(S) = \{ \langle Sx, x \rangle, \quad \|x\| = 1, \quad x \in \mathfrak{D}_A \}$$

este o mulțime în  $\mathbb{R}$ .

Este cunoscut și ușor de văzut că dacă  $\mathfrak{X}$  este un spațiu Hilbert atunci orice putere a unui operator simetric este tot un operator simetric. Acest lucru nu mai este în general adevărat în cazul spațiilor Banach.

Noțiunea de comutativitate este dată în:

**DEFINIȚIA 2.8.3.** Operatorul autoconjugat  $A$  comută ca operatorul închis  $T$  dacă și numai dacă pentru orice  $t \in \mathbb{R}$

$$U(t, A)T \subset TU(t, A).$$

Are loc :

TEOREMA 2.8.4. Fie  $A$  un operator autoconjugat și  $T$  un operator închis definiți pe același spațiu. În acest caz au loc următoarele afirmații :

1° dacă  $T$  este autoconjugat atunci  $A$  comută cu  $T$  dacă și numai dacă  $T$  comută cu  $A$ .

2° dacă  $A$  este mărginit atunci comută cu  $T$  dacă și numai dacă  $AT \subseteq TA$ ,

3° dacă  $T$  este mărginit atunci  $A$  comută cu  $T$  dacă și numai dacă  $TA \subseteq AT$ ,

4°  $A$  comută cu  $T$  dacă și numai dacă

$$(\lambda - A)^{-1}T \subseteq T(\lambda - A)^{-1},$$

oricare ar fi  $\lambda \in \rho(T)$ ,

5° dacă  $\lambda \in \rho(T)$  atunci  $A$  comută cu  $T$  dacă și numai dacă

$$(\lambda - T)^{-1}A \subseteq A(\lambda - T)^{-1}.$$

Dacă  $T$  comută cu  $A$  atunci

$$ATx = TAx$$

ori de câte ori  $AT$  și  $TA$  au sens.

Demonstrație. Afirmațiile 1° și 2° sint ușor de demonstrat și le vom omite.

Să demonstrăm 3°. Fie  $T$  mărginit și  $U(t, A) = U(t)$ . În acest caz pentru orice  $x \in \mathfrak{D}_A$

$$TAx = -iT \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)x - x}{t} = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)T_x - T_x}{t} = ATx.$$

Să presupunem că  $TA \subseteq AT$  și deci pentru orice  $x \in \overline{\mathfrak{D}_A} = \{x, \text{ orice monomial operator } M, \text{ atunci } x \in \mathfrak{D}_M \text{ și } \sup \{\|Mx\|, \text{ grad } M = n\}^{1/n} < \infty\} = \mathfrak{o}(n)$  care este densă după cum vom arăta în următoarea leamă, avem

$$TU(x)x = T \sum_0^\infty \frac{(itA)^n}{n!} x = U(t)Tx$$

și cum  $T$  și  $U(t)$  sînt mărginiți iar  $\overline{\mathfrak{D}_A}$  este dens avem  $U(t)T = TU(t)$ . În acest mod 3° este demonstrat.

Să arătăm acum că are loc 4°. Dacă pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  are loc relația

$$TU(t) \supseteq U(t)T$$

atunci pentru  $x \in \mathfrak{D}_T$  și  $\pm \text{Im } \lambda \geq 0$  obținem

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1}Tx &= \mp i \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} U(\mp t)Tx dt = \\ &= \mp iT \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} U(\mp t)x dt = T(\lambda - A)^{-1}x \end{aligned}$$

și deci  $(\lambda - A)^{-1}T \subseteq T(\lambda - A)^{-1}$  dacă  $\lambda$  nu este real. Dar mulțimea din  $\rho(A)$  în care are loc această relație este închisă în  $\rho(A)$  deoarece  $T$  este închis și cum  $(\lambda - A)^{-1} \rightarrow (\mu - A)^{-1}$  în normă dacă  $\lambda \rightarrow \mu$ , deducem că relația are loc oricare ar fi  $\lambda \in \rho(A)$ .

Însă mulțimea acelor  $\lambda$  pentru care

$$(\lambda - A)^{-1}T \subseteq T(\lambda - A)^{-1}$$

este de asemenea deschisă, deoarece  $T$  este închis și  $(\lambda - A)^{-1}$  poate fi dezvoltată în serie și deci  $A$  comută cu  $T$  dacă relația este satisfăcută pentru o valoare  $\lambda$  din  $\text{Im } \lambda \neq 0$  sau pentru o valoare  $\lambda$  dacă  $\sigma(A) \neq \mathbb{R}$ .

Comutativitatea rezultă din faptul că

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda - A)^{-1}Ax = Ax$$

dacă  $x \in \mathfrak{D}_A$ . Astfel 4° este demonstrat.

Afirmațiile de la 5° se demonstrează similar și le vom omite.

Să demonstrăm acum rezultatul de care ne-am folosit la punctul 3°.

LEMA 2.8.5. Dacă  $\mathcal{F}$  este o familie finită de operatori autoconjugăți care comută,  $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}$  este densă.

Demonstrație. Fie  $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_l\}$  cu  $A_i$  autoconjugăți și care comută și pentru  $x \in \mathfrak{X}$  să punem

$$x' = \pi^{-l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^l e^{-s_i^2} U(\delta_i s_i, A_i) x \, ds_1 \dots ds_l,$$

unde  $\delta_1 \dots \delta_l$  sînt constante pozitive. Cum grupurile  $U(\cdot, A)$  sînt tare continue putem alege  $\delta_1, \dots, \delta_l$  astfel ca  $\|x - x'\| < \varepsilon$  cu  $\varepsilon' > 0$  dat și deci mulțimea elementelor  $x'$  este densă în  $\mathfrak{X}$ . Rămîne să arătăm că este în  $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}$ . Cum integralele sînt absolut convergente și grupurile tare continue putem integra în orice ordine dorim și  $x'$  este în  $\mathfrak{D}(A_i)$  oricare ar fi  $p$  iar dacă  $M$  este un monom de grad  $n$  în operatorii  $A_1 \dots A_l$  avem

$$\|Mx'\| \leq 2^{l/2} (4n/\delta^{2l})^{n/2} \|x\|$$

și deci  $\|Mx'\| = o(n)$  uniform. Teorema este demonstrată.

Observație. Această construcție își are originea într-o lucrare celebră a lui Gelfand privind grupurile cu un parametru într-un spațiu normat. Rezultate profunde în acest sens se găsesc la Garding (Spații Garding).

Noțiunea de operator autoconjugat ne permite să definim noțiunea de operator normal pe spații Banach.

DEFINIȚIA 2.8.6. Dacă  $S$  este un operator pe un spațiu Banach atunci vom spune că  $S$  este normal dacă admite descompunerea

$$S = R + iJ,$$

unde  $\{U(t, R)\}$ ,  $\{U(s, J)\}$  sînt într-o algebră  $V^*$ -comutativă.

Din teorema dată mai sus ca lema 2.8.5 rezultă că orice operator normal este dens definit. Are loc următoarea teoremă pe care o dăm fără demonstrație.

TEOREMA 2.8.7. *Dacă  $S$  este un operator normal atunci*

1. *pentru orice  $x \in \mathfrak{D}_S = \mathfrak{D}_{\bar{S}}$  ( $\bar{S} = R - iJ$ )  $\|\bar{S}x\| = \|Sx\|$ ,*
2.  *$R, S$  sînt operatori închiși.*

## § 9. TEOREMA LUI FUGLEDE ȘI UNELE APLICAȚII

În cazul spațiilor Banach teorema lui Fuglede se enunță și se demonstrează exact ca în spațiile Hilbert, de exemplu utilizînd metoda lui Rosenblum.

TEOREMA 2.9.1. *Dacă  $N$  este un operator normal mărginit pe  $\mathfrak{X}$  și  $B$  este un operator arbitrar din  $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  atunci din  $BN = NB$  rezultă*

$$B\bar{N} = \bar{N}B \text{ unde dacă } N = R + iJ, \bar{N} = R - iJ.$$

Deoarece demonstrația este scurtă o vom da și în acest caz. Este clar că pentru orice  $m$ ,  $N^m B = BN^m$  și deci pentru orice  $\lambda$  complex avem

$$e^{\lambda\bar{N}} B e^{-\lambda\bar{N}} = e^{\lambda\bar{N}} e^{-\lambda\bar{N}} B e^{\bar{\lambda}N} e^{-\bar{\lambda}N},$$

de unde dacă  $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$ ,  $\lambda_0, \lambda_1$  reali, obținem

$$e^{\lambda\bar{N}} B e^{-\lambda\bar{N}} = e^{2i(\lambda_1 R - \lambda_0 J)} B e^{-2i(\lambda_1 R - \lambda_0 J)}.$$

De aici rezultă că

$$\|e^{\lambda\bar{N}} B e^{-\lambda\bar{N}}\| = \text{const.}$$

și din teorema lui Liouville aplicată funcției  $\lambda \rightarrow e^{\lambda\bar{N}} B e^{-\lambda\bar{N}}$  deducem că este în fapt constantă; prin derivare obținem că, derivata fiind nulă,

$$\bar{N}B = B\bar{N}$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.9.2. *Orice operator normal  $N$  are o descompunere unică de forma*

$$N = R + iJ.$$

Pentru aplicația pe care o vom da avem nevoie de :

DEFINIȚIA 2.9.3. Un operator se numește prehermitic dacă există o normă echivalentă pe  $\mathfrak{X}$  astfel ca în  $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  cu norma indusă, să fie hermitic.

Are loc :

TEOREMA 2.9.4. Dacă  $h_1, \dots, h_n$  sînt elemente prehermitice care comută există o normă pe  $\mathfrak{X}$  echivalentă cu cea inițială astfel că față de noua normă toate elementele sînt hermitice.

Demonstrație. Pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$  să punem

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sup_{t \in R} \|e^{th_j}\| \right\}$$

și  $\|\cdot\|_1$  verifică cerințele teoremei.

Are loc :

TEOREMA 2.9.5. Dacă  $S$  este un operator de tip scalar de clasă  $\Gamma$  adică  $S$  are o descompunere a unității  $E(\cdot)$  de clasă  $\Gamma$  astfel ca  $S = \int \lambda dE(\lambda)$  atunci :

1°  $S$  are o descompunere a unității de clasă  $\Gamma$  unică,

2° dacă  $F(\cdot)$ , este o altă descompunere a unității de clasă  $\Gamma$  pentru  $S$  atunci

$$S = \int_{\sigma(S)} \lambda dF(\lambda).$$

3° dacă  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  și  $AS = SA$  și  $F(\cdot)$  este o descompunere a unității pentru  $S$  atunci

$$A \int_{\sigma(S)} f(\lambda) dE(\lambda) = \int_{\sigma(S)} f(\lambda) dF(\lambda) (A)$$

oricare ar fi  $f \in C(\sigma(S))$ .

Demonstrație. Să arătăm mai întii 2°. Fie  $S_0 = \int_{\sigma(S)} \lambda dF(\lambda)$  și  $S = S_0 + N$  descompunerea lui  $S$  în raport cu  $F(\cdot)$ . În acest caz

$$R = \int_{\sigma(S)} \operatorname{Re}(\lambda) dE(\lambda), \quad J = \int_{\sigma(S)} \operatorname{Im}(\lambda) dE(\lambda),$$

$$R_0 = \int_{\sigma(S)} \operatorname{Re}(\lambda) dF(\lambda), \quad J_0 = \int_{\sigma(S)} \operatorname{Im}(\lambda) dF(\lambda).$$

Este ușor de văzut că  $R, J$  sînt operatori prehermitici și  $SR_0 = R_0 S$ ,  $SJ_0 = J_0 S$ ,  $R, J, R_0, J_0$  sînt toți prehermitici și comută; există o normă pe  $\mathfrak{X}$  în raport cu care toți sînt hermitici și fie aceasta chiar norma inițială. Cum avem

$$N = (R - R_0) + i(J - J_0),$$

$$iN = -(J - J_0) + i(R - R_0)$$

și  $N$  este un operator normal, element într-o algebră  $V^*$ -comutativă care este nilpotent, deci trebuie să fie zero. În acest mod  $2^\circ$  este demonstrat.

Pentru  $1^\circ$  vom remarcă faptul că pentru orice polinom în  $\lambda, \bar{\lambda}$

$$\int_{\sigma(S)} |p(\lambda, \bar{\lambda})| dE(\lambda) = \int_{\sigma(S)} p(\lambda, \bar{\lambda}) dE(\lambda)$$

și din teorema lui Weierstrass-Stone, deducem că egalitatea are loc pentru orice  $f, g \in C(\sigma(S))$  de unde rezultă  $1^\circ$ . Pentru  $3^\circ$  vom aplica teorema lui Fuglede pentru spații Banach.

Teorema este demonstrată.

*Observație.* Teorema a fost stabilită, pentru cazul mulțimilor de tipul  $R$  (adică mulțimi  $M$  pentru care clasa funcțiilor analitice cu poli în afara lui  $M$  este densă în  $C(M)$ ), de către Berkson și Dowson.

## § 10. CLASE DE ELEMENTE ÎNTR-O ALGEBRĂ BANACH CU ELEMENT UNITATE. TEOREMA LUI VIDAV-PALMER

Vom expune aici rezultate privind unele clase de elemente într-o algebră Banach, extinzând rezultate de la cazul algebrei  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ . Vom da demonstrații numai acolo unde ele diferă esențial de cazul când algebra  $\mathcal{A}$  este  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ .

Fie  $\mathcal{A}$  o algebră Banach cu unitate (pe care o vom nota cu 1). Noțiunea de funcție exponențială, de element hermitic și element normal se extind imediat la acest cadru general în mod evident.

Nu vom menționa extinderea tuturor rezultatelor cunoscute pentru algebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$  la algebre Banach cu unitate arbitrare, deoarece acest lucru este ușor de făcut. Vom da acum un exemplu simplu de element hermitic  $h$  cu proprietatea că  $h^2$  nu este hermitic. Acest exemplu a fost dat de M. Crabb. Vom menționa că primul exemplu de acest tip a fost dat de către G. Lumer utilizând unele rezultate ale lui Kakutani.

Fie pentru aceasta  $\mathcal{A} = C^3$  cu înmulțirea pe coordonate ca operație de înmulțire și deci  $1 = (1, 1, 1)$ , iar norma pe  $\mathcal{A}$  este dată de formula

$$\|(\alpha, \beta, \gamma)\| = \sup_{|\lambda| = 1} |\lambda^{-1}\alpha + \beta + \lambda\gamma|$$

și  $\|\cdot\|_1$  norma corespunzătoare pe  $\mathcal{A}$  ca algebră, adică

$$\|a\|_1 = \sup_{\|x\| = 1} \|xa\|.$$

În acest mod  $\mathcal{A}$  este o algebră Banach complexă cu element unitate  $(1, 1, 1)$ . Să luăm elementul  $h = (-1, 0, 1)$  care este hermitic deoarece pentru orice  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{ith}(\alpha, \beta, \gamma) = (e^{-it}\alpha, \beta, e^{it}\gamma).$$

Dar  $h^2(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, 0, \gamma)$  și  $e^{i\pi/2h}(\alpha, \beta, \gamma) = (i\alpha, \beta, i\gamma)$

de unde

$$\|e^{i\pi/2h^2} h^2(\alpha, \beta, \gamma)\|_1 = 3,$$

dacă  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, i, 1)$  care are proprietatea că  $\|(1, i, 1)\|_1 = \sqrt{5}$ .  
Deci  $h^2$  nu este hermitic.

O problemă importantă este o caracterizare a  $\bar{C}^*$  algebrilor cu ajutorul elementelor hermitice. Rezultate esențiale au obținut în acest sens I. Vidav și T. W. Palmer; rezultatul la care s-a ajuns este cunoscut astăzi sub numele de teorema lui Vidav-Palmer și are următorul enunț.

**TEOREMA 2.10.1.** (Vidav-Palmer). *Dacă  $\mathcal{A}$  este o algebră Banach cu elemente unitate (complexă) și astfel ca  $\mathcal{A} = H(\mathcal{A}) + iH(\mathcal{A})$  atunci  $\mathcal{A}$  este  $*$  izomorf și izometrică cu o  $C^*$ -algebră.*

În cele ce urmează vom da demonstrația acestei importante teoreme. Demonstrația va fi consecința unor rezultate importante și în sine.

În primul rând vom da următoarea teoremă care reprezintă extinderea unui rezultat important obținut de Russo și Dye, extensie obținută de către Palmer.

**TEOREMA 2.10.2.** *Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $B^*$ -algebră cu unitate și*

$$U = \{u \in \mathcal{A}, u^* u = u u^* = 1\},$$

$$E = \{e^{ih}, h \in \mathcal{A}, h^* = h\}$$

$$\mathcal{A}_1 = \{x, \|x\| \leq 1\},$$

*atunci au loc afirmațiile*

$$1^\circ. (\text{Russo} - \text{Dye}) \mathcal{A}_1 = \overline{\text{conv } U},$$

$$2^\circ (\text{Palmer}) \mathcal{A}_1 = \overline{\text{conv } E}.$$

*Demonstrație.* Dacă  $x \in \mathcal{A}$  și  $\|x\| \leq 1$  atunci

$$r_x = r_{x^*} = r_{x^* x}^{1/2}$$

și deci putem defini funcția

$$F(\lambda) = (1 - x x^*)^{-1/2} (\lambda + x) (1 + \lambda x^*) (1 - x^* x)^{1/2}$$

dacă  $|\lambda| < \|x\|^{-1}$ . Această funcție se mai numește și funcția lui Möbius. Să demonstrăm că  $F$  este o funcție analitică și valorile sale sînt operatori unitari. Dacă  $|\lambda| < 1$  atunci este evident că  $F$  este analitică. Să arătăm ea și în punctele de pe frontieră  $F$  este analitică.

În acest caz avem

$$(1 + \lambda x^* x) (\lambda + x) = x + \lambda (1 + \lambda x^*)^{-1} (1 - x^* x),$$

$$(\lambda + x) (1 + \lambda x^*)^{-1} = x + \lambda (1 - x x^*) (1 + \lambda x^*)^{-1},$$

$$(1 - x x^*)^{1/2} x = x (1 - x^* x)^{1/2}.$$

Cum  $\|x\| < 1$ ,  $F(\lambda)$  este invertibil și

$$\begin{aligned} (F(\lambda)^{-1})^* &= (1 - x x^*)^{1/2} (\bar{\lambda} + x^*)^{-1} (1 + \bar{\lambda} x) (1 - x^* x)^{-1/2} = \\ &= (1 - x x^*)^{1/2} (1 + \lambda x^*)^{-1} (\lambda + x) (1 - x^* x)^{-1/2} = \\ &= (1 - x x^*)^{-1/2} \{x + \lambda(1 - x x^*)(1 + \lambda x^*)^{-1}\} (1 - x^* x)^{1/2} = \\ &= F(\lambda), \end{aligned}$$

de unde rezultă că  $F(\lambda)$  este un operator unitar și este evident că este analitică.

Din această proprietate rezultă teorema lui Russo-Dye.

În adevăr, deoarece  $F$  este analitică, are loc relația

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) d\theta$$

și cum  $F(0) = x$  deducem că  $x \in \overline{\text{conv}} U$ . Cazul general rezultă imediat de aici. Să demonstrăm acum teorema lui Palmer. Din teorema lui Russo-Dye rezultă că este suficient să demonstrăm că orice element unitar este în  $\overline{\text{conv}} E$ .

Fie deci  $u \in U$  și  $t \in (0, 1)$  și  $x = t u$ . Evident că  $x$  este un element normal și are loc relația

$$(\lambda + F(\lambda))(1 + \lambda x^*) = 2\lambda(1 + 1/2(\bar{\lambda} x + \lambda x^*))$$

oricare ar fi  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ . Cum  $\|x\| < 1$  rezultă că  $F(\lambda) + \lambda$  este invertibil și deci  $\lambda \notin \sigma(F(\lambda))$ , de unde rezultă că  $\sigma(F(\lambda))$  este o submulțime proprie a cercului unitate și deci putem defini

$$h = -i \log F(\lambda)$$

(cu seria corespunzătoare). Avem că  $h = h^*$  și deci  $F(\lambda) = e^{ih} \in E$  pentru  $|\lambda| = 1$  de unde rezultă că  $x \in \overline{\text{conv}} E$  care ne dă că  $U \subset \overline{\text{conv}} E$ .

Teorema este astfel demonstrată.

*Observație.* L. Harris a demonstrat teorema lui Russo-Dye-Palmer utilizând teoremele de maxim pentru funcții vectoriale.

Următoarea versiune interesantă a fost obținută tot de Palmer.

**TEOREMA 2.10.3.** Dacă  $x \in \mathcal{A}$  și  $\|x\| < 1$  atunci  $x \in \text{conv } E$ .

*Demonstrație.* Fie  $h \in \mathcal{A}$ ,  $h^* = h$ ,  $\|h\| < 1$ . În acest caz

$$h = \frac{u+v}{2} \text{ cu } u = h + i(1-h^2)^{1/2} v = h - i(1-h^2)^{1/2}.$$

În adevăr, este ușor de văzut că  $u, v \in \mathcal{A}$  și  $1 \notin \sigma(u)$ ,  $1 \notin \sigma(v)$  și deci  $u, v \in E$ , iar  $h \in \text{conv } E$ . Fie  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\|x\| < \frac{1}{2}$ . În acest caz  $x = h +$

$+ik$  cu  $h = h^*$ ,  $k = k^*$  și  $\|h\| < 1/2$ ,  $\|k\| < 1/2$  de unde rezultă că  $x \in \text{conv } E$ . Fie acum  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\|x\| < 1$  și  $t = \|x\|^{-1}$ . În acest caz însă  $tx \in \text{conv } E$  conform teoremei lui Palmer și deci există  $y \in \text{conv } E$  astfel ca

$$\|tx - y\| < 1/2 (t - 1).$$

Dar în acest caz avem  $tx - y = (t - 1)z$  cu  $z \in \text{conv } E$  și deci

$$x = t^{-1}y + (1 - t)^{-1}z \in \text{conv } E.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Fie acum  $\mathcal{A}$  o algebră Banach (complexă) cu unitate și  $J(\mathcal{A})$  mulțimea elementelor de forma  $h + ik$  unde  $h, k$  sînt elemente hermitice. I. Vidav a demonstrat că dacă  $J(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  și din  $h$  hermitic rezultă  $h^2$  normal atunci există un izomorfism

$$a \rightarrow Ta$$

al algebrei  $\mathcal{A}$  pe o  $C^*$ -algebră astfel că  $Th$  este autoadjunct și  $\|Th\| = \|h\|$  dacă  $h$  este hermitic în  $\mathcal{A}$ . Faptul că  $a \rightarrow Ta$  este o izometrie a fost arătat independent de către Berkson și Glickfeld iar Palmer a arătat că este suficient să presupunem că  $J(\mathcal{A})$  este  $\mathcal{A}$ .

Teorema următoare dă unele informații privind mulțimea  $J(\mathcal{A})$  pentru o algebră Banach cu unitate.

**TEOREMA 2.10.4.** Dacă  $\mathcal{A}$  este o algebră Banach cu unitate atunci următoarele afirmații sînt echivalente :

- 1°  $J(\mathcal{A})$  este o algebră,
- 2° dacă  $h$  este hermitic  $\Rightarrow h^2 \in J(\mathcal{A})$ ,
- 3° dacă  $h$  este hermitic atunci  $h^2$  este hermitic,
- 4° dacă  $h, k$  sînt elemente hermitice atunci și  $hk + kh$  este hermitic.

*Demonstrație.* Evident că  $1^\circ \rightarrow 2^\circ$

Să arătăm că  $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ . Fie  $h$  hermitic și  $h^2 = p + iq$  cu  $p, q$  hermitici. În acest caz  $h(p + iq) = (p + iq)h$ , de unde rezultă că  $hp - ph = i(qh - hq)$  este un operator hermitic conform teoremei 2.7.8 (care se extinde la algebre arbitrare). Deci  $hp - ph = 0$  și  $h^2p = ph^2$ , de unde  $qp = pq$  și deci  $h^2$  este normal. Dacă este normal  $\text{conv } \sigma(h^2) = W(h^2)$  și deci este real de unde rezultă că este hermitian.

Să arătăm acum că  $3^\circ \rightarrow 4^\circ$ . Fie  $h, k$  hermitici și deci  $h^2, k^2, (h + k)^2$  sînt hermitici, de unde deducem că  $hk + kh$  este hermitic și deci  $4^\circ$  este adevărată.

Să arătăm că  $4^\circ \rightarrow 1^\circ$ . Va fi suficient să arătăm că  $J(\mathcal{A})$  este închisă pentru înmulțire.

Fie deci  $a, b, \in J(\mathcal{A})$  cu  $a = h + ik$  și  $b = p + iq$ . Cum avem

$$ab + b^*a^* = (hp + ph) - (kq + qk) + i(kp - pk) + i(hq - qh),$$

rezultă că aceasta este un element hermitic. De asemenea

$$i(ab - b^*a^*) = i(hp - ph) - i(kp - pk) - (kp + pk) - (hp + ph)$$

este hermitic. Deci

$$ab = \frac{1}{2}(ab + b^* a^*) - \frac{i}{2} \cdot i(ab - b^* a^*) \in \mathcal{J}(\mathcal{A}),$$

$$(ab)^* = \frac{1}{2}(ab + b^* a^*) + \frac{i}{2} \cdot i(ab - b^* a^*) = b^* a^*$$

și deci  $\mathcal{J}(\mathcal{A})$  este o algebră cu involuție continuă  $(*: p + iq \rightarrow p - iq; p, q \in \mathcal{K}(\mathcal{A}))$ .

Teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 2.10.5. Se spune că o algebră cu involuție este simetrică dacă pentru orice  $x$  are loc relația  $\sigma(x^* x) \in R$ .

Aie loc:

TEOREMA 2.10.6. Dacă  $\mathcal{J}(\mathcal{A})$  este algebră atunci pentru orice element hermitian  $h$ ,  $\gamma_h = \|h\|$ .

Acest fapt l-am demonstrat pentru algebra  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  a operatorilor pe un spațiu Banach  $\mathcal{X}$ .

Noi nu vom da demonstrația acestei importante teoreme a lui Vidav deoarece vom da mai târziu o teoremă privind elementele hermitice, teoremă dată de Sinclair și independent de A. Browder care conține ca un caz particular teorema de mai sus.

TEOREMA 2.10.7. Dacă  $\mathcal{J}(\mathcal{A})$  este o algebră și  $k$  un element hermitic cu rangul numeric în  $R_+$  atunci există în cea mai mică algebră închisă care conține pe  $k$  și 1 un element  $h$  hermitic astfel ca  $h^2 = k$ .

Vom presupune că  $r_h < 1$  și fie  $a = 1 - k$ , iar  $P$  mulțimea polinoamelor în  $k$  pe coeficienți în  $R_+$ . Să definim

$$X_0 = 0 \quad X_n = \frac{1}{2}(a + x_{n-1}^2)$$

Cum

$$X_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

deducem că  $x_n \in P$  oricare ar fi  $n$ . Mai mult  $ax_n = x_n a$  și  $\gamma_{x_n} \leq 1$ . Fie  $x \rightarrow \hat{x}$  reprezentarea Gelfand a algebrei generate de  $k$  și 1. Cum  $\sigma(a) \subset (0, 1]$

deducem că  $\{\hat{x}_n\}$  este un șir crescător de funcții pozitive care converge punctual către o funcție  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\omega}(t) \in [0, 1]$  și cum  $\hat{\omega} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{\omega}^2)$  deducem

din teorema lui Dini că  $\{\hat{x}_n\} \xrightarrow{u} \hat{\omega}$  și deci  $\{\hat{x}_n\}$  este un șir Cauchy, de unde rezultă că  $\{x_n\}$  este un șir Cauchy,  $x_n \rightarrow v$  și  $\hat{v} = \hat{\omega}$ . Dar  $\{x_n - v\}$  este hermitic și  $u = 1 - v$  satisface relația  $u^2 = k$ . Din teorema de mai sus rezultă că  $u$  este hermitic și pozitiv. Teorema este demonstrată.

Observație. Se poate da o demonstrație mai simplă utilizând principiul contracției, și aceasta a fost dată de F.F. Bonsall și Stirling.

TEOREMA 2.10.8. Dacă  $\mathcal{J}(\mathcal{A})$  este algebră, atunci oricare ar fi  $h$  hermitic există  $p, q$  elemente hermitice cu  $W(p), W(q) \subset R_+$  astfel încât

$$1. h = p - q, \quad 2. qp = pq = 0.$$

*Demonstrație.* Cum  $h^2$  este un element hermitic cu  $W(h^2) \subset R_+$  din teorema de mai sus deducem că există  $|h|$ , hermitic și pozitiv (adică  $W(h) \subset R_+$ ) astfel ca  $|h|^2 = h^2$  și  $|h| \in \mathfrak{A}_h$ , algebra generată de  $h$  și 1. Fie  $\mathfrak{m}_h$  spațiul idealelor maxime și deci

$$\sigma(|h| \pm h) = \{f(|h| \pm h), f \in \mathfrak{m}_h\}$$

Cum  $|h|^2 = h^2$  deducem că

$$f(h^2) = f(|h|^2) = f(|h|)^2 = f^2(h)$$

și deci  $f(h) = \pm f(|h|)$ . Cum  $|h|$  și  $h$  sînt hermitici deducem că  $\sigma(|h| \pm h) \subset R_+$  de unde rezultă că putem lua

$$p = \frac{1}{2}(|h| + h),$$

$$q = \frac{1}{2}(|h| - h),$$

care satisfac teorema.

Următoarea teoremă arată o proprietate a elementelor de forma  $\bar{x}x$ :

**TEOREMA 2.10.9.** *Dacă  $\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$  este algebră atunci pentru orice  $x \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A})$  elementul  $\bar{x}x$  este pozitiv adică  $\sigma(\bar{x}x) \in R_+$ .*

*Demonstrație.* Să arătăm mai întii că dacă  $z \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A})$  și  $-\bar{z}z$  este pozitiv atunci în mod necesar  $z = 0$ . Cum pentru orice elemente  $x, y$

$$\sigma(xy) = \sigma(yx)$$

exceptînd cel mult punctul zero rezultă că  $-\bar{z}z$  este pozitiv. Fie atunci  $z = h + ik$  cu  $h, k$  elemente hermitice și deci

$$\bar{z}z = (h - ik)(h + ik) = 2h^2 + 2k^2 - z\bar{z},$$

de unde rezultă că rangul numeric este egal cu  $\{0\}$ . Deducem că  $\bar{z}z = 0$  analog  $z\bar{z} = 0$ . Dar atunci  $h^2 + k^2 = 0$ , de unde  $h = k = 0$  și deci  $z = 0$ . Să demonstrăm acum teorema. Fie  $z$  arbitrar în  $\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$  și deci există  $p, q$  elemente hermitice astfel ca

$$\bar{z}z = p - q; \quad pq = qp = 0$$

și să luăm  $y = zp$ . În acest caz avem

$$-\bar{y}y = -q\bar{z}zq = q^3$$

care este pozitiv. Din observația de mai înainte deducem că  $y = 0$ . Dar atunci

$$\bar{z}zq = 0, \quad q^2 = 0$$

care ne dă că  $q = 0$  și deci  $z = p$  care este un element pozitiv. Teorema este demonstrată. În acest mod algebra  $\mathfrak{J}(\mathcal{A})$  are proprietăți similare unei  $B^*$ -algebre. Teorema lui Vidav-Palmer afirmă că este  $*$ -izomorfă și izometrică cu o  $B^*$ -algebră.

Prin stare normalizată a unei algebre  $\mathcal{A}$  vom înțelege orice funcțională  $f \in \mathcal{A}^*$  astfel ca  $\|f\| = f(1) = 1$ .

Din cele de mai sus rezultă că pentru orice stare normalizată,  $f(\bar{z}z) \geq 0$  și deci  $f$  satisface inegalitatea lui Schwarz

$$|f(x^*y)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y)$$

oricare ar fi  $x, y \in \mathcal{A}$ .

Să trecem acum la demonstrația teoremei lui Vidav-Palmer.

Să considerăm pentru aceasta o stare normalizată  $f$  și să punem pentru orice  $x, y \in \mathcal{A}$  (vom nota  $x = p + iq$ ,  $\bar{x} = x^* = p - iq$ ,  $p, q$  elemente hermitice)

$$\langle x, y \rangle_f = f(y^*x),$$

care este o funcțională biliniară pozitivă. Vom remarca faptul că are toate proprietățile produsului scalar exceptînd

$$\langle x, x \rangle_f = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Fie  $I_f = \{x, \langle x, x \rangle_f = 0\}$  care este un ideal stîng în  $\mathcal{A}$ . Spațiul  $H_f = \mathcal{A}/I_f$  este un spațiu prehilbertian în raport cu produsul scalar indus de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$ . Acest spațiu completat îl vom nota cu  $\tilde{H}_f$ .

Să dăm cîteva proprietăți ale acestui spațiu. Să considerăm pentru aceasta operatorul  $T_a$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , definit pe  $H_f$  prin

$$T_a(x + I_f) = ax + I_f,$$

care este astfel bine definit și să arătăm că

$$\|T_a\| \leq \|a\|.$$

În adevăr cum pentru orice  $x \in \mathcal{A}$

$$\|ax\|_f^2 = f(x^*a^*ax)$$

și

$$\|a\|^2 \|x\|_f^2 = \|a\|^2 f(x^*x),$$

de unde

$$\|a\|^2 \|x\|_f^2 - \|ax\|_f^2 = f(x^*(\|a\|^2 - a^*a)x).$$

Dar cum

$$\|a\|^2 - 1 - a^*a \geq 0,$$

deducem că

$$x^*(\|a\|^2 - a^*a)x \geq 0,$$

de unde obținem

$$f(x^* (\|a\|^2 - a^*a) x) \geq 0,$$

care ne dă că

$$\|ax\|_f^2 \leq \|a\|^2 \|x\|_f^2.$$

De aici este clar că

$$\|T_a\| \leq \|a\|$$

Prin  $\tilde{T}'_a$  vom nota extensia unică a operatorului  $\tilde{T}_a$  la spațiul complet  $\tilde{H}_f$ . Aplicația  $a \rightarrow \tilde{T}'_a$  este o reprezentare a algebrei  $\mathcal{A}$  în algebra operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul  $\tilde{H}_f$ , care are proprietatea că

$$a^* \rightarrow (T'_a)^*,$$

care rezultă din relația

$$\langle ax, y \rangle_f = \langle x, a^* y \rangle_f,$$

care este evidentă ținând seama de definiția formei biliniare  $\langle, \rangle$ . Să ținem seama că pentru orice element  $p = h + ik$  cu  $h, k$  elemente hermitice avem

$$\tilde{w}(h) \leq \tilde{w}(h + ik) \leq \|h + ik\|$$

și cum pentru orice element avem relația

$$\frac{1}{e} \|p\| \leq \tilde{w}(p) \leq \|p\|$$

(a se vedea teorema 9) de unde

$$\|h\| \leq e \tilde{w}(p),$$

$$\|k\| \leq e \tilde{w}(p).$$

În acest mod  $\|(h + ik)^*\| \leq \|h\| + \|k\| \leq 2e \|h + ik\|$ , de unde obținem că

$$\|\tilde{T}'_a\| \leq (2e)^{1/2} \|a\|.$$

Dacă  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  este spațiul aplicațiilor liniare și continue pe suma directă  $\mathcal{H}$  a tuturor spațiilor  $\tilde{H}_f$ , unde  $f$  parcurge toate stările, putem defini aplicația

$$a \rightarrow T_a$$

în mod natural și care are următoarele proprietăți :

1.  $\|Th\| \leq \|h\|$ ,  $h$  hermitic,
2.  $\|Ta\| \leq (2e)^{1/2} \|a\| \quad \forall a \in (\mathcal{A})$ ,
3.  $\|Ta\| \leq \sup_{f \text{ stare}} \{f(a^* a)\}^{1/2} = \tilde{w}(a^* a) = \|a^* a\|^{1/2}.$

Cum  $\langle, \rangle_f$  satisface o inegalitate de tip Schwarz-Cauchy obținem imediat că

$$\tilde{w}(a) = \tilde{w}(a^*a)^{1/2}$$

și cum  $cW(Ta) \geq \|a\|$  deducem că  $a \rightarrow Ta$  este biunivocă, \*-homomorfism și pentru orice  $h$ , hermitic  $\|Th\| = \|h\|$ .

Să arătăm dacă identificăm pe  $\mathcal{A}$  cu imaginea sa prin aplicația  $a \rightarrow Ta$  cu norma  $\|\cdot\|$  atunci  $\mathcal{A}$  este o  $C^*$ -algebră. Să notăm ca și mai sus  $E = \{e^{ih}, h \text{ element hermitic}\}$  fie  $a \in \mathcal{A}$  arbitrar cu  $\|a\| < 1$ . În acest caz există  $a_n \in \overline{\text{conv}}(E)$  astfel ca  $\lim |a_n - a| = 0$  și deci în norma inițială, de unde rezultă că  $a_n \rightarrow a$  (norma de  $C^*$  este  $|\cdot|$ , adică cea indusă de  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ). Dar cum  $\|e^{ih}\| = 1$  deducem că  $\|a_n\| \leq 1$ , de unde rezultă că  $\|a\| \leq 1$ . Deci cum  $|a| = 1$  obținem că  $\|a\| \leq |a|$ . Dar dacă  $b$  este arbitrar în  $\mathcal{A}$  și  $|b| > \|b\|$  am avea

$$\|b^*b\| \leq \|b^*\| \|b\| < |b^*| |b| = |b^*b| = \|b^*b\|,$$

care este o contradicție și deci  $\|b\| \leq |b|$  de unde rezultă  $a \rightarrow Ta$  este o izometrie.

Teorema este demonstrată.

În fapt, așa după cum accentuează Bonsall și Duncan, natura teoremei lui Vidav-Palmer constă în faptul că dacă  $\mathcal{A}$  este o algebră Banach complexă atunci existența unei involuții „\*” astfel ca  $(\mathcal{A}, *)$  să fie o  $B^*$ -algebră depinde numai de structura de spațiu Banach a algebrei  $\mathcal{A}$ , în fapt numai de forma sferei unitate în vecinătatea elementului 1.

Teorema lui Vidav-Palmer poate fi utilizată în demonstrarea și simplificarea demonstrațiilor unor fapte importante din teoria  $B^*$ -algebrelor.

Ca o consecință a teoremei lui Vidav-Palmer vom da următoarea teoremă aparținând lui Segal și Kaplansky.

**TEOREMA 2.10.10** Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $B^*$ -algebră cu unitate și  $\mathfrak{I}$  un ideal bilateral închis atunci  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  este o  $B^*$ -algebră.

*Demonstrație.* Pentru orice  $x \in \mathcal{A}$  vom pune  $[x]$  imaginea lui  $x$  în algebră  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  și este evident că  $[e]$  este o unitate pentru  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ . Dacă  $\varphi$  este o stare pentru  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  atunci să punem

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi([x])$$

care este de asemenea o stare pentru  $\mathcal{A}$ . Dacă  $h$  este hermitic în  $\mathcal{A}$  avem

$$\tilde{\varphi}(h) = \varphi([h])$$

și deci  $h$  este hermitic în  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ . Cum  $\mathcal{A}/\mathfrak{I} = \{[h] + i[k], h, k \text{ hermitici în } \mathcal{A}\}$ , din teorema lui Vidav-Palmer rezultă că  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  este o  $B^*$ -algebră cu

$$([h] + i[k])^* = [h] - i[k]$$

și deci  $x \rightarrow [x]$  este un \*-homomorfism și deci avem și relația  $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{I}$ . Teorema este demonstrată.

*Observație.* Teorema rămâne adevărată și dacă  $\mathcal{A}$  este fără unitate după cum se poate constata ușor adjoncționând la  $\mathcal{A}$  un element pentru a deveni algebră cu unitate.

## § 11. UNELE PROPRIETĂȚI ALE ELEMENTELOR HERMITICE

În lucrarea sa privind generalizarea noțiunii de operator hermitic, Vidav a demonstrat că pentru orice element hermitic raza sa spectrală este egală cu norma numerică. Această teoremă a fost extinsă de Sinclair care a arătat că orice element hermitic este transaloid, adică oricare ar fi numărul complex  $\lambda$

$$r_{h+\lambda} = \|h + \lambda\|.$$

Independent de Sinclair, Browder a demonstrat că  $r_{h+\lambda} = \|h + \lambda\|$ .

Demonstrația care urmează este dată după Bonsall și Duncan  
**TEOREMA 2.11.1.** *Orice element hermitic este transaloid.*

Demonstrația va rezulta din câteva teoreme care prezintă interes și în sine.

Fie  $t$ ,  $|t| \leq 1$  și  $\arcsin t = \sum_{r=1}^{\infty} c_r t^r$ , iar

$$F_n(z) = \sum_{r=1}^n c_r (\sin z)^r.$$

Are loc

**TEOREMA 2.11.2.** *Fie  $K$  compactă în  $(-1/2\pi, 1/2\pi)$ . În acest caz există  $U$  deschisă în  $C$  astfel ca  $U \supset K$  și  $\lim F_n(z) = z$  uniform pe  $U$ .*

*Demonstrație.* Există o mulțime deschisă în  $C$ ,  $U$ , astfel ca  $U \supset K$  și astfel ca  $|\sin z| \leq 1$ , dacă  $z \in U$ . În acest caz seria  $\sum_{r=1}^{\infty} c_r (\sin z)^r$  converge uniform în  $U$  și deci limita sa este o funcție analitică pe  $U$ . Dar pentru  $t \in K$

$$\lim F_n(t) = t$$

și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 2.11.3.** *Dacă  $h$  este hermitic atunci  $r_h = \|h\|$ .*

*Demonstrație.* Putem presupune fără a restrînge generalitatea că  $r_h < \pi/2$  și deci  $\sigma(h) \subset (-\pi/2, \pi/2)$  de unde rezultă, conform calculului funcțional că

$$h = \lim F_n(h) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (\sin h)^r.$$

Cum  $h$  este hermitic,  $\|\sin h\| \leq \frac{1}{2} \|e^{ih}\| + 1/2 \|e^{-ih}\| = 1$  și prin urmare

$$\|h\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1/2$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.11.4. Dacă  $F$  este o funcție întreagă cu proprietatea că

$$\|F(z)\| \leq e^{|\operatorname{Im} z|},$$

atunci pentru  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi\}$  are loc relația

$$F(0) \cos \theta + F'(0) \sin \theta = \sum_{r \in \mathbb{Z}} r_n F(n\pi + \theta),$$

$$\text{unde } r_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi + \theta)} \sin^2 \theta.$$

*Demonstrație.* Pentru orice întreg  $n$ , fie  $\Gamma_n$  frontiera pătratului cu vîrfurile în  $\pm a_n + ia_n$  cu  $a_n = \theta + (n + 1/2)\pi$ . În acest caz are loc

$$\lim \int_{\Gamma_n} \frac{F(z) dz}{z^2 \sin(\theta - z)} = 0,$$

de unde rezultă imediat afirmația teoremei aplicînd teorema reziduurilor.

TEOREMA 2.11.5. Dacă  $h$  este hermitic,  $\|h\| \leq 1$  și  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi\}$  iar  $r_n$  ca în teorema 2.11.4 atunci

$$\cos \theta + i(\sin \theta) h = \sum r_n e^{(n\pi + \theta)ih}$$

*Demonstrație.* Fie  $f^* \in \mathcal{A}^*$  și  $\|f\| = 1$ , iar

$$F(z) = f^*(e^{izh})$$

care este întreagă și

$$|F(z)| \leq \|f^*\| \|e^{\operatorname{Re} z h}\| \|e^{-\operatorname{Im} z h}\| \leq e^{|\operatorname{Im} z| \tilde{w}(h)} \leq e^{|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Putem aplica teorema 2.11.4. și obținem

$$f^*(\cos \theta + (i \sin \theta) h) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n f^*(e^{(n\pi + \theta)ih}) = f^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{(n\pi + \theta)ih}\right)$$

$f^*$  este arbitrar în  $\mathcal{A}^*$ , teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă următoarele identități pe care le dăm în

TEOREMA 2.11.6. Fie  $h$  hermitic și  $\|h\| = 1$  atunci

$$h = \sum_n 4\pi^{-2} (2n+1)^{-2} e^{i(n+1/2)\pi i(h-1)},$$

$$1 = \sum_n 4\pi^{-2} (2n+1)^{-2}.$$

*Demonstrație.* Punem în formula din teorema 2.11.5.  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  și apoi  $h=1$ .



Demonstrația teoremei 2.11.1 se face astfel: Putem presupune fără a restringe generalitatea că  $\|h\| = 1$  și deci

$$\|\cos \theta + (i \sin \theta) h\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1$$

de unde rezultă că  $r_h = 1$ . Dar atunci

$$r_{\cos \theta + (i \sin \theta) h} \geq 1,$$

care ne dă că

$$r_{\cos \theta + (i \sin \theta) h} = \|\cos \theta + (i \sin \theta) h\|$$

care arată că  $\|h + \lambda\| = r_{h+\lambda}$ . Teorema este demonstrată.

Vom menționa că din această teoremă rezultă aproape imediat două rezultate.

**TEOREMA 2.11.7.** *Dacă  $h$  este un element hermitic cu proprietățile*

1.  $h$  este invertibil,
2.  $\|h\| = \|h^{-1}\| = 1$ ,

*atunci  $h = h^{-1}$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $t$  este real avem

$$\|1 + ith^{-1}\| = \|h + it\| = \|(1 + t^2)^{1/2}\|$$

și deci  $h^{-1}$  este hermitic.

Dar atunci

$$\|h - h^{-1}\| = r_{h-h^{-1}}$$

și cum  $\sigma(h) \subset [-1, 1]$  deducem că  $h = h^{-1}$ .

**TEOREMA 2.11.8.** *Dacă  $h$  este un element hermitic*

$$W(h) = \text{conv } \sigma(h).$$

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că pentru orice element,  $W(\cdot)$  conține spectrul. În adevăr, dacă  $\mathcal{A}_1$  este cea mai mică algebră comutativă care conține elementul respectiv și pe 1 atunci  $\sigma(\cdot)$  este spectrul în raport cu această algebră și cum  $\mathcal{A}_1$  este comutativă,  $\sigma(\cdot)$  este mulțimea numerelor de forma  $\Phi(\cdot)$ , unde  $\Phi$  este în mulțimea idealelor maximale și teorema lui Hahn-Banach ne dă afirmația noastră.

Pentru a demonstra teorema vom arăta că  $W(h) \subset \text{conv } \sigma(h)$  și aici va interveni în mod esențial rezultatul că  $h$  este transaloid. În fapt demonstrația pe care o dăm este adevărată pentru această clasă de elemente. Acest fapt rezultă din relația

$$W(h) = \bigcap_{\lambda} \{z, |z - \lambda| \leq \|h - \lambda\|\}.$$

În adevăr, dacă  $p \in W(h)$  avem  $|p - \lambda| = |f^*(h - \lambda)| \leq \|h - \lambda\|$  oricare ar fi  $\lambda$  complex. Invers, dacă  $p \in W(h)$  putem presupune că  $W(\cdot)$  este în  $\text{Re} z \geq 0$  și că  $p > 0$ . Cum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|h + t\| - t = \sup \text{Re } W(h),$$

deducem că  $\|h + t\| - t < p$  dacă  $t$  este suficient de mare și egalitatea este demonstrată. Din relația stabilită afirmația teoremei este evidentă.

## § 12. RAZA NUMERICĂ ȘI ITERATELE UNUI ELEMENT

Dacă  $\mathcal{A}$  este o algebră Banach cu element unitate atunci pentru  $a \in \mathcal{A}$  și orice întreg  $n$  are loc relația

$$\|a^n\| \leq \|a\|^n.$$

Este natural să se pună problema dacă o relație analogă este adevărată în cadrul unor algebre generale. Primul rezultat a fost obținut de către F. Smithies și Bernau și independent de Fujita, care au arătat că pe un spațiu Hilbert raza numerică  $w(T)$  a unui operator satisface relația

$$w(T^2) \leq [w(T)]^2$$

deci pentru orice întreg de forma  $2^k$ .

Rezultatul că pentru orice întreg  $n$  este adevărată relația

$$w(T^n) \leq [w(T)]^n$$

a fost obținut de Berger. Următoarele rezultate au fost obținute de către Kato și Berger și Stampfli.

Fie  $\mathcal{A}$  o  $B^*$ -algebră cu unitate și

$$\Delta = \{z, |z| \leq 1\},$$

$$P = \{z, \text{Re } z \geq 0\},$$

iar  $a \in \mathcal{A}$ . Să observăm că  $\tilde{w}(a) \leq 1$  dacă și numai dacă  $\text{Re } (1 - za)^{-1} \geq 0$  oricare ar fi  $z, |z| \leq 1$ .

Fie  $f^*$  o stare normală a lui  $a$ . În acest caz

$$\tilde{w}(a) \leq 1 \Leftrightarrow \{|f^*(a)| \leq 1, \forall f^*\} \Leftrightarrow \{\text{Re } f^*(1 - za) \geq 0, \forall f^*, \{z | z| \leq$$

$$\leq 1\}\} \Leftrightarrow \{f^*(\text{Re } (1 - za)), f^*, |z| \leq 1\} \Leftrightarrow \{\text{Re } (1 - za)^{-1} \geq 0, |z| < 1\}$$

Are loc :

**TEOREMA 2.12.1.** Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $B^*$ -algebră și  $a \in \mathcal{A}$  cu  $\tilde{w}(a) = 1$ , iar  $F$  este o funcție analitică într-o vecinătate a lui  $\Delta$  cu  $F(\Delta) \subset P$  atunci  $W(F(a)) \subset P - \text{Re } F(0)$ .

*Demonstrație.* Pentru  $|z| < 1$ ,

$$F(z) = -F(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} F(e^{it}) (1 - ze^{-it})^{-1} dt$$

și pentru  $r \in (0, 1)$  obținem

$$F(ra) = -F(0)^* \cdot 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F(e^{it}) (1 - re^{it})^{-1} dt$$

și din teorema de mai înainte

$$\operatorname{Re}(F(a) + \operatorname{Re} F(0) \cdot 1) \geq 1$$

care ne dă concluzia teoremei.

**TEOREMA 2.12.2.** Dacă  $\mathfrak{A}$  este o  $B^*$ -algebră și  $a \in \mathfrak{A}$  cu  $\tilde{w}(a) = 1$  iar  $F$  analitică într-o vecinătate a lui  $\Delta$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(\Delta) \subset \Delta$  atunci  $\tilde{w}(F(a)) \leq 1$ .

*Demonstrație.* Fie  $z$ ,  $|z| < 1$  și

$$G(\omega) = \frac{1 + zF(\omega)}{1 - zF(\omega)}$$

definită pe o vecinătate a lui  $\Delta$ . Evident  $G(\Delta) \subset P$ ,  $G(0) = 1$  și deci

$$W(G(a)) \subset P \setminus 1, \operatorname{Re}(G(a) + 1) \geq 0$$

de unde

$$\operatorname{Re}(1 - zF(a))^{-1} \geq 0$$

care ne dă că  $\tilde{w}(F(a)) \leq 1$ . Teorema este demonstrată.

Din această teoremă pentru  $F(z) = z^n$  rezultă că

$$\tilde{w}(a^n) \leq [\tilde{w}(a)]^n.$$

Vom mai nota că există exemple de operatori pe spații Hilbert pentru care :

1.  $TS = ST$ ,
2.  $\tilde{w}(TS) > \tilde{w}(T) \cdot \tilde{w}(S)$ .

Vom da unele exemple de operatori hermitici și pe care îi vom utiliza la demonstrația celebrei teoreme a lui Banach-Stone privind izometriile liniare în spațiul funcțiilor continue.

Vom menționa că aceste rezultate au fost date de Lumer. Aplicații la spații Orlicz au fost date de Lumer și Tam.

TEOREMA 2.12.3. Dacă pe  $C^n$  avem norma

$$\|x\| = \max |x_i| \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

atunci operatorul

$$Tx = ((Tx)_r) = (\lambda_r x_r), \quad \lambda_r \in R$$

este hermitic.

*Demonstrație.* Oum avem pentru orice  $t \in R$

$$(e^{itT}x)_r = e^{it\lambda_r}x_r$$

afirmația este evidentă.

Fie acum  $S$  un spațiu Hausdorff compact și  $\mathcal{C}(S)$  algebra Banach a funcțiilor continue pe  $S$  cu norma sup.

TEOREMA 2.12.4. Un operator  $T$  pe  $\mathcal{C}(S)$  este hermitic dacă și numai dacă este de forma

$$Tf = hf$$

unde  $h$  este o funcție reală în  $\mathcal{C}(S)$ .

*Demonstrație.* Condiția este evident suficientă.

Fie  $T$  hermitic în  $g \in C(S)$  iar  $x_0 \in W$  astfel ca  $g(x_0) = 1 = \|g\|$ . Oum

$$f^*(g) = g(x_0)$$

este o stare normală, deducem că  $(Tg)(x_0) \in R$  deoarece  $T$  este hermitic. În acest caz  $h = T_1 \in C_R(S) =$  spațiul Banach al funcțiilor reale din  $\mathcal{C}(S)$ . Dacă  $f \in C_R(S)$  fie  $f = f^+ - f^-$  descompunerea în funcții pozitive. Dacă  $\|f\| \leq 1$ ,  $f(x_0) = 0$  avem că  $f^+(x_0) = 0$  și deci

$(1 - f^+)(x_0) = 1 = 1 - f^+$  care ne dă că  $T(1 - f^+)(x_0) \in R$ ; deci  $(Tf^+)(x_0) \in R$ . Similar  $(Tf^-)(x_0) \in R$  și deci  $(Tf)(x_0) \in R$ .

Să punem

$$v(x) = (1 - f^2(x))^{1/2}$$

$$g(x) = v(x) + if(x)$$

și în acest caz avem

$$v(x) = g(x_0) = \|v\| = \|g\| = 1,$$

de unde

$$(Tv)(x_0) \in R, (Tv)(x_0) + i(Tf)(x_0) \in R$$

și prin urmare  $(Tf)(x_0) = 0$ . Dacă  $f \in C_R(S)$  avem

$$(f - f(x) \cdot 1)(x) = 0$$

și deci

$$(Tf)(x) = f(x) (T \cdot 1)(x) = h(x) \cdot f(x),$$

adică  $Tf = hf$  și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 2.12.5. (Banach-Stone).** *Dacă  $U$  este o izometrie liniară a spațiului  $\mathcal{C}(S)$ , atunci există un automorfism  $\Phi$  al spațiului  $\mathcal{C}(S)$  astfel ca*

$$Uf = U(1) \Phi(f).$$

*Demonstrație.* Dacă  $h \in C_R(S)$  să punem  $T_h(f) = hf$  oricare ar fi  $f \in \mathcal{C}(S)$ . În acest caz operatorul  $UT_hU^{-1}$  este hermitic și deci are forma

$$(UT_hU^{-1})f = \Phi(h)f,$$

unde  $\Phi(h) \in C_R(S)$  este un automorfism al spațiului  $C_R(S)$  și dacă punem  $f = U(1)$  avem

$$h = T_h 1 = UT_hU^{-1}U(1) = T_{\Phi(h)}U(1) = U(1)\Phi(h)$$

și cum  $U$  este liniară teorema este demonstrată.

## CONDIȚII CARE IMPLICĂ NORMALITATEA

După cum am văzut un operator normal are proprietatea de a fi normaloid, invariant normaloid, convexoid, de clasă  $(N, k)$ , proprietăți care nu sînt echivalente cu proprietatea de a fi normal.

Este deci natural să ne punem problema în ce condiții un operator normaloid este normal sau un operator convexoid este normal ș. a. m. d.

Rezultatele obținute în acest sens se referă la anumite proprietăți pentru spectrul operatorului ori la spațiul pe care acționează operatorul.

În cele ce urmează vom expune rezultate privind condițiile necesare, condiții suficiente ori condiții necesare și suficiente pentru ca un operator să fie hermitian sau unitar.

### § 1. CONDIȚII CARE IMPLICĂ PROPRIETATEA DE A FI HERMITIAN ORI UNITAR

Clasa operatorilor hermitieni și clasa operatorilor unitari constituie două clase importante de operatori normali și de aceea este interesant de a da condiții în care un operator pe un spațiu Hilbert este în una din aceste clase. Teoremele următoare dau informații în acest sens.

**TEOREMA 3.1.1.** *Condiția necesară și suficientă pentru ca un operator  $T$  definit pe un spațiu Hilbert  $E$  să fie hermitian este ca rangul său numeric să fie o submulțime a dreptei reale.*

Vom da mai întâi o lemă din care să rezulte ușor teorema.

**LEMA 3.1.2.** *Dacă  $T, S$  sînt operatori mărginiți pe spațiu Hilbert și dacă are loc relația*

$$0 \notin \text{cl} W(S) = \overline{W(S)},$$

atunci

$$\sigma(S^{-1}T) \subseteq \frac{\overline{W(T)}}{\overline{W(S)}}.$$

*Demonstrație.* După cum știm, pentru orice operator  $A$ ,  $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$  și deci  $S^{-1}$  există. Fie  $\lambda \in \sigma(S^{-1}T)$  și deci

$$S^{-1}T - \lambda I = S^{-1}(T - \lambda S),$$

care ne dă că  $0 \in \sigma(T - \lambda S)$ . De aici rezultă că

$$0 \in \text{cl} W(T - \lambda S) \subseteq \text{cl} W(T) - \lambda \text{cl} W(S)$$

și care înseamnă că

$$\lambda \in \frac{\text{cl} W(T)}{\text{cl} W(S)}.$$

Lema este astfel demonstrată.

Să trecem acum la demonstrația teoremei 3.1.1. Este evident că  $W(T) \subset R$  este necesară. Să arătăm că este și suficientă. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că  $0 \in W(T)$  și fie  $T = UR$ , în care caz  $U$  este unitar și să aplicăm lema de mai sus operatorului  $R^{-1}T^*$ ; vom avea

$$\sigma(R^{-1}T^*) = \sigma(U^{-1}) \subset \frac{\overline{W(T^*)}}{W(R^{-1})} \subset R^1,$$

care ne arată că  $\sigma(U^{-1}) = \{1\}$  sau  $\sigma(U^{-1}) = \{-1\}$  care ne dă că  $U = I$  sau  $U = -I$  și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 3.1.3.** *Să presupunem că  $T$  este un operator cu următoarele proprietăți :*

$$1. ST^p S^{-1} = T^{*p} \text{ p un întreg } \geq 1.$$

$$2. 0 \notin \text{cl } W(S) = \overline{W(S)} \text{ și } \sum_0^{p-1} \left( \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \right)^i \neq 0, \lambda, \mu \in \sigma(T) - \{0\}.$$

În acest caz  $\sigma(T) \subset R^1$ .

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că este suficient să considerăm numai punctele de pe frontiera mulțimii  $\sigma(T)$ . Să presupunem că pe frontiera mulțimii  $\sigma(T)$ ,  $\partial \sigma(T)$  există  $\lambda$  cu proprietatea că  $\text{Im } \lambda \neq 0$ , și cum  $\partial \sigma(T)$  este în spectrul aproximativ al operatorului  $T$ , există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0.$$

Deci rezultă că pentru orice  $1 \leq i \leq p$  avem

$$T^i x_n - \lambda^i x_n \rightarrow 0$$

și deci

$$S^{-1}T^{*p} Sx_n - \lambda^p S^{-1}Sx_n \rightarrow 0,$$

de unde rezultă că

$$T^{*p} Sx_n - \lambda^p Sx_n \rightarrow 0.$$

Cum însă putem scrie

$$(T^* - \lambda)(T^{*p-1} + \dots + \lambda^{p-1})Sx_n \rightarrow 0$$

din condiția 2 deducem că

$$(T^* - \lambda)Sx_n \rightarrow 0$$

și din identitatea

$$(\bar{\lambda} - \lambda) \langle Sx_n, x_n \rangle = \langle (T^* - \lambda)Sx_n, x_n \rangle -$$

$$- \langle (T^* - \bar{\lambda})Sx_n, x_n \rangle = \langle (T^* - \lambda)Sx_n, x_n \rangle - \langle Sx_n, (T - \lambda)x_n \rangle$$

care ne dă că (deoarece  $(\bar{\lambda} - \lambda) = -2i \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ )  $0 \in \overline{W(S)}$  și aceasta reprezintă o contradicție. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă ușor :

**COROLAR 3.1.4.** *Dacă  $T$  este cu proprietățile din teoremă și este în același timp convexoid atunci  $T$  este hermitian.*

*Demonstrație.* Din teorema 3.1.2 rezultă că  $\sigma(T)$  este în  $R^1$  și cum  $\operatorname{conv} \sigma(T) = \overline{W(R)}$ , rezultă că  $\overline{W(T)} \subset R^1$  și din teorema 3.1.1.  $T$  este hermitian.

**COROLAR 3.1.5.** *Dacă  $T$  este un operator normal unitar echivalent cu adjunctul său,  $T^* = U T U^{-1}$ ,  $\sigma(U) \subset \{e^{i\theta}, 0_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}$  atunci  $T$  este hermitian.*

*Demonstrație.* Operatorul  $U$  este convexoid și putem aplica teorema 3.1.3 pentru  $p = 1$ .

*Observația 3.1.6.* Teorema 3.1.3. nu este adevărată dacă cerem numai ca  $S$  să fie invertibil, chiar dacă  $S$  și  $T$  sînt operatori normali. În adevăr, să considerăm pe spațiul Hilbert  $l^2 = \{x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \sum |x_i|^2 < \infty\}$  cu baza  $\{e_i\}_{-\infty}^{\infty}$  și operatorul  $T$  definit astfel

$$Te_i = e_{i+1} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

și  $S$  definit astfel

$$Se_i = e_{i-1}.$$

Evident că avem relația

$$S^{-1}TS = T^{-1} = T^*$$

și

$$\sigma(T) = \{z, |z| = 1\}.$$

Următoarea teoremă este strîns legată de teorema 3.1.3 pentru cazul  $p = 1$ .

**TEOREMA 3.1.7.** *Dacă operatorul  $T$  are proprietatea că*

$$T^* = S^{-1}TS$$

*cu  $0 \notin \overline{W(S)}$ , atunci  $T$  este similar cu un operator hermitian.*

*Demonstrație.* Cum  $\overline{W(S)}$  este o mulțime convexă și închisă care nu conține pe zero, putem presupune, fără a restringe generalitatea că  $\overline{W(S)}$  este în  $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$  cu  $\varepsilon > 0$ . Să considerăm operatorul  $A = 1/2(S + S^*)$  care are rangul numeric în  $R_+^1$  și de asemenea este pozitiv și invertibil. Să observăm că avem relația

$$TA = AT^*$$

și că  $A^{1/2}TA^{1/2}$  este un operator hermitian ceea ce demonstrează teorema.

*Observația 3.1.8.* Exemplul din observația 3.1.6. arată că pozitivitatea operatorului din relația  $T^* = S^{-1}TS \Rightarrow T$  este similar cu un operator

hermitian, este esențială și următorul exemplu arată că invertibilitatea este de asemenea esențială.

Fie  $\{H_n\}_1^\infty$  o colecție de spații Hilbert finit-dimensionale, din  $H_n = \mathbb{C}^n$  și pentru fiecare  $n$ , să considerăm pe  $H_n$  operatorul care are matricea

$$S_n : H_n \rightarrow H_n$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \alpha_{n-1} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

în raport cu baza ortonormală a spațiului  $H_n$  și  $\alpha_i$  sînt numere reale distincte astfel ca  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1$ . De aici rezultă că avem

$$\|S_n\| \leq 2.$$

Fie acum  $\xi$ ,  $|\xi| = 1$  și

$$x = e_1 = \xi^{-1} e_2 + \dots + (-1)^{n-1} \xi^{-n+1} e_n,$$

care are proprietatea că

$$\|x\| = n^{1/2}$$

și cum

$$(\xi I_n + S_n) x = (\xi + \alpha_1) e_1 - \xi^{-1} \alpha_2 e_2 + \dots + (-1)^{n-1} \xi^{-(n+1)} \alpha_n e_n$$

care ne dă că

$$\|(\xi I_n + S_n) x\| \leq 2,$$

de unde rezultă

$$\|(\xi I_n + S_n)^{-1}\| \geq n^{1/2}/2$$

(prin  $I_n$  am însemnat operatorul identitate definit pe  $H_n$ ).

Să notăm cu  $S$  operatorul definit pe  $H = \oplus H_n$  astfel ca restricția sa la  $H_n$  să fie  $S_n$  și cum valorile proprii ale lui  $S_n$  sînt reale putem găsi  $T_n > 0$  astfel ca  $T_n S_n = S_n^* T_n$ . Putem presupune că  $\|T_n\|_{H_n} \leq 1$  și deci există  $T : H \rightarrow H$  cu proprietatea că  $T|_{H_n} = T_n$ . Cum  $T > 0$  și  $TH$  este dens în  $H$  avem că  $T > 0$  și  $TS = S^* T$ . Din calculele făcute mai sus rezultă că  $\sigma(S) \supset \{\xi, |\xi| = 1\}$  și deci spectrul nu este real.

**Observația 3.1.9.** Următorul exemplu arată că  $S^{-1}TS = T^*$  și  $0 \notin \text{cl } W(S)$  nu implică faptul că  $T$  este normal (și deci nici hermitian).

Fie  $S > 0$  arbitrar și  $B$  hermitian astfel ca  $SB \neq BS$ . În acest caz  $T = SB$  are proprietățile enunțate și nu este hermitian.

**TEOREMA 3.1.10.** *Dacă  $T$  este operator cu proprietatea că este similar cu un operator hermitian atunci  $T$  este similar cu  $T^*$  și  $S$  care realizează similaritatea are proprietatea că  $0 \notin \overline{W(S)}$ .*

*Demonstrație.* Fie  $T = RAR^{-1}$  unde  $A$  este hermitian și deci  $(RA^*)^{-1} TRR^* = T^*$  și  $0 \notin \overline{W(RA^*)}$  deoarece  $RA^*$  este pozitiv și invertibil.

Teorema este demonstrată.

Alte condiții care implică proprietatea de a fi hermitian se referă la proprietățile rezolventei. Vom da acum un rezultat în această direcție. Reamintim, pe scurt noțiunea de operator cu proprietatea  $G_1$ . Fie  $T$  un operator,  $\sigma(T)$  spectrul său,  $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$  mulțimea rezolventă și  $R_\lambda(T) = (T - \lambda)^{-1}$  pentru  $\lambda \in \rho(T)$ . Este cunoscut că pentru orice operator  $T \in \mathcal{L}(X)$  are loc relația

$$[\text{dist}(\lambda, \sigma(T))]^{-1} \leq \|R_\lambda(T)\|$$

și dacă  $T$  este un operator normal atunci are loc chiar egalitatea.

Prin definiție, un operator  $T$  se va numi cu proprietatea  $G_1$  dacă

$$[\text{dist}(\lambda, \sigma(T))] = \|R_\lambda(T)\|.$$

În legătură cu proprietatea  $G_1$  vom menționa că în raport cu rangul numeric orice operator are proprietatea  $G_1$ : pentru orice  $\lambda$  care nu este în  $\text{cl } W(T) = \text{închiderea rangului numeric } W(T)$  avem

$$\|(T - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \text{cl } W(T))}.$$

În adevăr, pentru orice  $x$ ,  $\|x\| = 1$  avem relația

$$\begin{aligned} \|(T - z)x\| &\geq |\langle (T - zI)x, x \rangle| = |\langle Tx, x \rangle - z| \geq \\ &\geq \min \{|z - \omega|, \omega \in \text{cl } W(T)\} = \text{dist}(z, \text{cl } W(T)), \end{aligned}$$

care este echivalentă cu afirmația de mai sus.

De asemenea remarcăm că demonstrația de mai sus nu utilizează explicit structura de spațiu Hilbert.

Să presupunem acum că  $T$  este un operator hermitic și deci pentru orice  $\lambda$ ,  $\text{Im } \lambda \neq 0$  avem că  $\lambda \in \rho(T)$  și

$$\|R_\lambda(T)\| \leq 1/|\lambda|.$$

Teorema care urmează ne dă informații asupra operatorului utilizând rezolventa.

**TEOREMA 3.1.11.** *Dacă un operator  $T$  are proprietățile:*

1.  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^1$ ,
2.  $\|R_\lambda(T)\| \leq 1/|\lambda|$ ;  $\lambda \in \rho(T)$ ;  $\text{Im } \lambda \neq 0$ ;  $\text{Re } \lambda = 0$ ,

*atunci  $R$  este hermitian.*

*Demonstrație.* Vom arăta că rangul numeric  $W(T)$  este o submulțime a axei reale. Fie pentru aceasta  $\lambda = i\mu$  cu  $\mu$  real și deci avem

$$\|R_{i\mu}\| \leq 1/|\mu|.$$

De aici rezultă că pentru  $x \in E$  avem relația :

$$|\mu| \|x\| \leq \|(T - i\mu)x\|,$$

care ne dă

$$\mu^2 \|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 - 2\mu \operatorname{Im} \langle Tx, x \rangle$$

sau

$$2\mu \operatorname{Im} \langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\|^2.$$

Cum  $\mu$  este un număr real arbitrar deducem că :

$$|\operatorname{Im} \langle Tx, x \rangle| \leq \frac{1}{|\mu|} \|Tx\|^2,$$

de unde rezultă că

$$\operatorname{Im} \langle Tx, x \rangle = 0$$

și teorema este demonstrată.

Teorema următoare dă condiții necesare și suficiente pentru ca un operator definit pe un spațiu Hilbert  $E$  să fie unitar.

**TEOREMA 3.1.12.** *Următoarele clase de operatori sînt identice :*

1°. *Clasa operatorilor unitari ;*

2°. a)  $T \in \mathcal{C} \Rightarrow T^{-1}$  există și este definit peste tot, iar  $T$  are proprietate  $\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in E$ ;

b)  $w(T) \leq 1$ ;

3°. *clasa  $\mathcal{C}_1$  a operatorilor cu proprietățile :*

a<sub>1</sub>)  $0 \in \rho(T)$  și  $\|R_0(T)\| \leq 1$

b<sub>1</sub>) *dacă  $\{t_n\}$  este un șir nemărginit de numere  $t_n \geq 1$ ,*

$$\|R_{z_n(T)}\| \leq 1/t_n - 1, \quad |z| = t_n.$$

*Demonstrație.* Vom demonstra că au loc relațiile :

$$1^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 1^\circ.$$

Fie deci  $U$  un operator unitar. Este evident că  $0 \in \rho(U)$  și că  $\|R_0(U)\| \leq 1$ . Din teoria spectrală a operatorilor unitari deducem că dacă,  $t_n > 1$  avem

$$\|R_z(U)\| = \frac{1}{d(z, \sigma(T))} \leq \frac{1}{t_n - 1} ; \quad |z| = t_n$$

și deci  $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$  este demonstrată. Să presupunem că  $3^\circ$  este adevărată. Să presupunem că avem  $z$ ,  $|z| = t_n$  și dacă  $x \in E$  avem

$$\|x\| \leq (t_n - 1)^{-1} \cdot \|(T - z)x\|$$

sau

$$\|x\|^2 (t_n - 1)^2 \leq \|Tx\|^2 + t_n^2 \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} z \langle Tx, x \rangle.$$

Dacă  $\|x\| = 1$  și  $\langle Tx, x \rangle = \rho e^{i\varphi}$ ,  $z = t_n e^{i\theta}$  inegalitatea ne dă

$$2t_n [\rho \cos(\theta - \varphi) - 1] \leq \|Tx\|^2 - 1$$

și deci  $\rho \leq 1$ . Deci  $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ .

Să presupunem acum că  $2^\circ$  este adevărată. Cum  $T$  este invertibil, operatorul  $U = T(T^*T)^{-1/2}$  este unitar, și dacă  $R = (T^*T)^{1/2}$  atunci  $T = UR$ . Cum  $R$  este hermitian spectrul său este în intervalul  $[1, \|R\|]$  și deci  $R = R_1 + I$  cu  $R_1$  pozitiv. Dacă  $\|x\| = 1$  și  $|\langle R_1 x, x \rangle| = 1 - \varepsilon$  cu  $\varepsilon > 0$  avem

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \langle U(I + R_1)x, x \rangle = \\ &= \langle Ux, x \rangle + \langle UR_1 x, x \rangle = \langle Ux, x \rangle + \langle R_1 x, U^{-1}x \rangle. \end{aligned}$$

Fie  $y$ ,  $\|y\| = 1$  astfel ca  $\langle x, y \rangle = 0$  și  $R^{-1}x = \alpha x + \beta y$ . În acest caz :

$$\alpha = \overline{\langle Ux, x \rangle} \text{ și } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Cum  $W(T) \leq 1$  deducem că

$$|\langle Tx, x \rangle| = |\langle Ux, x \rangle [1 + \langle R_1 x, x \rangle + \bar{\beta} \langle R_1 x, x \rangle]| \leq 1.$$

Din egalitatea lui Schwarz rezultă că

$$|\langle R_1 x, x \rangle|^2 \leq \langle R_1 x, x \rangle \langle R_1 y, y \rangle \leq \|R_1\| \langle R_1 x, x \rangle$$

și cum

$$\|\beta\| \leq \sqrt{2\varepsilon}$$

deducem că

$$(1 - \varepsilon) (1 + \langle R_1 x, x \rangle) \leq 1 + 2 \|R_1\| \varepsilon \langle R_1 x, x \rangle^{1/2}.$$

De aici rezultă că  $\frac{\langle R_1 x, x \rangle}{\varepsilon}$  este mărginit dacă  $\varepsilon \rightarrow 0$  și de asemenea există  $k$  astfel ca

$$\langle R_1 x, x \rangle \leq k[1 - |\langle Ux, x \rangle|].$$

Fie  $U = \int_0^1 e^{2\pi i \theta} dE_\theta$  și pentru orice întreg  $n$ ,

$$P_k = E \frac{k}{n} - E \frac{k-1}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Dacă  $x \in P_k E$  și  $\|x\| = 1$  atunci  $\langle Ux, x \rangle$  este în înfășurătoarea convexă a numerelor din cercul unitate care sînt într-un unghi cu arcul corespunzător pe cercul de lungime  $\frac{2\pi}{n}$  și deci

$$1 - |\langle Ux, x \rangle| \leq \frac{\pi}{n^2},$$

de unde rezultă că

$$\|R_1 x\|^2 \leq \langle R_1^2 x, x \rangle \leq \|R_1\| k \frac{\pi}{n^2}$$

care ne dă că

$$\|R_1 x\| \leq C \frac{\|x\|}{n}$$

oricare ar fi  $x \in P_k E$ . Fie  $z$  arbitrar și  $y = R_1 z$ . În acest caz

$$|\langle y, x \rangle| = |\langle R_1 z, x \rangle| = |\langle z, R_1 x \rangle| \leq \|z\| \|R_1 x\| \leq \|z\| C \cdot \frac{\|x\|}{n}$$

și dacă  $x = P_k y$  obținem

$$\|P_k y\|^2 = \langle y, P_k y \rangle \leq \|z\| \|P_k y\| \frac{C}{n},$$

de unde rezultă că

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^n \|P_k y\|^2 \leq n \|z\|^2 C^2 \frac{1}{n^2} = \|z\|^2 \frac{C^2}{n}$$

și cum  $n$  este arbitrar rezultă că  $y = 0$ . Cum însă și  $z$  este arbitrar deducem că  $R_1 = 0$  și deci  $T = U$ . Teorema este astfel demonstrată.

Următorul exemplu arată că dacă spațiul Hilbert  $E$  este infinit-dimensional, condiția ca un operator să fie cu proprietatea  $G_1$  nu este suficientă pentru a asigura că operatorul este normal.

Să considerăm operatorul  $T_1$  pe spațiul Hilbert cu două dimensiuni  $E_1$ , care are matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și este nilpotent (deci  $\sigma(T_1) = 0$ ), iar  $T_2$  operatorul definit pe un spațiu Hilbert infinit-dimensional,  $E_2$  prin

$$T_2 e_i = \alpha_i e_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

unde  $\{e_i\}$  este o bază ortonormală a spațiului  $E_2$  și  $\alpha_i$  sînt aleși astfel ca

$$\min_i |z - \alpha_i| \leq |z|^2,$$

oricare ar fi  $|z| \in (0,1)$ . Operatorul  $T = T_1 \oplus T_2$  definit pe  $E_1 + E_2$  are proprietatea  $G_1$  și evident nu este normal.

*Observație.* Acest exemplu arată că există operatori cu proprietatea  $G_1$  și astfel că restricția la anumite subspații invariante nu mai are proprietatea  $G_1$ .

Următoarea teoremă se referă la o clasă specială de operatori.

**DEFINIȚIA 3.1.13.** Un operator  $T$  definit pe un spațiu Banach se spune că este o contracție unimodulară dacă :

1.  $\|T\| \leq 1$ .
2.  $\sigma(T) \subset \{z, |z| = 1\}$ .

**TEOREMA 3.1.14.** Dacă  $T$  este o contracție unimodulară și vectorii proprii generează spațiul Hilbert  $E$  atunci  $T$  este unitar.

*Demonstrație.* Dacă demonstrăm că

$$H_\xi = \{x, Tx = \xi x\}, H_\eta = \{y, Ty = \eta y\}.$$

sînt subspații ortogonale, atunci cum

$$E = \bigoplus_{\xi \in \sigma T} H_\xi$$

afirmația teoremei este demonstrată.

Fie deci  $x \in H_\xi$  și  $y \in H_\eta$  și cum  $T$  este o contracție unimodulară

$$\|T(\alpha x + \beta y)\|^2 \leq \|\alpha x + \beta y\|^2$$

și deci

$$\|\alpha \xi x + \beta \eta y\|^2 \leq \|\alpha x + \beta y\|^2$$

ori

$$|\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \alpha \bar{\xi} \bar{\eta} \langle x, y \rangle \leq |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2$$

$$\cdot \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle.$$

Cum însă  $\alpha, \beta$  sînt numere arbitrare și relația de mai sus se scrie

$$\operatorname{Re} \alpha \bar{\beta} \xi \bar{\eta} \langle x, y \rangle \leq \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle$$

deducem că trebuie să avem  $\langle x, y \rangle = 0$  și teorema este demonstrată.

*Observație.* Dacă se consideră pe spații Hilbert o clasă de operatori care generalizează clasa de operatori introdusă mai sus și anume: un operator se va numi *contracție numerică unimodulară* dacă:

1.  $w(T) \leq 1$ ,
2.  $\sigma(T) \subset \{z, |z| = 1\}$ .

atunci teorema 3.1.14 se poate extinde și la această clasă de operatori.

## § 2. CONDIȚII DE NORMALITATE

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $T$  un operator liniar și continuu definit pe  $H$ ; este cunoscut că dacă  $T$  este normal, adică pentru orice  $x \in H$  avem  $T^*Tx = TT^*x$ , atunci operatorul are și următoarele proprietăți:

1.  $r_T = \|T\|$ ,
2.  $\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$ ,
3. pentru orice  $\lambda$ ,  $\|T + \lambda I\| = r_{T+\lambda I}$ ,
4. are proprietatea  $G_1$ ,
5. orice polinom în  $T$  și  $T^*$  este normaloid,
6.  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ .

Este de asemenea cunoscut că aceste proprietăți sînt, în general, mai slabe decît normalitatea. Apare astfel natural problema în ce condiții un operator este normal. În cele ce urmează vom da condiții suficiente, condiții necesare și suficiente pentru ca un operator  $T$  să fie normal. Vom remarca faptul deosebit de important că un rol important în aceste condiții îl are dimensiunea spațiului Hilbert (în sensul că spațiul este finit-dimensional sau infinit-dimensional).

Scopul nostru este de a prezenta mai întîi condiții necesare și suficiente pentru ca un operator definit pe un spațiu Hilbert finit-dimensional să fie normal. Vom observa că unele din aceste condiții pot fi extinse în mod adecvat la cazul spațiilor infinit-dimensionale.

Vom prezenta mai întîi condițiile necesare. Înainte de a face aceasta vom reaminti pe scurt forma operatorilor normali. Fie deci  $E$  un spațiu Hilbert finit-dimensional și  $T$  un operator liniar definit pe  $E$ . Se știe că un operator este normal dacă și numai dacă  $TT^* = T^*T$ . Fie  $\sigma(T)$  spectrul lui  $T$ ,  $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  și  $C(\sigma)$  algebra funcțiilor continue pe  $\sigma(T)$ . Pentru orice polinom  $p(z, \bar{z})$  să punem  $p(T, T^*) = \sum_0^k \alpha_{ij} T^i T^{*j}$

dacă  $p(z, \bar{z}) = \sum_0^k \alpha_{ij} z^i \bar{z}^j$ .

Homomorfismul

$$p(z, \bar{z}) \rightarrow p(T, T^*)$$

are proprietatea că

$$\|p(T, T^*)\| = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |p(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)|$$

și deci se poate prelungi la tot spațiul  $C(\sigma(T))$ . Vom observa că deoarece pentru orice mulțime finită este adevărată afirmația:  $\bar{z}$  este un polinom de  $z$ , în reprezentarea de mai sus este suficient să considerăm numai polinoame în  $z$ . Să luăm funcția

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} 1 & z = \lambda_i, \\ 0 & z \neq \lambda_i \end{cases}$$

definită pe  $\sigma(T)$ , și cum  $\varphi_i(z) = \varphi_i^2(z)$  rezultă că operatorii corespunzători satisfac proprietățile:

- (1)  $E_i^2 = E_i = E_i,$
- (2)  $E_i E_j = E_j E_i = 0, \quad i \neq j,$
- (3)  $E_1 + \dots + E_n = I,$
- (4)  $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i.$

De aici rezultă imediat că pentru orice polinom  $p(z)$  avem

$$(*) \quad \|p(T)\| = \max_{0 \leq i \leq 1} p(\lambda_i).$$

**COROLAR 3.2.1.** Pentru orice  $\lambda$  număr complex operatorul  $p_\lambda = T - \lambda I$  este normaloid, adică

$$\|T_\lambda\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |(\lambda - \lambda_i)| = \gamma_\lambda = \text{raza spectrală}.$$

**COROLAR 3.2.2.** Pentru orice  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  avem că

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i|} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$$

adică  $T$  are proprietatea  $G_1$ .

**COROLAR 3.2.3.** Pentru orice operator normal

$$\text{conv } \sigma(T) = \text{cl} W(T).$$

Aceasta rezultă din corolarul 3.2.1. și din teorema lui Saito-Yoshino.

**COROLAR 3.2.4.** Pentru orice operator normal și orice polinom  $p(z)$  are loc relația

$$\|p^2(T)\| = \|p(T)\|^2.$$

Aceasta rezultă din relația (\*).

**COROLAR 3.2.5.** *Orice subspațiu invariant al unui operator normal reduce operatorul.*

În adevăr, fie  $T$  un operator normal și  $H_1$  un subspațiu invariant pentru  $T$ . Cum  $T|_{H_1}$  este hipo-normal și  $H_1$  este finit-dimensional rezultă că în fapt este normal și teorema este demonstrată.

*Observație.* O teoremă mai generală se referă la operatorii normali și compacți definiți pe spații Hilbert.

**COROLAR 3.2.6.** *Orice operator normal  $T$  este de clasă  $(N, K)$ .*

Demonstrația se face observînd că orice operator normal este de clasă  $(N) = \text{clasă } (N, k)$ . În adevăr, avem pentru  $x$ ,  $\|x\| = 1$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|.$$

și afirmația este adevărată.

**COROLAR 3.2.7.** *Orice operator normal este invariant normaloid..*

(Aceasta înseamnă că dacă  $T$  este un operator și  $M$  este un subspațiu invariant al lui  $T$ , operatorul restricție este normaloid, adică  $\|T/M\| = \gamma_{T/M}$ ).

*Demonstrație.* Rezultă imediat deoarece orice operator de clasă  $N$  este normaloid și nu rămîne decît să aplicăm corolarul 3.2.6.

*Observație.* Corolarul rezultă de asemenea și din corolarul 3.2.5

Vom da acum cîteva condiții suficiente pentru ca un operator să fie normal.

**TEOREMA 3.2.8.** (von Neumann). *Dacă  $T$  este un operator definit pe un spațiu Hilbert și  $F$  este o mulțime finită în planul complex și pentru orice polinom  $p(z)$  avem*

$$\|p(T)\| = \max_{z \in F} |p(z)|$$

atunci  $T$  este normal și  $\sigma(T) \subset F$ .

*Demonstrație.* Este evident că dacă  $p_k(z)$  este polinomul de grad  $(n-1)$  și noi putem presupune fără a restrînge generalitatea că  $\sigma(T) = F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , care are valoarea 1 în  $\lambda_k$  și zero în celelalte puncte, vom avea, pentru orice  $z \in F$ ,

$$z = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k(z).$$

Să considerăm operatorii :

$$p_k(T) = E_k$$

și după cum se verifică imediat, avem

$$p_k^2(T) = E_k^2 = E_k$$

și cum

$$\|p_k(T)\| = \sup \|p_k(\lambda_j)\| = 1$$

rezultă imediat că  $E_k$  sînt operatori hermitici. Cum  $E_k E_j = \delta_{kj} E_j$ , unde  $\delta_{kj}$  este simbolul lui Kronecker, deducem că

$$T = \sum_1^n \lambda_k E_k$$

care arată că  $T$  este un operator normal. Teorema este demonstrată.

*Observație.* În demonstrație nu a intervenit faptul că spațiul Hilbert  $E$  este finit dimensional și deci teorema este adevărată pe spații Hilbert de dimensiune arbitrară.

Vom da acum o teoremă generală care va fi folosită de mai multe ori în acest capitol.

**TEOREMA 3.2.9.** *Dacă  $T$  este un operator normal și compact atunci are cel puțin o valoare proprie normală.*

*Demonstrație.* Dacă  $T$  este un operator și  $\lambda \in \sigma(T)$  atunci punînd

$$E_T(\lambda) = \{x, Tx = \lambda x\}$$

se spune că  $\lambda$  este valoare proprie normală dacă

$$E_T(\lambda) = E_T(\bar{\lambda}).$$

Fie deci  $T$  normal și după cum știm  $\|T\| = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}$  și deci există  $\{x_n\}$  astfel ca  $\|x_n\| = 1$ ,

$$\lim |\langle Tx_n, x_n \rangle| = \|T\|$$

și putem presupune, fără a restrînge generalitatea că  $\{Tx_n\}$  este convergent, iar

$$\lim \langle Tx_n, x_n \rangle = \lambda,$$

de unde rezultă că  $|\lambda| = \|T\|$ . În acest caz

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n \rangle - \langle x_n, Tx_n \rangle - \lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + |\lambda|^2$$

și pentru  $n \rightarrow \infty$

$$\lim \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|y\|^2 - |\lambda|^2$$

unde  $y = \lim Tx_n$ . Cum  $\|y\| \leq \|T\| \|x_n\| = \|T\| = |\lambda|$  deducem că

$$\lim (Tx_n - \lambda x_n) = 0$$

și deci

$$Ty = \lambda \lim Tx_n = \lambda \lim Tx_n = \lambda y,$$

adică  $E_T(\lambda)$  nu se reduce la  $\{0\}$ . Faptul că este valoare proprie normală este evident. Teorema este demonstrată.

Vom da acum o teoremă privind normalitatea.

**TEOREMA 3.2.10.** *Dacă  $\Lambda$  este o submulțime în plan și  $T_\lambda = T - \lambda I$  este un operator normaloid pentru  $\lambda \in \Lambda$ ,  $T$  este normal dacă :*

- 1°. *trivial, dacă  $\dim H = 1$ ,*
- 2°.  *$\Lambda$  se reduce la un punct și  $\dim H = 2$ ,*
- 3°.  *$\Lambda$  se reduce la două puncte distincte și  $\dim H = 3$ ,*
- 4°.  *$\Lambda$  se reduce la trei puncte distincte și  $\dim H = 4$ .*

*Demonstrație.* Vom avea nevoie de un rezultat general pe care îl vom da sub formă de:

**TEOREMA 3.2.11.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  și  $\lambda$  este în  $\sigma(T)$  cu  $|\lambda| = \|T\|$  atunci există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca*

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0,$$

$$T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0.$$

Vom observa că  $\lambda \in W(T)$  și tehnica de demonstrație a teoremei 3.2.9. se poate aplica și aici obținând afirmația teoremei.

*Demonstrația teoremei 3.2.10.* Cazul 1° fiind trivial îl omitem.

Cazul 2°. Fie  $\{\lambda_0\} = \Lambda$  și  $\mu \in \sigma(T)$  astfel ca

$$[T\lambda_0 - (\mu - \lambda_0)]x_n \rightarrow 0,$$

$$|\mu - \lambda_0| = \|T\lambda_0\|.$$

$$[T^*\lambda_0 - (\bar{\mu} - \bar{\lambda}_0)]x_n \rightarrow 0$$

Deducem că  $Tx_0 = \mu x_0$ ,  $T^*x_0 = \bar{\mu}x_0$ . Pe spațiul ortogonal  $\{x_0\}^\perp$  operatorul  $T$  are forma  $Ty_0 = \mu_1 y_0$ ,  $T^*y_0 = \bar{\mu}_1 y_0$ , deoarece  $\{x_0\}$  reduce pe  $T$ . Teorema este demonstrată în acest caz.

Cazul 3°. Fie deci  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ . Există  $\mu_0 \in \sigma(T)$  și  $x_0$  astfel ca

$$(*) \quad Tx_0 = \mu_0 x_0, \quad T^*x_0 = \bar{\mu}_0 x_0.$$

Analog rezultă că există  $\mu_1$  și  $x_1$  astfel ca

$$(**) \quad Tx_1 = \mu_1 x_1, \quad T^*x_1 = \bar{\mu}_1 x_1.$$

Vom observa că  $x_0$  și  $x_1$  sînt elemente ortogonale. În adevăr

$$(T - \lambda_0)x_0 = (\mu_0 - \lambda_0)x_0, \quad (T^* - \bar{\lambda}_0)x_0 = (\bar{\mu}_0 - \bar{\lambda}_0)x_0$$

(\*\*\*)

$$(T - \lambda_1)x_1 = (\mu_1 - \lambda_1)x_1, \quad (T^* - \bar{\lambda}_1)x_1 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)x_1$$

și dacă  $\mu_0 \neq \mu_1$  afirmația este evidentă deoarece avem relațiile (\*), (\*\*). Dacă  $\mu_0 = \mu_1$  cum  $\lambda_0 \neq \lambda_1$  putem obține afirmația din relațiile (\*\*\*). Evident că subspațiul generat de  $\{x_0, x_1\}$  reduce pe  $T$  și deci și  $\{x_0, x_1\}^\perp$  reduce pe  $T$ ; dar atunci există  $z_0 \in \{x_0, x_1\}^\perp$  astfel ca  $Tz_0 = \mu_2 z_0$ ,  $T^*z_0 = \bar{\mu}_2 z_0$ . Deducem că  $T$  este normal și teorema este demonstrată și în acest caz.

Cazul 4°. Vom proceda exact ca mai sus, în acest caz  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  și obținem teorema.

Faptul că teorema este falsă dacă  $\dim H = 5$  rezultă din următorul exemplu: să luăm  $H$  ca sumă directă ortogonală de două subspații  $H_1$  și  $H_2$  cu  $\dim H_1 = 3$ ,  $\dim H_2 = 2$  și  $T_1, T_2$  doi operatori definiți pe  $H_1$  respectiv  $H_2$  având matricile

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I_1 & 0 \\ 0 & A_2 - \lambda I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \lambda & 0 \\ 0 & A_2 \lambda \end{pmatrix}.$$

Din definiția normei rezultă că

$$\|A_\lambda\| = \max\{\|A_{1\lambda}\|, \|A_{2\lambda}\|\}$$

și să luăm  $A_1$  un operator normal astfel ca

$$\|A_{1\lambda}\| \geq 1 + |\lambda|,$$

iar  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (care evident nu este normală) care are proprietatea că  $\|A_2\| = 1$ , de unde rezultă că

$$\|A_{2\lambda}\| \leq 1 + |\lambda|.$$

Însă

$$\|A_\lambda^2\| = \max\{\|A_{1\lambda}^2\|, \|A_{2\lambda}^2\|\} = \|A_{1\lambda}^2\| = \|A_{1\lambda}\|^2$$

și deci  $A$  este normaloid fără a fi normal.

Să presupunem că avem un operator  $T$  definit pe un spațiu Hilbert și  $P$  o proprietate. Vom spune că operatorul  $T$  are proprietatea red- $P$  dacă restricția lui  $T$  la orice subspațiu invariant pentru  $T$  și  $T^*$  are proprietatea  $P$ .

Are loc:

TEOREMA 3.2.12. Dacă  $\dim H < \infty$  și  $T \in \mathcal{L}(H)$  atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

1.  $T$  este normal,
2. red-transaloid,
3. red-normaloid,
4. red-convexoid,
5. red-spectraloid,
6. red-clasă (N).

*Demonstrație.* Vom avea nevoie de următoarea teoremă similară într-un anumit sens teoremei 3.2.9.

TEOREMA 3.2.13. Dacă  $T$  este un operator spectraloid atunci dacă  $T$  este compact orice  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $|\lambda| = r_T$  este valoare proprie normală.

*Demonstrație.* Aceasta rezultă din următoarea teoremă mai generală.

TEOREMA 3.2.14. Dacă  $T$  este un operator arbitrar liniar și mărginit atunci:

1) orice  $\lambda \in \partial W(T)$ , valoare proprie, atunci  $\lambda$  este valoare proprie normală;

2) dacă  $\lambda \in \partial W(T)$  și există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$ ,  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$  atunci  $T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0$ .

*Demonstrație.* 1) Fie deci  $x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$  și  $Tx_0 = \lambda x_0$  cu  $\lambda \in \partial W(T)$ . Dacă  $p(\lambda)$  este un polinom de forma  $p(z) = \alpha z + \beta$  atunci putem presupune că  $\lambda = 0$  și  $\operatorname{Re} T \leq 0$ . Deci  $\langle Tx, x \rangle = 0$  și cum  $\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle = \langle \operatorname{Re} Tx, x \rangle = 0$  deducem că  $0 = Tx = \operatorname{Re} Tx + i \operatorname{Im} Tx$  astfel că  $\operatorname{Im} Tx = 0$  și deci  $T^*x = 0$  deoarece

$$T^*x = \operatorname{Re} Tx - i \operatorname{Im} Tx.$$

2) Aplicăm aceeași tehnică, numai că avem șiruri.

Să dăm acum demonstrația teoremei 3.2.12. Vom remarca faptul că orice  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $|\lambda| = r_T$ , pentru  $T$  spectraloid este valoare proprie normală deoarece  $r_T = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}$ . Evident că implicațiile

$$1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 5^\circ$$

$$2^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 5^\circ$$

sînt adevărate în orice spațiu Hilbert. Dacă  $5^\circ$  are loc atunci fie  $|\lambda_0| = r_T$  care este valoare proprie normală conform observației de mai sus; operatorul  $T_{m(x_0)^\perp}$ ,  $m(x_0) = \{x_0\}$ , este spectraloid și deci are o valoare proprie normală  $\lambda_1$   $|\lambda_1| = r_{T_{m(x_0)^\perp}}$ . Deducem că

$$Tx = \sum_0^n \lambda_i x_i \mu_i,$$

$$T^*x = \sum_0^n \bar{\lambda}_i x_i \mu_i,$$

de unde obținem că  $T$  este normal.

Fie acum  $6^\circ$  adevărată și atunci  $T$  este red-normaloid și afirmația rezultă din  $3^\circ$ . Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 3.2.15.** Dacă  $\dim H < \infty$  și  $\sigma(T)$  este situat pe un poligon convex atunci  $T$  este normal.

*Demonstrație.* Evident că orice punct din  $\sigma(T)$  este o valoare proprie normală și cum vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali rezultă imediat că  $T$  este normal.

### § 3. CONDIȚII DE NORMALITATE PE SPAȚII INFINIT-DIMENSIONALE

Vom face mai întîi o observație privind red- $P$  pentru un operator sau rest- $P$  (restricția operatorului  $T$  la subspațiul respectiv are proprietatea  $P$ ): dacă  $T$  are proprietățile rest- $P$  sau red- $P$  nu rezultă în mod necesar că și  $T^*$  are proprietățile rest- $P$  sau red- $P$ .

În adevăr să considerăm „translația” definită prin

$$Te_i = e_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots$$

care are proprietatea că este normaloid, transaloid, convexoid etc. Operatorul  $T^*$  pe subspațiul generat de  $\{e_1, e_2\}$  care este invariant pentru  $T^*$  nu este normaloid, convexoid etc. după cum se vede ușor. Vom observa că  $T^*/\{e_1, e_2\}$  este nilpotent.

**TEOREMA 3.3.1.** Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe un spațiu Hilbert atunci următoarele afirmații sînt echivalente :

- 1°  $T$  este normal;
- 2° orice polinom pătratic în  $T$  și  $T^*$  este normaloid;
- 3° orice polinom pătratic în  $T$  și  $T^*$  este convexoid.

*Demonstrație.* Evident  $1^\circ \rightarrow 2^\circ$ . Dacă avem  $2^\circ$  atunci cum orice polinom pătratic în  $T^*$  și  $T$  este de forma

$$p(T, T^*) = aT^2 + bTT^* + cT^*T + dT^{*2} + eT + fT^* + gI,$$

unde  $a, b, c, d, e, f, g$  sînt numere complexe, rezultă că  $p(T, T^*)$  este transaloid și deci este convexoid, adică  $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ . Să arătăm că  $3^\circ \rightarrow 1^\circ$ . În adevăr să punem  $T = A + iB$  cu  $A$  și  $B$  operatori hermitici. Translatînd putem presupune fără a restrînge generalitatea că  $A$  și  $B$  sînt invertibili și  $B > 0$ . Pentru a arăta că  $T$  este normal va fi suficient să arătăm că  $AB = BA$  sau, ceea ce este echivalent că  $AB$  este un operator hermitic.

Cum  $B > 0$ , există  $B^{1/2}$  și deci

$$\sigma(AB) = \sigma(B^{1/2}AB^{1/2})$$

dar  $B^{1/2}AB^{1/2}$  este hermitic și deci spectrul său este real. Însă operatorul  $AB$  este convexoid și deci  $W(AB) \subset \mathbb{R}$  care ne dă că  $AB$  este hermitic. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și :

**TEOREMA 3.3.2.** Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  atunci următoarele afirmații sînt echivalente :

- 1°  $T$  este normal;
- 2° orice polinom pătratic în  $T$  și  $T^*$  este cu proprietatea  $G_1$ .

*Demonstrație.* Evident  $1^\circ \rightarrow 2^\circ$ . Dacă  $2^\circ$  are loc atunci dacă  $p(T, T^*)$  este un polinom pătratic în  $T$  și  $T^*$  atunci  $p(T, T^*)$  este convexoid și teorema rezultă din teorema de mai sus.

Pentru rezultatul care urmează avem nevoie de următoarea :

**DEFINIȚIE 3.3.3.** Un operator definit pe un spațiu Hilbert  $H$  se spune că este diagonal, dacă mulțimea vectorilor proprii este densă în  $H$ .

Are loc :

**TEOREMA 3.3.4.** Dacă  $T$  are proprietatea  $\text{red-}G_1$ , atunci cînd  $\sigma(T)$  este numărabilă,  $T$  este un operator normal diagonal.

Pentru demonstrație vom avea nevoie de un rezultat privind punctele din spectru care sînt izolate și pe care-l dăm în :

**TEOREMA 3.3.5.** Dacă  $T$  are proprietatea  $\text{rest-convexoid}$  și  $\lambda$  este un punct izolat în  $\sigma(T)$  atunci  $\lambda$  este o valoare proprie.

*Demonstrație.* Fie  $C_\varepsilon$  un cerc cu centrul în  $\lambda$  și de rază  $\varepsilon$  astfel ca să nu conțină alte puncte din spectru în afară de  $\lambda$  și să definim

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} (zI - T)^{-1} dz$$

care este idempotent, nenul și  $P_\lambda H$  este invariant pentru  $T$  și  $\sigma(T/P_\lambda H) = \{\lambda\}$ . Cum  $T/P_\lambda H$  este convexoid rezultă că  $T/P_\lambda H = \lambda I/P_\lambda H$  și deci  $\lambda$  este o valoare proprie; teorema este demonstrată.

*Demonstrația teoremei 3.3.4.* Fie  $\delta$  mulțimea valorilor proprii ale lui  $T$  pentru care

$$E_\lambda(T) = \{x, Tx = \lambda x\}$$

reduce pe  $T$  și în subspațiul  $\sum_\lambda E_\lambda(T)$  care reduce pe  $T$  și  $T/m$  este normal și diagonal. Dacă  $m^\perp = \{0\}$  teorema este demonstrată. Să presupunem că nu este așa. Deci, fie  $T_2 = T/m^\perp$  și  $T = T_1 \oplus T_2$ ,  $\sigma_p(T_1) = \delta$  și  $\sigma_p(T_2) = \sigma_p(T) - \delta$ . Cum  $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ ,  $\sigma(T_2)$  este de asemenea numărabilă. Deci  $\sigma(T_2)$  are cel puțin un punct izolat  $\lambda$ , căci în caz contrar ar fi densă în sine și deci o mulțime perfectă care ar fi atunci nenumărabilă. Cum  $T_2$  satisface proprietatea  $G_1$ ,  $\lambda$  este valoare proprie și

$$\{x, Tx = \lambda x\} = \{x, T_2 x = \lambda x\}$$

și cum  $T^*/m^\perp = (T/m^\perp)^*$  deducem că în  $m$  nu am pus toate subspațiile care reduc pe  $T$  și am obținut o contradicție. Deci  $m^\perp = \{0\}$  și teorema este demonstrată.

Teoremele care urmează se referă la operatori convexoizi.

**TEOREMA 3.3.6.** Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit, iar rest-convexoid are loc și  $\sigma(T)$  este o mulțime finită atunci  $T$  este normal.

*Demonstrație.* Cum  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \subset W(T)$  după cum rezultă din teorema 3.2.12. Cum  $T$  este convexoid, rezultă că  $\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)} \subset W(T)$  și deci  $W(T)$  este o mulțime închisă. Fie  $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Dacă  $n=1$  atunci evident  $T = \lambda_1 I$  și teorema este adevărată. Să presupunem că este adevărată pentru  $n-1$  și fie  $\lambda_1$  astfel ca să fie punct extrem în  $W(T)$ . Atunci  $\lambda_1 \in \sigma_p(T) \cap \partial W(T)$  și deci  $\lambda_1$  este valoare proprie normală și fie  $N = \{x, Tx = \lambda_1 x\}$ . În acest caz  $\sigma(T) = \sigma(T/N) \cup \sigma(T/N^\perp)$ . Cum  $\lambda_1 \notin \sigma(T/N^\perp)$ , căci în caz contrar ar fi o valoare proprie, deducem că  $T = \sum \lambda_i P_{\lambda_i}$  unde  $P_{\lambda_i}$  sînt idempotenți hermitici. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă este o generalizare a teoremei 3.3.4.

**TEOREMA 3.3.7.** Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit cu proprietatea rest-convexoid și  $\sigma(T)$  are cel mult un punct limită atunci  $T$  este diagonal.

*Demonstrație.* Putem presupune, fără a restrînge generalitatea că zero este singurul punct de acumulare.

Deoarece orice cerc cu centrul în zero și de rază  $\varepsilon$  arbitrară are în afară numai un număr finit de puncte din spectrul  $\sigma(T)$ , rezultă că  $\sigma(T)$  este numărabil și mulțimea  $\sigma(T) - \{0\}$  poate fi aranjată într-un șir  $\{\lambda_n\}$  astfel ca

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| = \dots = |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \dots$$

cu  $\lambda_n \rightarrow 0$ . Deci  $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\} \cup \{0\}$  și  $\lambda_n \in \sigma_p(T) \subset W(T) = \text{conv } \sigma(T)$ , iar  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sînt în  $\sigma_p(T) \cap \partial W(T)$  și deci sînt valori proprii normale, iar subspațiile proprii respective reduc pe  $T$ . Fie  $N = E_{\lambda_1}(T) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(T)$  și deci  $T/N$  este normal. Cum  $\sigma(T) = \sigma(T/N) \cup \sigma(T/N^\perp) =$

$= \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \cup \sigma(T|_{N^\perp})$ . Dar atunci  $\sigma(T|_{N^\perp}) = \{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots\} \cup \{0\}$ . Continuînd în acest mod  $T$  se descompune în suma directă a unor operatori normali și fie

$$m = \sum_i \oplus E_{\lambda_i}(T).$$

Dacă  $m^\perp = \{0\}$  teorema este demonstrată. Dacă nu ar fi așa,  $T/m^\perp$  este convexoid și ar exista  $\lambda \neq 0$  în  $\sigma(T/m^\perp)$  care ar fi valoare proprie, ceea ce ar fi o contradicție sau  $T/m^\perp = 0$  și  $m^\perp$  este un spațiu de vectori proprii corespunzători lui zero. Teorema este demonstrată căci trebuie să avem și  $T^*/m^\perp = 0$ .

Este natural să ne punem problema dacă această teoremă se poate extinde la cazul cînd  $\sigma(T)$  are un număr finit de puncte limită.

Pentru această extensie avem nevoie de următorul rezultat dat în :

**TEOREMA 3.3.8.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  cu proprietatea rest-spectraloid, iar  $\lambda, \mu$  sînt două valori proprii distincte atunci vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali.*

*Demonstrație.* Operatorul  $T|_N$  unde  $N = \{x, y\}$  cu  $Tx = \lambda x$ ,  $Ty = \mu y$  este normal și deci vectorii  $x$  și  $y$  sînt ortogonali. Teorema este demonstrată.

Extensia teoremei 3.3.7 este dată în :

**TEOREMA 3.3.9.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  și are proprietatea rest-convexoid, iar  $\sigma(T)$  are cel mult un număr finit de puncte limită atunci  $T$  este normal.*

*Demonstrație.* Demonstrația se face prin inducție în raport cu numărul de puncte limită  $m$ . Dacă  $m = 1$  atunci teorema se reduce la teorema 3.3.6. În cazul general, să luăm un cerc  $C_\epsilon$  în  $\rho(T)$  cu centrul într-un punct limită și astfel ca să nu conțină alt punct limită. Să punem

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} (zI - T)^{-1} dz$$

și în acest caz  $PH$  este invariant pentru  $T$  și conform teoremei de mai sus  $T|_{PH}$  este normal și  $\sigma(T) = \sigma(T|_{PH}) \cup \sigma(T|_{\{x, Px=0\}})$ . Vom observa că  $PH$  reduce pe  $T$  și să arătăm că sînt ortogonale spațiile  $PH$  și  $\{x, Px=0\}$ . Însă vom observa că sînt formate cu vectori proprii corespunzători la diferite valori proprii și conform teoremei 3.3.8. sînt ortogonali. Deci și cele două subspații sînt ortogonale și teorema este demonstrată.

Pentru teoremele care urmează este necesară noțiunea de spectru Weyl care este expusă în capitolul VII și de asemenea următorul rezultat pe care-l dăm fără demonstrație, rezultat dat de Putnam.

**TEOREMA 3.3.10.** *Dacă  $T$  este un operator hyponormal și aria spectrului este nulă atunci  $T$  este normal.*

Are loc:

**TEOREMA 3.3.11.** *Dacă  $T$  este un operator hyponormal și există  $S$  astfel ca*

$$1. \ 0 \in \overline{W(S)},$$

$$2. \ T^p = ST^{*p}S^{-1} + C \text{ unde } p \text{ este un întreg } \geq 1, \text{ iar } C \text{ un operator compact,}$$

*atunci  $T$  este un operator normal.*

*Demonstrație.* Să notăm cu  $\hat{T}$  imaginea lui  $T$  în algebra lui Calkin și dacă  $\hat{S}$  este imaginea lui  $S$  atunci evident avem relația

$$\hat{T}^p = \hat{S} \hat{T}^{*p} \hat{S}^{-1}$$

cu  $0 \in \overline{W(\hat{S})}$ . Rezultă că  $\sigma(\hat{T}^p) = \sigma(\hat{T})^p$  este în  $R$  și deci  $\sigma(T)$  se află situat pe  $p$  drepte care trec prin origine. Cum însă  $\partial \sigma_\omega(T) \subset \sigma(\hat{T})$  rezultă că spectrul Weyl  $\sigma_\omega(T)$  se află de asemenea pe aceste drepte și deci are aria zero. Cum  $T$  este hyponormal, teorema lui Weyl are loc pentru  $T$  și deci  $\sigma(T)$  are aria nulă, de unde rezultă că  $T$  este normal.

*Observație.* Teorema de mai sus se poate demonstra și fără utilizarea teoremei 3.3.10.

**TEOREMA 3.3.12** Fie  $T$  un operator liniar și mărginit pe  $H$  cu următoarele proprietăți :

1.  $\sigma(\hat{T}) = 0$ ,
  2. este redus de orice subspațiu de vectori proprii finit-dimensional,
  3. red-spectraloid are loc,
- atunci  $T$  este normal.

*Demonstrație.* Cum pentru orice operator  $\partial \sigma_\omega(T) \subset \sigma(\hat{T})$  deducem că  $\sigma_\omega(T) = \{0\}$ . Fie  $m$  spațiul liniar generat de subspațiile de vectori proprii finit-dimensionale. Evident  $T/m$  reduce pe  $T$  și  $T/m$  este diagonal și normal și  $T = T/m \oplus T/m^\perp$ , iar  $T/m^\perp$  nu are valori proprii de multiplicitate finită. Să arătăm că  $T/m^\perp$  este zero. Cum  $\sigma_\omega(T/m) \cup \sigma_\omega(T/m^\perp) = \sigma_\omega(T)$  rezultă că  $\sigma_\omega(T/m^\perp) = \{0\}$  și chiar mai mult  $\sigma(T/m^\perp) = \{0\}$ . Cum  $T/m^\perp$  este spectraloid deducem că  $T/m^\perp = 0$  și teorema este demonstrată.

Un alt rezultat similar cu cel din teorema de mai sus este dat în :

**TEOREMA 3.3.13.** Fie  $T$  un operator liniar și mărginit pe spațiul  $H$  având proprietățile următoare :

1.  $\sigma(\hat{T})$  este o mulțime numărabilă,
  2.  $T$  este redus de orice subspațiu de vectori proprii finit-dimensional,
  3. red-isoloid are loc,
- în acest caz  $T$  este normal.

*Demonstrație.* Cum  $\partial \sigma_\omega(T) \subset \sigma(\hat{T})$  rezultă că  $\sigma_\omega(T)$  este de asemenea o mulțime numărabilă. Fie  $m$  subspațiul generat de subspațiile finit-dimensionale formate cu vectori proprii și acest spațiu reduce pe  $T$ . Evident  $T/m$  este normal și  $T = T/m \oplus T/m^\perp$ .  $T/m^\perp$  nu are valori proprii. Să arătăm că  $m^\perp$  se reduce la  $\{0\}$ . Dacă nu ar fi așa, atunci cum  $\sigma(T/m^\perp) \subset \sigma_\omega(T)$  deducem că  $\sigma(T/m^\perp)$  este o mulțime numărabilă. Dacă spectrul are un număr diferit de zero, atunci din 3 ar rezulta că are și alte valori proprii în afară de cele considerate în definiția spațiului  $m$  și aceasta este o contradicție.

*Observație.* Se mai pot considera operatori polinomial compacți sau cu proprietatea că există un polinom  $p(\lambda)$  astfel ca  $p(T)$  să aibă partea reală (imaginară) compactă.

Pentru cele ce urmează avem nevoie de o ușoară extensiune a rezultatelor din teorema 3.3.1.

**TEOREMA 3.3.14.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit astfel ca pentru întregii  $p, q \geq 1$  operatorul  $T^{*p}T^q$  este compact atunci dacă  $\lambda \in \sigma(T)$  și  $|\lambda| = \|T\|$ ,  $\lambda \in \sigma_p(T)$ .*

*Demonstrație.* Există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0,$$

$$T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0$$

și deci, după cum se deduce ușor că

$$T^{*p}T^q x_n - \bar{\lambda}^p \lambda^q x_n \rightarrow 0.$$

Putem presupune că  $\{x_n\}$  este astfel ales ca  $\{T^{*p}T^q x_n\}$  să fie convergent și deci șirul  $\{x_n\}$  este convergent, de unde și afirmația teoremei.

Următoarea teoremă se referă la o clasă de operatori care conține clasa operatorilor hyponormali.

**TEOREMA 3.3.15.** *Dacă  $T$  este un operator de clasă (N) și există întregii  $p, q \geq 1$  astfel ca  $T^{*p}T^q$  să fie un operator compact atunci în mod necesar  $T$  este normal.*

*Demonstrație.* Cum  $T$  este normaloid există  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  astfel ca  $|\lambda_0| = \|T\|$  și deci  $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$  care este și valoare proprie normală. Să luăm

$$F_\lambda = \{E_\lambda(T) \cap E_{\bar{\lambda}}(T^*)\} \quad \lambda \in \sigma_p(T)$$

care constituie o familie de subspații ortogonale ce reduc pe  $T$ , și fie

$$m = \sum_{\lambda \in \sigma_p} \oplus E_\lambda(T) \cap E_{\bar{\lambda}}(T^*).$$

Evident că  $m$  reduce pe  $T$  și  $T/m$  este diagonal și normal. Să arătăm că  $T/m^\perp$  este zero. Dacă nu ar fi așa, cum  $T/m^\perp$  este de clasă (N), este normaloid și există o valoare proprie care este valoare proprie normală, deci am ajuns la o contradicție cu definiția subspațiului  $m$ . Teorema este demonstrată.

În același mod ca mai sus se demonstrează și:

**TEOREMA 3.3.16.** *Dacă  $T$  este un operator de clasă (N) și există sistemul de întregi  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$  astfel ca operatorul*

$$T^{*p_1}T^{q_1} \dots T^{*p_n}T^{q_n}$$

*să fie compact, atunci  $T$  este normal.*

Vom considera acum operatori de forma  $C + Q$  unde  $C$  este compact, iar  $Q$  este un operator evasinilpotent (adică  $\sigma(Q) = 0$ ). Considerarea acestei clase de operatori este sugerată de teorema de descompunere a operatorilor de tip Riesz considerați în capitolul 1. § 15.

Reamintim pe scurt definiția operatorilor de tip Riesz. Fie  $T$  un operator liniar și mărginit pe  $H$ , iar  $\lambda \in \sigma(T)$ . Se spune că  $\lambda$  este un punct Riesz al spectrului  $\sigma(T)$  dacă  $H = N \oplus F$  unde  $\dim N < \infty$ ,

$(T - \lambda I)_N$  este nilpotent, iar  $(T - \lambda I)_F$  este un homeomorfism. Se spune că  $T$  este un operator de tip Riesz sau mai pe scurt operator Riesz dacă orice punct  $\lambda \in (T) - \{0\}$  este punct Riesz al spectrului  $\sigma(T)$ . Este cunoscut că dacă  $T$  este compact atunci  $T$  este operator Riesz, dar că această clasă este mai vastă decât clasa operatorilor compacți.

F. Bonsall a pus următoarea problemă: dacă operatorul  $T$  care este de tip Riesz și hyponormal este în mod necesar normal?

Teoremele pe care le dăm în cele ce urmează dau răspunsul la această problemă (care este pozitiv).

**TEOREMA 3.3.17.** *Dacă  $T$  este un operator de clasă  $(N)$  care este de tip Riesz atunci  $T$  este normal.*

*Demonstrație.* Fie  $T$  imaginea operatorului  $T$  în algebra lui Calkin și cum  $T$  este de clasă  $(N)$  are loc relația lui Andô

$$T^2 T^2 - 2\lambda T T + \lambda^2 \geq 0$$

care ne dă că

$$\hat{T}^{*2} \hat{T}^2 - 2\lambda \hat{T}^* \hat{T} + \lambda^2 \geq 0$$

și deci  $\hat{T}$  este de clasă  $(N)$ . Dar  $\hat{T} = \hat{Q}$  și deci este cvasinilpotent și  $\hat{T}$  este normaloid deci trebuie să fie zero. Deci  $T$  este compact și trebuie să fie normal conform teoremei de mai sus.

*Observație.* Teorema rămâne adevărată dacă o putere a operatorului  $T$  este de tip Riesz sau mai general pentru întregii  $p, q \geq 1$  operatorul  $T^{*p} T^q$  este de tip Riesz.

Pentru teoremele care urmează vom avea nevoie de un rezultat care prezintă interes și în sine.

**TEOREMA 3.3.18.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  cu proprietatea că există  $S$  astfel ca*

$$T = S^{-1} T S + A,$$

unde  $A$  este un operator hermitic și compact, atunci:

1. dacă  $\sigma_p(T) = \emptyset$ ,  $\sigma(T)$  este real,
2. mulțimea punctelor cu parte imaginară diferită de zero din  $\sigma(T)$  este finită sau numărabilă și punctele limită sînt pe axa reală.

*Demonstrație.* Vom considera mai întîi cazul 1. Cum  $\partial \sigma(T)$  este o submulțime a spectrului aproximativ este suficient să arătăm că dacă

$\alpha) x_n \rightarrow 0$  (convergență slabă),

$\beta) T x_n - \lambda x_n \rightarrow 0,$

atunci  $\lambda$  este real.

Cum avem identitatea

$$(\bar{\lambda} - \lambda) \langle S^{-1} x_n, x_n \rangle = \langle (T^* - \lambda) S^{-1} x_n, x_n \rangle - \langle (T^* - \bar{\lambda}) S^{-1} x_n, x_n \rangle$$

și cum  $T^* = S^{-1} T S + A$  vom obține

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} - \lambda) \langle S^{-1} x_n, x_n \rangle &= \langle [S^{-1} (T - \lambda) S + A] S^{-1} x_n, x_n \rangle - \\ &= \langle S^{-1} x_n, (T - \lambda) x_n \rangle = \langle S^{-1} (T - \lambda) x_n, x_n \rangle - \langle S^{-1} x_n, (T - \lambda) x_n \rangle + \\ &\quad + \langle A S^{-1} x_n, x_n \rangle. \end{aligned}$$

Cum  $Ax_n \rightarrow 0$  (sau un subșir) obținem că  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ ,  $0 \in W(S^{-1})$  și aceasta este o contradicție. Teorema în acest caz este demonstrată.

Să considerăm acum cazul 2 și să luăm operatorul

$$\tilde{A} = \frac{S + S^*}{2}$$

care este hermitic și invertibil. Dacă punem

$$T_1 = \tilde{A}^{-\frac{1}{2}} T \tilde{A}^{\frac{1}{2}}$$

avem relația

$$T_1^* = T_1 + A_1.$$

În adevăr, dacă  $A$  este cel de mai sus vom avea

$$\tilde{A} T^* = \frac{1}{2} (S + S^*) T^* = \frac{1}{2} (S T^* + S^* T^*).$$

Însă

$$S T^* = T S + S A$$

și deci

$$S^* T^* = T S^* - A S^*$$

de unde deducem că

$$S T^* + S^* T^* = S T^* + T S^* - A S^*,$$

care ne dă

$$\tilde{A} T^* = \frac{1}{2} T(S + S^*) + \frac{1}{2} (S A - A S) = T A + A_1.$$

Este evident că  $A_1$  este un operator compact și cum  $\sigma(T) = \sigma(T_1)$  rezultatul se obține ținând seama de spectrul operatorilor cu parte imaginară compactă deoarece

$$T_1^* = T_1 + \frac{1}{2} \tilde{A}^{-\frac{1}{2}} (S A - A S^*) \tilde{A}^{\frac{1}{2}} = T_1 + A_2.$$

Pentru a aplica teorema de mai sus la studiul unei clase de operatori normali vom avea nevoie de noțiunea de operator unitar cu spectru condensat (în engleză "cramped").

DEFINIȚIA 3.3.19. Un operator unitar  $U$  se spune că este cu spectru condensat, dacă există  $\theta_0$  astfel ca

$$\sigma(U) \subset \{e^{i\theta}, \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}.$$

TEOREMA 3.3.20. Dacă  $T$  este un operator normal cu proprietatea că

$$T^* = U^{-1} T U + A,$$

unde  $U$  este un operator unitar cu spectru condensat și  $A$  este ca în teoremă 3.3.18. atunci  $T$  este hermitic.

*Demonstrație.* Cum  $0 \notin \sigma(U)$  și  $U$  este cu spectru condensat  $0 \in W(U)$  și atunci  $W(T) \subset R$  de unde rezultă că  $T$  este hermitic. Următoarea teoremă reprezintă o extensie a teoremei 3.3.11.

TEOREMA 3.3.21. Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  cu următoarele proprietăți:

1.  $T$  este hiponormal,
2.  $T^p = S T^{*p} S^{-1} + A,$

unde  $p \geq 1$  și  $\hat{A}$  compact și hermitic, iar  $0 \in W(S)$ .

În acest caz  $T$  este normal.

*Demonstrație.* Menționăm că prin  $\hat{A}$  înțelegem imaginea lui  $T$  în algebra lui Calkin. Evident că prin trecere la algebra lui Calkin obținem, deoarece pentru  $T$  are loc teorema lui Weyl, că aria  $\sigma(T)$  este zero și deci trebuie să fie normal.

În mod similar se demonstrează și:

TEOREMA 3.3.22. Dacă  $T$  este hiponormal și există un sistem de întregi  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$  astfel ca

$$T^{*p_1} T^{q_1} \dots T^{*p_n} T^{q_n} = S(T^{*q_n} T^{p_n}) \dots T^{*q_1} T^{p_1} S^{-1} + A,$$

unde  $0 \in W(S)$  și  $\hat{A}$  este compact și hermitic, atunci  $T$  este normal.

Am văzut mai înainte că dacă  $T$  este de clasă  $(N)$  și pentru un întreg  $p \geq 1$ ,  $T^p$  este compact atunci în mod necesar  $T$  este normal. În teorema care urmează vom arăta că acest fapt nu mai este adevărat dacă  $T$  este normaloid.

TEOREMA 3.3.23. Există un operator normaloid  $T$  astfel ca pentru un anumit întreg  $p$ ,  $T^p$  este compact și  $T$  nu este normal.

*Demonstrație.* Să luăm  $T$  definit pe  $l^2$  cu matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

în raport cu baza ortonormală standard  $\{e_i\}^\infty$ ,  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$  și este ușor de văzut că  $T$  este dat astfel

$$Te_n = \begin{cases} e_1, & n = 1 \\ e_{n+1}, & n = 2m, m = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & n = 2m+1, m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

De asemenea  $\|T\| = 1$  și  $P_{[e_1]} = T^n$  pentru  $n = 2, 3, 4, \dots$  și deci  $T^n$  este compact oricare ar fi  $n = 2, 3, 4, \dots$  cu  $\|T^n\| = 1$  oricare ar fi  $n$ .  $T$  este clar un operator necompact și nenormal. Teorema este demonstrată.

În exemplul de mai sus operatorul  $T$  pe subspațiul invariant nu mai posedă proprietatea de a fi normaloid adică rest-normaloid nu mai are loc. Următoarea teoremă dă o condiție suficientă pentru normalitate.

**TEOREMA 3.3.24.** *Dacă  $T$  este operator liniar și mărginit pe  $H$  și rest-normaloid are loc, iar pentru o funcție  $f(z) = \sum a_k z^{2k}$  întreagă care nu se anulează pe  $R_+$ , operatorul  $C = \sum a_k T^{*k} T^k$  este compact atunci  $T$  este normal.*

*Demonstrație.* Cum  $T$  este normaloid, există  $\lambda \in \sigma(T)$  astfel ca  $|\lambda| = \|T\|$  și deci există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$ , astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0, \quad T^* x_n - \bar{\lambda} x_n \rightarrow 0$$

În acest mod  $\sum a_k T^{*k} T^k x_n - \sum a_k |\lambda|^{2k} x_n \rightarrow 0$  și cum  $C$  este compact, iar  $f$  nu se anulează pe  $R_+$  deducem că șirul  $x_n$  admite un subșir convergent pe care îl putem presupune chiar  $x_n$ . Deci  $x_n \rightarrow x_0$  și  $Tx_0 = \lambda x_0$ ,  $T^* x_0 = \bar{\lambda} x_0$ . Fie  $m^\perp(\lambda)$  familia subspațiilor de forma

$$m_T(\lambda) = \{x, Tx = \lambda x, T^* x = \bar{\lambda} x\},$$

care reduc pe  $T$  și sint ortogonale pentru  $\lambda \neq \lambda'$ . Să punem

$$H_0 = \sum \oplus m_T(\lambda)$$

și să arătăm că  $H_0^\perp = \{0\}$ . Dacă nu este așa, atunci cum  $T$  este rest-normaloid și  $C$  este compact ajungem ușor la o contradicție cu definiția spațiului  $H_0$ . Teorema este demonstrată.

Următoarele teoreme dau exemple mai speciale de operatori normali.

**TEOREMA 3.3.25.** *Dacă  $T$  este un idempotent ( $T^2 = T$ ) și  $w(T) \leq 1$  atunci  $T$  este proiector.*

*Demonstrație.* Prin proiector vom înțelege un idempotent care este și hermitic. Vom prezenta două demonstrații ale acestei teoreme care sînt interesante și în sine.

1) Fie  $y = Tx$  cu  $x \in R(T)^\perp = \{y, y = Tx, x \in H\}^\perp$  și deci pentru orice  $t$  pozitiv,  $T(x + ty) = 1 + ty$ , iar

$$\begin{aligned} t(1+t) \|y\|^2 &= \langle (1+t)y, x+ty \rangle = \langle T(x+ty), x+ty \rangle \leq \\ &\leq \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2, \end{aligned}$$

de unde  $t\|y\|^2 \leq \|x\|^2$ , deci  $y=0$ . Deducem că  $T=0$  pe  $R(T)^\perp$  și  $T=I$  pe  $R(T)$ . Deci  $T$  este un proiector.

2) Mai întâi vom demonstra că următoarele afirmații sînt echivalente:

- $\alpha) w(T) \leq 1$ ,  
 $\beta) \|e^{zT}\| \leq e^{|z|}$ ,  $z$  un număr complex.

În adevăr  $\beta)$  este echivalentă cu afirmația că

$$\|e^{t(e^{i\theta}T - I)}\| \leq 1$$

oricare ar fi  $\theta$  real și deci operatorul  $e^{i\theta}T - I$  este disipativ, oricare ar fi  $\theta$  și aceasta este echivalent cu  $w(T) \leq 1$ ; cele două afirmații sînt astfel echivalente.

Cum  $T$  este idempotent avem

$$\left\| I + zT + \dots + \frac{z^n}{n!} T^n + \dots \right\| = \|I + (e^z - I)T\| \leq e^{|z|}$$

și cum  $z$  este arbitrar, pentru  $t$  real obținem

$$\|e^{-t}I + (1 - e^{-t})T\| \leq 1$$

de unde deducem pentru  $t \rightarrow \infty$  că  $\|T\| \leq 1$ . În acest caz însă,

$$\begin{aligned} \|Tx - T^*Tx\|^2 &= \|Tx\|^2 - \langle Tx, T^*Tx \rangle - \langle T^*Tx, x \rangle + \|T^*Tx\|^2 = \\ &= \|Tx\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Tx\|^2 + \|T^*Tx\|^2 = \|T^*Tx\|^2 - \|Tx\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

și deci  $T$  este un proiector. Teorema este demonstrată.

Un operator normal este de clasă (N). Apare în mod natural problema în ce condiții un operator de clasă (N) este normal. Mai înainte au fost date condiții suficiente legate de compacitate.

În cele ce urmează vom da condiții legate de adjunct și de normalitatea unei iterate.

Vom da mai întâi un rezultat privind operatorii hermitici și pozitivi.

**TEOREMA 3.3.26.** Dacă  $A, B$  sînt operatori hermitici mărginiți și pozitivi cu proprietatea că

$$2\lambda A^2 (A^2 + \lambda^2)^{-1} \leq B \leq (2\lambda)^{-1} (A^2 + \lambda^2), \quad \lambda > 0$$

atunci  $A=B$ .

*Demonstrație.* Este suficient să demonstrăm că  $B$  comută cu descompunerea unității  $\{E(t)\}$  corespunzătoare operatorului  $A$  deoarece

$$\sup_{\lambda} 2\lambda \xi^2 (\xi^2 + \lambda^2)^{-1} \leq \xi \leq \inf_{\lambda} (2\lambda)^{-1} (\xi^2 + \lambda^2), \quad \lambda > 0$$

ne dă că  $A = B$ , este suficient să arătăm că pentru  $t \geq s > 0$

$$[1 - E(t + s)] B [E(t) - E(s)] = 0.$$

Fie  $x, y$  astfel ca

$$x = [E(t) - E(s)] x,$$

$$y = [I - (E(t + s))] y,$$

și

$$x_j = (E(t_j) - E(t_{j-1})) x, \quad A_j = 2t_j (A^2 + t_j^2)^{-1}$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} 0 &\leq B - A^2 A_j \leq A_j^{-1} - A^2 A_j = \\ &= (2t_j)^{-1} (A - t_j)^2 (A + t_j)^2 (A^2 + t_j^2)^{-1} \leq s^{-1} (A - t_j)^2 \end{aligned}$$

cum prin definiție

$$\langle A^2 A_j x_j, y \rangle = 0, \quad \|(A - t_j) x_j\| \leq n^{-1} t \|x_j\|$$

din inegalitatea lui Schwarz obținem

$$\begin{aligned} |\langle Bx_j, y \rangle| &= |\langle (B - A^2 A_j) x_j, y \rangle| \leq \langle (B - A^2 A_j) x_j, x_j \rangle \cdot \langle (B - A^2 A_j) y, y \rangle \leq \\ &\leq s^{-1} \|B\| \|(A - t_j) x_j\|^2 \|y\|^2 \leq (n^2 s)^{-1} t^2 \|B\| \|x_j\|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

de unde

$$|\langle Bx, y \rangle|^2 = \left| \sum_{j=1}^n \langle Bx_j, y \rangle \right|^2 \leq n \sum_{j=1}^n |\langle Bx_j, y \rangle|^2 \leq (ns)^{-1} t^2 \|B\| \|x\|^2 \|y\|^2$$

și deci  $\langle Bx, y \rangle = 0$  rezultat care se obține pentru  $n \rightarrow \infty$ . Teorema este demonstrată.

Are loc:

**TEOREMA 3.3.27.** *Condiția necesară și suficientă ca operatorul mărginit  $T$  să fie normal este ca să aibă loc afirmațiile:*

1.  $T, T^*$  sînt de clasă  $(N)$ ,
2.  $R(T) = R(T^*)$ .

*Demonstrație.* Fie  $A = (T^*T)^{1/2}$ ,  $B = (TT^*)^{1/2}$  și trebuie să demonstrăm că  $A^2 = B^2$ . Cum  $R(T) = R(T^*)$  vom putea presupune fără a restrînge generalitatea că  $A$  și  $B$  au invers. Din condiția de a fi de clasă  $(N)$  deducem că

$$AB^2A - 2\lambda A^2 + \lambda^2 \geq 0,$$

$$BA^2B - 2\lambda B^2 + \lambda^2 \geq 0,$$

și fie  $S = (BA^2B)^{1/2}$ . Cum

$$\mathfrak{D}(S^{-1}) = \mathfrak{D}(BS^{-1}),$$

$$\|S^{-1}x\| = \|(BA)^{-1}x\|,$$

deducem că

$$\begin{aligned} \|(S^2 + \lambda^2)(S^{-2})^{1/2}x\|^2 &= \|x\|^2 + \lambda^2\|S^{-1}x\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \lambda^2\|A^{-1}B^{-1}x\|^2 \geq 2\lambda\|B^{-1}x\|^2, \end{aligned}$$

de unde

$$(S^2 + \lambda^2)S^{-2} \geq 2\lambda B^{-2}.$$

Dar

$$2\lambda^2 S^2 (S^2 + B^2)^{-1} \leq B^2,$$

cum

$$B^2 \leq (2\lambda)^{-1}(S^2 + \lambda^2)$$

deducem că  $B^2 = S$  și deci  $A = B$ .

**TEOREMA 3.3.28.** *Condiția necesară și suficientă ca un operator  $T$  de clasă  $(N)$  să fie normal este ca pentru un anume întreg  $k$  operatorul  $T^k$  să fie normal.*

*Demonstrație.* Evident, este suficient să demonstrăm că dacă  $T$  este de clasă  $(N)$  și o putere  $T^k$  este un operator normal atunci  $T$  este normal.

Cum operatorul  $(T^{*k}T^k)^{1/2}$  este hermitic fie  $\{E(t)\}$  descompunerea unității corespunzătoare. Din teorema lui Fuglede-Putnam deducem că  $E(t)$  comută cu  $T$  și  $T^*$ . Dar  $TE(0) = 0$  deoarece  $TE(0)$  este de clasă  $(N)$  și

$$(TE(0))^k = T^k E(0) = 0.$$

Rămîne să arătăm că  $T(I - E(t))$  este normal dacă  $t > 0$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \|T^k\|$  cu  $1 - \varepsilon < t_j^{-1}t_{j-1}$  și să luăm  $E_j = E(t_j) - E(t_{j-1})$ . Cum

$$t_{j-1}\|E_j(x)\| \leq \|T^k E_j(x)\| = \|T^{*k} E_j(x)\| \leq t_j\|E_j(x)\|$$

și  $TE_j$  fiind de clasă (N) deducem că

$$\|TE_j\| = \|T^* E_j\| \leq t_j^{1/k}.$$

Să arătăm că

$$(1 - \varepsilon) \|TE_j(x)\| \leq \|T^* E_j(x)\| \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \|TE_j(x)\|.$$

În adevăr, dacă  $y = E_j(y)$  cu  $\|y\| = 1$  și

$$\|Ty\| \leq (1 - \varepsilon) \|T^* y\|$$

atunci

$$t_{j-1} \leq \|T^k y\| \leq \|TE_j\|^{k-1} \|Ty\| \leq (1 - \varepsilon) t_j,$$

ceea ce contrazice alegerea lui  $t_j$ . Fie acum  $x = (I - E(t))x$  și atunci

$$(1 - \varepsilon)^2 \|Tx\|^2 = (1 - \varepsilon)^2 \sum_{j=1}^n \|TE_j(x)\|^2 \leq$$

$$\|T^* x\|^2 \leq (1 - \varepsilon)^{-2} \sum_{j=1}^n \|TE_j(x)\|^2 \leq (1 - \varepsilon)^{-2} \|Tx\|^2,$$

de unde pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  obținem că  $\|Tx\| = \|T^* x\|$ . Teorema este astfel demonstrată.

O teoremă de normalitate poate fi dată utilizând teorema lui Klei-  
necke-Shirocov.

**TEOREMA 3.3.29.** *Dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe  $H$  cu  $T = H + iJ$  atunci următoarele afirmații sînt echivalente :*

1.  $T$  este normal,
2.  $H$  comută cu  $TT^* - T^*T$ ,
3.  $J$  comută cu  $TT^* - T^*T$ .

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că

$$TT^* - T^*T = 2i(JH - HJ)$$

și deci dacă 2 are loc atunci  $TT - T^*T$  este un operator hermitic și nilpotent, de unde rezultă că este zero. Similar dacă are loc 3. Teorema este demonstrată.

*Observație.* Teorema este adevărată și pentru cazul unor operatori pe spații Banach.

## CLASE DE OPERATORI NENORMALI

## § 1. DEFINIȚIA ȘI PROPRIETĂȚILE UNOR CLASE DE OPERATORI NENORMALI

Clasa operatorilor normali pe un spațiu Hilbert posedă proprietăți importante și interesante și în acest sens s-a căutat să se extindă diferite proprietăți ale acestora la clase mai largi de operatori. În acest sens trebuie să menționăm că A. Wintner în 1929 într-o lucrare devenită celebră a introdus o clasă de operatori care astăzi se numește clasa operatorilor normaloizi. Clase de operatori care păstrează unele din proprietățile operatorilor normali apar în mod natural în teoria dilatării și vom menționa clasa de operatori introdusă de P. Halmos și numită de S. Berberian clasa operatorilor hiponormali.

Scopul nostru în acest capitol este de a expune rezultate privind proprietățile unor clase de operatori care conțin clasa operatorilor normali cît și unele aplicații ale acestora.

Notățiile și terminologia, în cazul în care nu va fi menționat acest lucru, vor fi conforme cu cele din capitolele anterioare.

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $T$  un operator liniar și continuu definit pe  $H$ , iar  $T^*$  adjunctul său.

**DEFINIȚIA 4.1.1.** Operatorul  $T$  se numește *evasinormal* dacă următoarea relație are loc

$$(T^*T)T = T(T^*T).$$

**DEFINIȚIA 4.1.2.** Operatorul  $T$  se numește *subnormal* dacă există un spațiu Hilbert  $K \supset H$  și un operator normal  $B$  pe  $K$  astfel ca oricare ar fi  $h \in H$  să avem

$$Th = Bh.$$

Operatorul  $B$  se mai spune că reprezintă extensia normală a operatorului  $T$  sau că  $T$  este restricția la  $H$  a operatorului normal  $B$  definit pe  $K$ .

**DEFINIȚIA 4.1.3.** Operatorul  $T$  se numește *hiponormal* dacă oricare ar fi  $x \in H$  avem

$$\|Tx\| \geq \|T^*x\|.$$

Dacă  $T^*$  este hiponormal atunci  $T$  se numește *seminormal*.

DEFINIȚIA 4.1.4. Operatorul  $T$  se numește de clasă  $(N)$  sau paranormal dacă oricare ar fi  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$  avem că

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2.$$

DEFINIȚIA 4.1.5. Operatorul  $T$  se numește cvasihiponormal dacă, oricare ar fi  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$ , avem

$$\|T^*Tx\| \leq \|T^2x\| = \|TTx\|.$$

DEFINIȚIA 4.1.6. Operatorul  $T$  se numește normaloid dacă raza sa spectrală  $r_T$  este egală cu norma  $\|T\|$ .

Următoarea teoremă dă informații privind clasele de operatori introduse mai sus.

TEOREMA 4.1.7. Au loc relațiile :

$cvasinormal \subset subnormal \subset hiponormal \subset cvasihiponormal \subset (clasă (N) = paranormal) \subset normaloid$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra toate implicațiile exceptînd prima care va fi demonstrată mai tîrziu.

Fie deci  $T$  subnormal, iar  $B$  extensia sa normală și deci oricare ar fi  $x, y \in H$  avem

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, By \rangle = \langle PB^*x, y \rangle$$

unde  $P$  este proiecția ortogonală pe  $H$ . Cum  $y$  este arbitrar, de aici rezultă că avem  $T^*x = PB^*x$ ,  $\forall x \in H$ . Deci, cum  $B$  este normal avem

$$\|Bx\| = \|B^*x\| = \|Tx\| \geq \|PB^*x\| = \|T^*x\|$$

și deci  $T$  este hyponormal.

Fie  $T$  un operator hyponormal și deci pentru orice  $x \in H$  avem

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\|,$$

de unde rezultă că pentru  $x = Ty$  obținem afirmația noastră.

Să presupunem acum că  $T$  este cvasihiponormal. Fie  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$  și să calculăm  $\|Tx\|^2$ . Vom avea

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|$$

deci  $T$  este de clasă  $(N)$ .

Fie acum  $T$  un operator de clasă  $(N)$ , să arătăm că  $T$  este normaloid. Vom arăta mai întîi că pentru orice întreg  $k$  și  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$  are loc relația

$$\|Tx\|^k \leq \|T^kx\|.$$

În adevăr, pentru  $k = 1, 2$  afirmația este evidentă. Să presupunem că are loc pentru orice întreg  $m \leq p$  și să o demonstrăm pentru  $p + 1$ . Vom avea

$$\begin{aligned}\|T^{p+1}x\| &= \left\| T^p \frac{T - x}{\|Tx\|} \right\| \|Tx\| \geq \left\| T \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\|^p \|Tx\| = \\ &= \|T^2x\|^p \|Tx\|^{1-p} \geq \|Tx\|^{2p+1-p} = \|Tx\|^{p+1}\end{aligned}$$

și deci relația are loc oricare ar fi  $k$ . Din această relație rezultă imediat că  $\|T\| = \|T^n\|^{1/n}$ , oricare ar fi  $n$ .

În adevăr, fie  $x_m, \|x_m\| = 1$  astfel ca

$$\lim \|Tx_m\| = \|T\|.$$

Vom avea atunci

$$\|T\|^k = \lim \|Tx_m\|^k \leq \limsup \|T^k x_m\| \leq \|T^k\| = \|T\|^k$$

de unde rezultă afirmația făcută.

**Observație.** Demonstrația acestei proprietăți sugerează introducerea unei clase de operatori astfel:

**DEFINIȚIA 4.1.8.** Operatorul  $T$  se numește de clasă  $(N, k)$  dacă pentru orice  $x \in H, \|x\| = 1$ , avem că

$$\|Tx\|^k \leq \|T^k x\|.$$

Este evident că pentru  $k = 2$  avem clasa operatorilor paranoi mali. Are loc:

**TEOREMA 4.1.9.** Orice operator de clasă  $(N, k)$  este normaloid.

**Demonstrație.** Putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $\|T\| = 1$  și să luăm  $x_m$  astfel ca  $\lim \|Tx_m\| = 1$ . Rezultă imediat că  $\|T^k\| = 1$  și că  $\lim \|T^k x_m\| = 1$ . Vom arăta că dacă pentru  $i \leq n$  avem

$$\lim_m \|T^i x_m\| = 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

atunci avem și

$$\lim \|T^{n+1} x_m\| = 1.$$

În adevăr, cum  $T$  este de clasă  $(N, k)$  vom avea că

$$\begin{aligned}\|T^{n+1} x_m\| &= \left\| T^k \frac{T^{n+1-k} x_m}{\|T^{n+1-k} x_m\|} \right\| \|T^{n+1-k} x_m\| \geq \\ &\geq \|T^{n+1-k+1} x_m\|^k \|T^{n+1-k} x_m\|^{-(k-1)}\end{aligned}$$

și luând limita pentru  $m \rightarrow \infty$  obținem relația cerută. Dar atunci  $\|T^n\|=1$  oricare ar fi  $n$  și deci raza spectrală a operatorului este egală cu norma. Teorema este astfel demonstrată.

O problemă interesantă în studiul operatorilor este și aceea a operațiilor care lasă o anumită clasă de operatori invariantă. Teorema următoare stabilește o proprietate de acest tip pentru operatorii de clasă (N).

**TEOREMA 4.1.10.** *Dacă  $T$  este de clasă (N) atunci pentru orice întreg  $k$ , operatorul  $T^k$  este de clasă (N).*

*Demonstrație.* Vom demonstra teorema prin inducție. Să presupunem că pentru orice întreg  $i \leq k$  operatorul  $T^i$  este de clasă (N) și să demonstrăm că pentru  $k+1$  operatorul  $T^{k+1}$  este de clasă (N). Cum  $T^k$  este de clasă (N) rezultă că pentru orice  $x \in H$ ,  $\|x\|=1$  avem

$$\|Tx\|^k \leq \|T^k x\|$$

și deci

$$\begin{aligned} \|T^{(k+1)^2} x\| &= \|T^{2k}(T^2 x)\| = \left\| T^{2k} \frac{T^2 x}{\|T^2 x\|} \right\| \|T^2 x\| \geq \\ &\geq \|T^{k+2} x\|^2 \|T^2 x\|^{-1} = \frac{1}{\|T^2 x\|} \left\| T^2 \frac{T^k x}{\|T^k x\|} \right\|^2 \|T^k x\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\|T^2 x\|} \left( \frac{\|T^{k+1} x\|^2}{\|T^k x\|} \right)^2 = \|T^{k+1} x\|^2 \frac{1}{\|T^2 x\|} \cdot \frac{\|T^{k+1} x\|^2}{\|T^k x\|^2}. \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\|T^{k+1} x\|^2}{\|T^k x\|^2} = \frac{\|T^2(T^{k-1} x)\|^2}{\|T^k x\|^2} \geq \frac{1}{\|T^k x\|^2} \left( \frac{\|T^k x\|^2}{\|T^{k-1} x\|} \right)^2 = \frac{\|T^k x\|^2}{\|T^{k-1} x\|^2}$$

și iterînd obținem că

$$\frac{\|T^{k+1} x\|^2}{\|T^k x\|^2} \geq \dots \geq \frac{\|T^2 x\|^2}{\|Tx\|^2},$$

de unde deducem că

$$\|T^{(k+1)^2} x\| \geq \|T^{k+1} x\|^2 \frac{1}{\|T^2 x\|} \cdot \frac{\|T^2 x\|^2}{\|Tx\|^2} = \|T^{k+1} x\|^2 \frac{\|T^2 x\|}{\|Tx\|^2} \geq \|T^{k+1} x\|^2$$

și teorema este demonstrată.

*Observație.* 1) Ar fi interesant de văzut în ce măsură rămîne adevărată această teoremă pentru cazul cînd operatorul este de clasă (N, k).

2) Teorema aceasta va juca un rol esențial în stabilirea faptului că incluziunea : operatori hiponormali  $\subset$  operatori de clasă (N) este strictă.

3) Ar fi interesant de văzut în ce relație se află clasa  $(N, k_1)$  și clasa  $(N, k_2)$  pentru  $k_1$  și  $k_2$  întregi diferiți.

Are loc următoarea :

**TEOREMA 4.1.11.** *Un operator de clasă  $(N)$  este în orice clasă  $(N, k)$  cu  $k \geq 2$ .*

*Demonstrație.* Fie  $m$  un întreg mai mare decât 2 și  $H \ni x, \|x\|=1$ . Vom avea

$$\|T^m x\| \geq \|Tx\|^m$$

și acest fapt a fost stabilit la demonstrația teoremei 4.1.7. Teorema este demonstrată.

Fie  $\mathcal{L}(H)$  algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $H$ , iar  $K$  idealul bilateral închis al operatorilor compacți și în acest caz putem considera algebra Banach  $\mathcal{C} = (\mathcal{L}(H))/K$  care este o  $C^*$ -algebră ( $B^*$ -algebră în altă terminologie) și se mai numește algebra Calkin.

**DEFINIȚIA 4.1.12.** Vom spune că o proprietate  $P$  are loc esențial pentru operatorul  $T$  dacă operatorul  $\hat{T}$ , imaginea lui  $T$  în algebra Calkin, are această proprietate.

Vom defini acum noi clase de operatori.

**DEFINIȚIA 4.1.13.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  se spune că este convexoid dacă

$$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}.$$

Aici  $\text{conv } E$  înseamnă cea mai mică mulțime convexă care conține mulțimea  $E$  și care se mai numește și înfășurătoarea mulțimii  $E$ , iar  $\overline{E}$  închiderea mulțimii  $E$  în sens standard.

**DEFINIȚIA 4.1.14.** Se spune că operatorul  $T \in \mathcal{L}(H)$  este transaloid dacă pentru orice  $\lambda \in \mathbb{C}$  operatorul  $T_\lambda = T + \lambda I$  este normaloid.

**DEFINIȚIA 4.1.15.** Un operator  $T$  se spune că este invariant normaloid dacă restricția sa la orice subspațiu invariant  $M$ ,  $T_M$  este un operator normaloid.

Similar definim operatorii invariantei convexoizi.

Vom reaminti și noțiunea de mulțime spectrală în sensul lui von Neumann.

**DEFINIȚIA 4.1.16.** O submulțime  $F$  închisă în planul complex se spune că este mulțime spectrală pentru  $T \in \mathcal{L}(H)$  dacă au loc relațiile :

1.  $\sigma(T) \subseteq F$ ,
2. oricare ar fi funcția rațională  $f$  cu polii în afara lui  $F$  avem  $\|f(T)\| \leq \sup_{\lambda \in F} |f(\lambda)|$ .

Este cunoscut că dacă  $N$  este un operator normal,  $\sigma(N)$  este o mulțime spectrală pentru  $N$ ; de asemenea se pot da unele caracterizări interesante ale unor clase de operatori utilizând noțiunea de mulțime spectrală.

**DEFINIȚIA 4.1.17.** Un operator se spune că satisface condiția

- 1) dacă  $\overline{W(T)}$  este o mulțime spectrală,
- 2)  $\text{conv } \sigma(T)$  este o mulțime spectrală,
- 3)  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală.

Are loc următoarea :

TEOREMA 4.1.18. *Are loc următorul șir de implicații :*

3)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  1)  $\Rightarrow T$  normaloid  $\Rightarrow T$  convexoid.

*Demonstrație.* Primele trei implicații rezultă din definiția mulțimilor spectrale. Fie deci  $T$  normaloid și să arătăm că  $T$  este convexoid.

Fie  $\lambda \in \overline{W(T)}$ , iar  $C$  un cerc care trece prin  $\lambda$ , astfel că nici un punct din  $\overline{W(T)}$  nu este în afara cercului, iar  $\lambda_0$  centrul său ; deci

$$|\lambda - \lambda_0| = \sup\{|\mu - \lambda_0|, \lambda \in W(T)\}.$$

Cum  $T$  este normaloid rezultă că  $\|T - \lambda_0 I\| = r_{T - \lambda_0 I} = |\lambda - \lambda_0|$  și cum  $\lambda - \lambda_0$  este în  $\overline{W(T - \lambda_0 I)}$  există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$\langle (T - \lambda_0 I)x_n, x_n \rangle - (\lambda - \lambda_0) \rightarrow 0.$$

Dar

$$\|(T - \lambda_0 I)x_n - (\lambda - \lambda_0)x_n\|^2 = \|(T - \lambda_0 I)x_n\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle (T - \lambda_0 I)x_n,$$

$$(\lambda - \lambda_0)x_n \rangle + |\lambda - \lambda_0|^2 \leq 2|\lambda - \lambda_0|^2 + 2\operatorname{Re} \langle (T - \lambda_0 I)x_n, x_n \rangle (\lambda - \lambda_0) \rightarrow 0$$

și deci  $\lambda - \lambda_0 \in \sigma(T - \lambda_0 I)$  adică  $\lambda \in \sigma(T)$ . De aici rezultă că orice punct bară din  $\overline{W(T)}$  este un punct în  $\sigma(T)$ . Dar  $\overline{W(T)}$  este înfășurătoarea convexă închisă a punctelor bară și deci  $\overline{W(T)} = \operatorname{conv} \sigma(T)$  și cum inegalitatea în sens contrar este evidentă (adevărată pentru orice operator) afirmația este demonstrată și cu aceasta teorema.

Vom da acum câteva proprietăți ale operatorilor hiponormali și ale operatorilor de clasă (N).

TEOREMA 4.1.19. *Dacă  $T$  este hiponormal atunci oricare ar fi numerele  $\alpha, \beta$  complexe, operatorul :*

1)  $\alpha T + \beta I$  este hiponormal,

2)  $\alpha T + \beta T^*$  este hiponormal sau seminormal.

*Demonstrație.* Cum pentru orice  $\alpha, \beta$  avem

$$(\alpha T + \beta I)^*(\alpha T + \beta I) - (\alpha T + \beta I)(\alpha T + \beta I)^* = |\alpha|^2(T^*T - TT^*).$$

$$\cdot (\alpha T + \beta T^*)^*(\alpha T + \beta T^*) - (\alpha T + \beta T^*)(\alpha T + \beta T^*)^* =$$

$$= [|\alpha|^2 - |\beta|^2](T^*T - TT^*)$$

afirmația teoremei este acum evidentă.

TEOREMA 4.1.20. *Dacă  $T$  este hiponormal și  $M$  un subspațiu invariant pentru  $T$  atunci operatorul  $T_M$ , restricția operatorului  $T$  la subspațiul  $M$ , este un operator hiponormal.*

*Demonstrație.* Cum pentru orice  $x$  avem

$$T_M x = P_M T P_M x$$

și deci

$$\|(T_M)^*x\| = \|P_M T^* P_M x\| \leq \|T^* P_M x\| \leq \|T P_M x\| = \|P_M T P_M x\| = \|T_M x\|$$

de unde rezultă afirmația făcută.

Următoarea teoremă este evidentă :

**TEOREMA 4.1.21.** *Dacă  $T$  este un operator de clasă  $(N, k)$  atunci  $T$  este invariant normaloid.*

**TEOREMA 4.1.22.** *Dacă  $T$  este un operator hiponormal și  $M$  este un subspațiu invariant al lui  $T$  astfel că  $TP_M$  este un operator normal, atunci  $M$  reduce pe  $T$ .*

*Demonstrație.* Reamintim că se spune că operatorul  $T$  este redus de subspațiul  $M$ , dacă  $M$  este invariant pentru  $T$  și pentru  $T^*$ .

Să demonstrăm acum teorema. Cum  $M$  are proprietatea că  $TP_M$  este normal avem că  $P_M T^* P_M T P_M = T P_M T^*$  și cum  $P_M T^* P_M = P_M T^*$ , deducem că

$$\begin{aligned} \|(T^* P_M - P_M T^*)x\|^2 &= \langle T T^* P_M x, P_M x \rangle - \langle T P_M T^* P_M x, x \rangle - \\ &\quad - \langle P_M T P_M T^* x, x \rangle + \langle T P_M T^* x, x \rangle \leq \langle T^* T P_M x, P_M x \rangle - \\ &\quad - \langle T P_M T^* x, x \rangle - \langle T P_M T^* x, x \rangle + \langle P_M T^* T P_M x, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

și deci  $T^* P_M = P_M T^*$ ,  $TP_M = P_M T$ ; teorema este demonstrată.

*Observație.* Nu se știe dacă teorema este adevărată pentru operatori de clasă  $(N)$ .

**TEOREMA 4.1.23.** *Dacă  $T$  este un operator subnormal atunci  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ .*

*Demonstrație.* În adevăr, dacă  $B$  este extensia normală a lui  $T$  atunci este cunoscut și ușor de demonstrat că  $\sigma(B) \subseteq \sigma(T)$ . Fie acum  $f$  o funcție rațională cu poli în afara lui  $\sigma(T)$  și din teorema spectrală pentru operatori normali deducem

$$\|f(T)\| \leq \|f(B)\| = \sup_{\lambda} \{|f(\lambda)|, \lambda \in \sigma(B)\} \leq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|f(\lambda)|, \lambda \in \sigma(T)\}$$

și afirmația teoremei este demonstrată.

Următoarea teoremă dă noi informații asupra claselor de operatori introduse :

**TEOREMA 4.1.24.** 1) *Există un operator care este hiponormal și nu este subnormal.*

2) *Există un operator care este de clasă  $(N)$  și nu este hiponormal.*

*Demonstrație.* Fie  $H$  un spațiu Hilbert, să considerăm spațiul Hilbert  $K$  de forma următoare  $K = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus H_i$ ,  $H_i = H$  cu produsul scalar definit prin

$$\langle x, y \rangle = \sum \langle x_i, y_i \rangle$$

unde

$$x = (x_i)_{-\infty}^{\infty}, y = (y_i)_{-\infty}^{\infty} \text{ și } \sum \|x_i\|^2 < \infty, \sum \|y_i\|^2 < \infty.$$

Să considerăm un șir de operatori pozitivi pe  $H$ ,  $\{P_n\}_{-\infty}^{\infty}$  astfel ca  $\sum \|P_n\| < \infty$  și să definim operatorul  $U$  și operatorul  $P$  astfel:

$$1. (Ux)_n = x_{n-1},$$

$$2. (Px)_n = P_n x_n,$$

dacă  $x \in K$  și  $x = (x_n)_{-\infty}^{\infty}$ . Este evident că  $U$  reprezintă translația bilaterală pe  $K$  și că au loc relațiile:

$$(U^*x)_n = x_{n-1}, (P^*x)_n = P_n^* x_n = P_n x_n.$$

Să punem  $T = UP$  și vom avea că

$$(T^*Tx)_n = P_n^2 x_n,$$

$$(TT^*x)_n = P_{n-1}^2 x_n,$$

dacă  $x = (x_n)_{-\infty}^{\infty}$ . Deci  $T$  este hiponormal dacă și numai dacă șirul  $\{P_n^2\}$  este crescător. Din definiția lui  $U$  și  $P$  rezultă de asemenea că

$$(T^{*2}T^2x)_n = P_n P_{n+1}^2 P_n x_n$$

$$(T^2T^{*2}x)_n = P_{n-1} P_n^2 P_{n-1} x_n,$$

dacă  $x = (x_n)_{-\infty}^{\infty}$  și deci  $T^2$  este hiponormal dacă și numai dacă

$$P_{n-1} P_n^2 P_{n-1} \leq P_n P_{n+1}^2 P_n$$

oricare ar fi  $n$ .

Să presupunem că  $H$  are două dimensiuni și să luăm

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

care reprezintă matricele unor operatori definiți pe  $H$  (cu care facem identificarea) și deci

$$D - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

iar

$$D^2 - C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

care are determinantul negativ. Să punem

$$P_n = \begin{cases} \sqrt{C}, & n \leq 0 \\ \sqrt{D}, & n \geq 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că  $P_n^2 \leq P_{n+1}^2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , iar  $P_0 P_{-1} P_0 = C^2$  și  $P_1 P_0^2 P_1 = D^2$ , de unde deducem că  $\{P_n\}$  este crescător și operatorul  $T$  corespunzător este hiponormal, iar  $T^2$  nu este. Însă este cunoscut că  $T^2$  este de clasă (N).

Să arătăm acum că există un operator hiponormal care nu este subnormal. În adevăr, dacă  $T$  construit mai sus ar fi subnormal, fie atunci  $B$  extensia sa normală și deci  $B^2$  este extensia normală a lui  $T^2$ . Deci  $T^2$  ar fi și hiponormal ceea ce nu se poate.

Următoarele teoreme dau unele informații privind operatorii hiponormali sau de clasă (N).

**TEOREMA 4.1.25.** *Dacă  $T$  este hiponormal și  $T^{-1}$  există atunci  $T^{-1}$  este hiponormal; similar dacă  $T$  este de clasă (N).*

*Demonstrație.* Fie deci  $T$  hiponormal și deci  $T^*T - TT^* \geq 0$  de unde rezultă

$$0 \leq T^{-1}(T^*T - TT^*)T^{-1} = T^{-1}T^*TT^{-1} - I.$$

Cum  $A \geq I$  ne dă că  $A$  este invertibil și  $A^{-1} \leq I$ , deducem

$$I - T^*T^{-1}T^{*-1}T \geq 0$$

care ne dă

$$T^{*-1}T^{-1} - T^{-1}T^{*-1} = T^{*-1}(I - T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1} \geq 0$$

și deci  $T^{-1}$  este hiponormal.

Să presupunem că  $T$  este de clasă (N). Fie  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$  și  $y = T^{-2}x$  de unde rezultă că

$$\begin{aligned} \|T^{-2}x\| &= \|y\| = \|y\|\|x\| = \|y\|\|T^2y\| = \|y\|^2 \left\| T^2 \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \\ &\geq \|y\|^2 \left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \|Ty\|^2, \end{aligned}$$

care ne dă

$$\|T^{-2}x\| \geq \|T^{-1}x\|^2$$

și deci  $T^{-1}$  este de clasă (N). Teorema este demonstrată.

**DEFINIȚIA 4.1.26.** Se spune că operatorul  $T \in \mathcal{L}(H)$  satisface condiția  $G_1$  dacă oricare ar fi  $z \in \rho(T) = C_{\sigma(T)}$  și  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$

$$\|(T - zI)x\| \geq d(z, \sigma(T))$$



Are loc următoarea :

**TEOREMA 4.1.27.** *Dacă  $T$  este un operator cu proprietatea că pentru orice  $\lambda$ ,  $T_\lambda = T + \lambda I$  este de clasă  $(N)$ , atunci  $T$  satisface condiția  $G_1$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $z \in \rho(T)$  atunci  $(T - zI)^{-1}$  există și este de clasă  $(N)$ , de unde rezultă că este normaloid și deci

$$\begin{aligned} \|(T - zI)^{-1}x\| &\leq \|(T - zI)^{-1}\| = \max\{|w|, w \in \sigma((T - zI)^{-1})\} = \\ &= \frac{1}{\min\{|w|, w \in \sigma(T - zI)\}} = \frac{1}{\min\{|z - w|, w \in \sigma(T)\}} = \frac{1}{d(z, \sigma_T)} \end{aligned}$$

de unde rezultă afirmația noastră.

*Observație.* Cum pentru  $\|x\|=1$  avem

$$\begin{aligned} \|(T - zI)x\| &\geq |\langle (T - zI)x, x \rangle| = |\langle Tx, x \rangle - z| \geq \min\{|z - w|, \\ &w \in W(T)\} = d(z, W(T)) \end{aligned}$$

rezultă că o proprietate similară pentru rangul numeric are loc (de tip  $G_1$ ) oricare ar fi operatorul  $T$ .

În teorema 4.1.24 a fost construit un operator hiponormal care are proprietatea că pătratul său nu este hiponormal și care de asemenea nu este subnormal. Apare natural următoarea problemă : dacă  $T$  este un operator cu proprietatea că pentru orice întreg  $n$ ,  $T^n$  este hiponormal atunci în mod necesar  $T$  este subnormal?

Următorul exemplu dă un răspuns negativ la această problemă.

Fie  $\{e_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$  o bază ortonormală a spațiului Hilbert  $H$  și să definim operatorul  $T: H \rightarrow H$  prin

$$Te_i = \begin{cases} e_{i+1}, & i \leq 0, \\ 2e_{i+1}, & i > 0. \end{cases}$$

În acest caz  $T$  este mărginit și  $T^k e_i = b_{i,k} e_{i+k}$  cu  $|b_{i,k}| < |b_{i+1,k}|$  de unde rezultă că  $T^k$  este hiponormal oricare ar fi întregul  $k = 1, 2, 3, \dots$  Cum însă

$$\|Te_0\| = \|T^*e_0\|$$

și  $\|T^*Te_0\| \neq \|T^2e_0\|$ ,  $T$  nu poate fi subnormal.

**TEOREMA 4.1.28.** *Dacă  $T$  este hiponormal atunci  $\|T^*x\| = \|Tx\|$  dacă și numai dacă  $T^*Tx = TT^*x$ .*

*Demonstrație.* Suficiența condiției este evidentă. Să arătăm că este și necesară. Fie deci  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  de unde rezultă că

$$\langle (TT^*x - T^*Tx), x \rangle = 0$$

și deci, oricare ar fi  $y \in H$  avem

$$|\langle (T^*T - TT^*)x, y \rangle|^2 \leq \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle \langle (T^*T - TT^*)y, y \rangle$$

după cum rezultă din inegalitatea generalizată a lui Schwarz. De aici rezultă afirmația teoremei imediat.

**TEOREMA 4.1.29.** *Există un operator normaloid care nu este de clasă (N).*

*Demonstrație.* Să considerăm un spațiu Hilbert cu trei dimensiuni și operatorul  $T$  cu matricea

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

în raport cu baza ortonormală  $(e_1, e_2, e_3)$ . Evident  $\sigma(T) = \{0, 1\}$  și  $\|T\| = 1$  de unde rezultă că  $T$  este normaloid. Avem

$$1 = \|Te_2\|^2 > \|T^2e_2\| = 0, \quad \|e_2\| = 1.$$

*Observație.* Vom demonstra mai târziu că orice operator de clasă (N) care este și compact, este în mod necesar normal. Cum orice operator  $T$  pe un spațiu finit-dimensional este compact, operatorul  $T$  dacă ar fi de clasă (N) ar fi normal; însă este evident că  $T$  nu este normal.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor de clasă (N).

**TEOREMA 4.1.30.** *Un operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  este de clasă (N) dacă și numai dacă*

$$T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geq 0$$

oricare ar fi  $\lambda \geq 0$ .

*Demonstrație.* Cum avem relațiile

$$\begin{aligned} \|T^2x\| \|x\| &= \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2} \{ \lambda^{-1} \|T^2x\|^2 + \lambda \|x\|^2 \} = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2} \lambda^{-1} \{ \langle T^{*2}T^2x, x \rangle + \\ &+ \lambda \langle x, x \rangle \} = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2} \{ \langle (\lambda^{-1} T^{*2}T^2 + \lambda I)x, x \rangle \}. \end{aligned}$$

Însă  $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$  este echivalentă deci cu

$$\frac{1}{2} \langle (\lambda^{-1} T^{*2}T^2 + \lambda I)x, x \rangle \geq \|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle,$$

adică

$$\langle (\lambda^{-1} T^{*2}T^2 + \lambda I - 2T^*T)x, x \rangle \geq 0,$$

care este inegalitatea cerută. Teorema este demonstrată.

*Observație.* Apare în mod natural problema dacă operatorii din clasele  $(N, k)$ ,  $k > 2$  pot fi caracterizați în mod similar.

Următoarele teoreme dau un răspuns parțial:

**TEOREMA 4.1.31.** *Dacă operatorul  $T$  are proprietatea că*

$$T^{*k} T^k \geq (T^* T)^k$$

*atunci  $T$  este în clasa  $(N, k)$ .*

*Demonstrație.* În adevăr, dacă  $\|x\|=1$ , avem

$$\begin{aligned} \langle T^{*k} T^k x, x \rangle &= \langle T^k x, T^k x \rangle = \|T^k x\|^2 \geq \langle (T^* T)^k x, x \rangle \geq \\ &\geq \langle T^* T x, x \rangle^k = \|T x\|^{2k} \end{aligned}$$

deoarece dacă  $A > 0$  atunci are loc inegalitatea

$$\langle A^r x, x \rangle \geq \langle A x, x \rangle^r \|x\|^{2(1-r)}, \quad r \in (1, \infty)$$

și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 4.1.32.** *Dacă operatorul  $T$  are proprietatea că pentru orice  $\lambda > 0$*

$$T^{*k} T^k - 2\lambda(T^* T)^{k/2} + \lambda^2 \geq 0,$$

*atunci  $T$  este de clasă  $(N, k)$ .*

*Demonstrație.* În adevăr, fie  $x \in H$ ,  $\|x\|=1$  și deci

$$\langle T^{*k} T^k x, x \rangle - 2 \langle \lambda(T^* T)^{k/2} x, x \rangle + \lambda^2 \geq \|T^k x\|^2 - 2\lambda \|T x\|^k + \lambda^2$$

și punind  $\lambda = \|T x\|^k$  obținem că  $T$  este de clasă  $(N, k)$ . Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă informații privind un alt aspect al legăturii dintre operatorii hiponormali și de clasă  $(N)$ .

**TEOREMA 4.1.33.** *Închiderea tare a mulțimii operatorilor hiponormali este inclusă în mulțimea operatorilor de clasă  $(N)$ .*

*Demonstrație.* Fie deci  $\{T_n\}$  un șir de operatori hiponormali și

$$T_n x \rightarrow T x.$$

În acest caz  $T$  este de clasă  $(N)$  deoarece din  $T_n \rightarrow T$ , convergența fiind tare, rezultă că și  $T_n^2 \rightarrow T^2$  tot în convergența tare. De aici rezultă evident că

$$\|T x\|^2 \leq \|T^2 x\|$$

și deci teorema noastră.

Vom menționa acum că operatorii hiponormali pot fi incluși într-o clasă de operatori numită și clasa operatorilor hiponormali de ordin  $m$ .

**DEFINIȚIA 4.1.34.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  se spune că este hiponormal de ordin  $m$  dacă  $H^m J - J H^m = i C_m$  unde  $C_m$  este un operator negativ și  $T = H + iJ$  cu  $H, J$  operatori hermitici.

Se poate verifica imediat că pentru  $m = 1$  aceasta coincide cu clasa operatorilor hiponormali.

Pentru proprietăți ale acestei clase de operatori a se vedea [98], [251].

Vom da acum un exemplu important de operator de clasă  $(N)$  care în anumite cazuri este și operator hiponormal.

Fie pentru aceasta spațiul  $l^p$  cu  $1 < p < \infty$  format din toate șirurile  $x = (x_i)$  cu proprietatea că  $\sum |x_i|^p < \infty$  și cu norma

$$x \rightarrow \|x\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p},$$

iar  $\{e_i\}_1^\infty$  baza sa naturală, adică

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$$

**DEFINIȚIA 4.1.35.** Operatorul  $T: l^p \rightarrow l^p$  se spune că este un operator de translație monotonă cu ponderile  $\{\lambda_i\}$  dacă :

- 1)  $T e_i = \lambda_i e_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$
- 2)  $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$
- 3)  $\lim |\lambda_i|$  este finită.

Are loc :

**TEOREMA 4.1.36.** Operatorul de translație monotonă este de clasă  $(N)$  pe  $l^p$  în sensul că oricare ar fi  $x \in l^p, \|x\| = 1$  avem

$$(*) \quad \|T^2 x\| \geq \|Tx\|^2$$

*Demonstrație.* Fie  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$  și deci vom avea

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i T e_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \lambda_i e_{i+1},$$

de unde deducem că

$$\|Tx\|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \lambda_i|^p$$

și cum  $T^2 x = \sum x_i \lambda_i \lambda_{i+1} e_{i+2}$ , vom avea

$$\|T^2 x\|^p = \sum |x_i \lambda_i \lambda_{i+1}|^p.$$

Cum avem inegalitatea  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_i) \geq f(\sum \alpha_i x_i)$ , unde  $f$  are proprietatea că  $\frac{d^2 f}{dx^2} \geq 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , deducem că

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{2p} |x_i|^p \right)^{1/p} \geq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p |x_i|^p \right)^{2/p}$$

și prin urmare relația (\*) este adevărată și teorema este demonstrată.

Teorema următoare caracterizează operatorii pentru care spectrul este o mulțime spectrală în raport cu operatorii normaloizi.

**TEOREMA 4.1.37.** *Condiția necesară și suficientă ca un operator  $T$  să aibă spectrul  $\sigma(T)$  ca mulțime spectrală este ca pentru orice funcție rațională  $f$  cu poli în afara mulțimii  $\sigma(T)$ , operatorul  $f(T)$  să fie normaloid.*

*Demonstrație.* Să presupunem că  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală și fie  $f$  ca în teoremă, de unde rezultă că

$$\|f(T)\| = \sup_{z \in \sigma(T)} |f(z)| = \sup_{\lambda \in \sigma(f(T))} |\lambda| = r_{f(T)}.$$

Invers, dacă  $f(T)$  este normaloid oricare ar fi  $f$  vom avea

$$\|f(T)\| = r_{f(T)} = \sup_{z \in \sigma(T)} |f(z)|$$

și deci  $\sigma(T)$  este mulțime spectrală.

Din această teoremă rezultă că  $\sigma(T) = \{z, |z| \leq \|T\|\}$ , atunci pentru orice  $f$  cu poli în afara acestei mulțimi, avem că  $f(T)$  este un operator normaloid.

În încheiere vom menționa o clasă introdusă recent de Morrel și care a fost sugerată de operatorul de translație.

**DEFINIȚIA 4.1.38.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  se numește centrat dacă operatorii din șirul următor formează o familie de operatori comutativă

$$\dots, T^2(T^*)^2, TT^*, T^*T, (T^*)^2T^2, \dots$$

Se poate observa că orice operator normal este centrat și chiar orice operator evasinormal este centrat. Următoarea teoremă dă unele informații privind proprietăți ale operatorilor centrați.

**TEOREMA 4.1.39.** *Fie  $T \in \mathcal{L}(H)$ . În acest caz :*

- 1°  $T$  este centrat dacă și numai dacă  $T^*$  este centrat;
- 2° dacă  $T$  este centrat atunci pentru orice întreg  $k$ ,  $T^k$  este centrat;
- 3° dacă  $T$  este centrat și  $T^{-1}$  există, atunci  $T^{-1}$  este centrat;
- 4° dacă  $S, T$  sînt centrați și  $*$ -comută<sup>1</sup> atunci  $ST$  este centrat.

<sup>1</sup>Se spune că operatorii  $T$  și  $S$   $*$ -comută dacă

$$1) TS = ST$$

$$2) T^*S = ST^*$$

*Demonstrație.* Primele trei afirmații sînt ușor de verificat. Vom da numai demonstrația pentru 4°. Vom remarca faptul că pentru orice  $k$ , avem

$$[(ST)^*]^k [ST]^k = (S^*)^k S^k (T^*)^k T^k$$

$$[(ST)]^k [(ST)^*]^k = S^k (S^*)^k T^k (T^*)^k$$

și cum operatorii din șirul

$$\dots, T^2 (T^*)^2, TT^*, T^*T, (T^*)^2 T^2, \dots$$

comută cu cei din șirul

$$\dots, S^2 (S^*)^2, SS^*, S^*S, (S^*)^2 S^2, \dots$$

afirmația este evidentă.

Pentru rezultate privind această clasă a se vedea [333], [334].

## § 2. DILATAREA OPERATORILOR ȘI MULȚIMI SPECTRALE

Să presupunem că  $T$  este un operator pe un spațiu Hilbert  $H$  și că este mărginit. O metodă des utilizată în studiul operatorilor este de a defini noi operatori care sînt în clase de operatori cu proprietăți cunoscute.

În cele ce urmează vom ilustra aceasta pentru a studia cazul cînd  $W(T)$  este o mulțime spectrală.

**DEFINIȚIA 4.2.1.** Să presupunem că există un spațiu Hilbert  $K \supset H$  și un operator  $B \in \mathcal{L}(K)$  astfel ca pentru orice  $x \in H$  să avem

$$Tx = PBx,$$

unde  $P: K \rightarrow H$  este proiecția ortogonală respectivă. Se spune în acest caz că  $B$  este dilatarea operatorului  $T$ , iar  $K$  este spațiu dilatator; în cazul cînd  $B$  este normal, se spune dilatare normală. Dacă are loc și relația

$$T^n x = PB^n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

se spune că  $B$  este dilatarea tare a operatorului  $T$ . În cazul cînd  $K$  nu conține alt spațiu care conține pe  $H$  și reduce pe  $T$ , se spune că  $B$  este dilatare minimală, respectiv dilatare minimală tare.

Are loc următoarea:

**TEOREMA 4.2.2.** Orice contracție  $T$  ( $\|T\| \leq 1$ ) are o dilatare unitară.

*Demonstrație.* În adevăr, să considerăm spațiul produs  $K = H \times H$  și transformarea  $U$  definită pe  $K$  cu matricea

$$U = \begin{pmatrix} T & S \\ -Z & T \end{pmatrix}$$

unde  $S = (I - TT^*)^{1/2}$ ,  $Z = (I - T^*T)^{1/2}$ . Evident că putem identifica pe  $H$  cu subspațiul  $H \oplus \{0\} \subset K$  și este clar că  $PUx = Tx$  dacă  $x \in H$ . Trebuie să arătăm că  $U$  este un operator unitar. Cum avem

$$U^*U = \begin{pmatrix} T^*T + Z^* & T^*S - ZT^* \\ ST - TZ & S^2 + TT^* \end{pmatrix}$$

$$UU^* = \begin{pmatrix} TT^* + S^2 & -TZ + ST \\ -ZT + TS & Z^2 + T^*T \end{pmatrix}.$$

Cum avem

$$Z^2 = I - T^*T, \quad S^2 = I - TT^*$$

rezultă că elementele de pe diagonală sînt egale cu  $I$ . Rămîne să arătăm că celelalte elemente sînt zero, adică

$$(*) \quad ST = TZ,$$

deoarece  $T^*S = ZT^*$  se obține prin trecere la operatorul adjunct. Vom avea

$$S^2T = (I - TT^*)T = T(I - T^*T) = TZ^2$$

și prin inducție, pentru orice  $n$

$$S^{2n}T = TZ^{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

de unde rezultă că pentru orice polinom  $p(\lambda)$  vom avea

$$p(S^2)T = Tp(Z^2).$$

Cum însă  $Z$  și  $S$  sînt limite de polinoame de operatori în  $Z^2$  și  $S^2$ , relația (\*) este demonstrată și cu aceasta teorema.

*Observație.* Operatorul  $U$  construit mai sus nu este o dilatare unitară tare. Aceasta se poate constata astfel: pentru orice  $x \in H$  avem

$$PU^2x = (T^2 + ZT)x.$$

Următoarea teoremă arată un mod de a construi o dilatare unitară tare.

**TEOREMA 4.2.3.** *Orice contracție  $T$  definită pe spațiul Hilbert  $H$  admite o dilatare unitară tare minimală  $U$ .*

*Demonstrație.* Să considerăm spațiul Hilbert  $K = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus H_i$ ,  $H_i = H$  al tuturor șirurilor  $x = (x_i)_{-\infty}^{\infty}$  cu proprietatea că  $\sum_{-\infty}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$  și cu produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle x_i, y_i \rangle$$

dacă  $y = (y_i)_{-\infty}^{\infty}$ . Spațiul  $H$  îl vom identifica cu subspațiul

$$x \rightarrow (\dots, 0, 0, \dots, \underset{-1}{0}, \underset{0}{x}, \underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \dots) \in K$$

Cum orice operator mărginit pe  $K$  poate fi reprezentat cu ajutorul unei matrici  $\{S_{n,m}\}$  unde fiecare  $S_{n,m}$  este un operator pe  $H$  și dacă  $y = \{y_n\}$ ,  $y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{n,m} x_m$  și  $x = (x_m)$ . Deci pentru orice  $x \in H$  avem

$$PSx = P\{S_{n,0} x\} = S_{0,0} x,$$

unde  $S$  are matricea  $\{S_{n,m}\}$ . Vom defini un operator  $\tilde{U}$  pe  $K$  astfel: are matricea  $\{U_{n,m}\}$  dată astfel

$$U_{0,0} = T, \quad U_{0,1} = S, \quad U_{-1,0} = Z, \quad U_{-1,1} = -T^*,$$

$$U_{n,n+1} = I, \quad n \neq 0, -1$$

$$U_{n,m} = 0 \text{ în rest}$$

și deci matricea are forma

$$\begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & I & & & & \\ & & I & & & & \\ & & 0S & -T^* & & & \\ & & \underline{|T|} & Z & & & \\ & & & 0 & I & & \\ & & & & I & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

Să arătăm mai întâi că  $\tilde{U}$  este unitar și fie pentru aceasta  $x = (x_n) \in K$ , iar  $y = x\tilde{U}$  cu  $y = (y_n)$  și deci  $y_n = \sum_m \tilde{U}_{n,m} x_m$ . Din definiția lui  $\tilde{U}$  rezultă că

$$y_{-1} = Sx_0 - Tx_1,$$

$$y_0 = Tx_0 - Zx_1,$$

$$y_n = x_{n+1} \quad n \neq 0, -1$$

și deci

$$\begin{aligned} \|y_{-1}\|^2 + \|y_0\|^2 &= \|Sx_0 - T^*x_1\|^2 + \|Tx_0 - Zx_1\|^2 = \\ &= \langle (I - T^*T)x_0, x_0 \rangle + \langle TT^*x_1, x_1 \rangle + \langle TSx_0, x_1 \rangle - \\ &\langle x_1, TSx_0 \rangle + \langle ZTx_0, x_1 \rangle + \langle x_1, ZTx_0 \rangle = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2, \end{aligned}$$

deci  $\sum \|x_n\|^2 = \sum \|y_n\|^2$ , adică  $\tilde{U}$  este izometric. Să arătăm că este un operator surjectiv. Fie deci  $\{y_n\} = y \in K$  și să punem  $x = \{x_n\}$ , unde

$$x_0 = Sy_{-1} + T^*y_0$$

$$x_1 = -T y_{-1} + Zy_0$$

$$x_n = y_{n-1}, \quad n \neq 0, 1$$

care ne dă imediat că  $\tilde{U}x = y$  și deci  $\tilde{U}$  este un operator unitar.

Rămîne să arătăm acum că  $\tilde{U}$  este o dilatare tare a operatorului  $T$ ; rezultă că  $\tilde{U}$  este o dilatare tare a operatorului și să arătăm că este minimală. Fie  $K_0 \subset K$  format din acele elemente  $x = (x_n)$  astfel ca

$$1. \quad x_n \in \{Sx\}_{x \in H}, \quad n \leq -1$$

$$2. \quad x_0 \in H,$$

$$3. \quad x_n \in \{Zx\}_{x \in H}, \quad n \geq 1$$

Fie  $\tilde{U}x = y$  cu  $x \in K_0$ ,  $x = (x_n)$  și  $y = (y_n)$ . Deducem că  $y_{-n} \in \{Sx\}_{x \in H}$ ,  $y_0 \in H$  și  $y_n \in \{Zx\}_{x \in H}$  adică  $y \in K_0$ .

Pe de altă parte, dacă  $y_0 \in H$  și  $y_{-1} \in \{Sx\}_{x \in H}$ , există  $x = (x_n) \in K_0$  astfel ca  $\tilde{U}x = y$ , de unde rezultă că  $K_0$  reduce operatorul  $\tilde{U}$ . Vom avea că

$$\tilde{U}^n x = \{\dots, 0, Sx, STx, \dots, ST^{n-1}x, T^n x, 0, \dots\},$$

$$\tilde{U}^{-n} x = \{\dots, 0, T^{*n}x, ZT^{*n-1}x, \dots, Zx, 0, 0, 0, \dots\}$$

oricare ar fi  $x \in H$  și  $n = 1, 2, 3, \dots$  care arată că spațiul  $K_0$  ne dă spațiul dilatant minimal. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă următoarea :

**TEOREMA 4.2.4.** *Dacă  $T$  este contracție și  $\lambda$  un număr cu modulul 1, iar  $\{x_n\}$  un șir de elemente cu proprietățile*

$$1. \quad \|x_n\| = 1,$$

$$2. \quad Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0,$$

atunci  $T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0$ .

*Demonstrație.* Fie  $U$  o dilatare a lui  $T$  și deci

$$\|Ux - \lambda x\|^2 = \|Ux\|^2 + \|\lambda x\|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{\lambda} \langle Ux, x \rangle =$$

$$= 2\|\lambda x\|^2 - 2\bar{\lambda} \langle Ux, x \rangle = 2\operatorname{Re} \langle \lambda x, \lambda x - Tx \rangle \leq 2\|x\| \|(T - \lambda)x\| \leq$$

$$\leq 2\|x\| \|Ux - \lambda x\|$$

și deci

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow Ux_n - \lambda x_n \rightarrow 0.$$

În mod similar  $T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow U^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0$  de unde rezultă afirmația teoremei.

*Observație.* Această teoremă se mai poate demonstra și fără teorema de mai sus. În adevăr, vom remarca faptul că din

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$$

rezultă

$$\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda.$$

Vom avea

$$\begin{aligned} \|T^*x_n - \bar{\lambda}x_n\|^2 &= \|T^*x_n\|^2 - 2\operatorname{Re} \lambda \langle T^*x_n, x_n \rangle + \\ &+ 1 \leq 2 - 2\operatorname{Re} \lambda \langle x_n, Tx_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

de unde afirmația făcută.

Din teorema de mai sus obținem o caracterizare a operatorilor care sînt contracții cu ajutorul noțiunii de mulțime spectrală.

**TEOREMA 4.2.5.** *Mulțimea  $\{z, |z| \leq 1\}$  este mulțimea spectrală pentru operatorul  $T$  dacă și numai dacă  $T$  este un operator contracție.*

*Demonstrație.* Fie  $T$  un operator contracție și  $U$  dilatarea sa tare pe care o putem presupune și minimală. În acest caz pentru orice  $f$  rațională cu poli în afara mulțimii  $\{z, |z| \leq 1\}$ , avem

$$f(T)x = Pf(U)x$$

și din teorema spectrală pentru operatori normali obținem

$$\|f(T)x\| \leq \sup_{\{z, |z| \leq 1\}} |f(z)| \|x\| = \sup_{|z| \leq 1} |f(z)| \|x\|$$

și deci  $\|f(T)\| \leq \sup_{|z| \leq 1} |f(z)|$ , adică  $\{z, |z| \leq 1\}$  este o mulțime spectrală.

Fie acum  $T$  cu proprietatea că  $\{z, |z| \leq 1\}$  este o mulțime spectrală. Pentru  $f(z) = z$  avem imediat

$$\|f(T)\| = \|T\| = \sup_{|z| \leq 1} |z| = 1.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Pentru cele ce urmează vom avea nevoie de noțiunea de măsură spectrală generalizată.

**DEFINIȚIA 4.2.6.** Fie  $\mathfrak{B}^2$  familia mulțimilor boreliene în plan și  $F$  o funcție definită pe  $\mathfrak{B}^2$  cu valori în mulțimea operatorilor pozitivi definiți pe spațiul Hilbert  $H$ , cu următoarele proprietăți:

1.  $0 \leq F(\cdot) \leq I$ ,
2.  $F(\emptyset) = 0$ ,  $F(R \times R) = I$ ,

3.  $F$  este numărabil aditivă în topologia slabă a operatorilor.  $F$  se va numi măsură spectrală generalizată.

Următoarea teoremă, datorată lui Naimark, arată legătura între noțiunea de măsură spectrală și noțiunea de măsură spectrală generalizată.

**TEOREMA LUI NAIMARK.** Dacă  $F$  este o măsură spectrală generalizată pe spațiul Hilbert  $H$ , atunci există o măsură spectrală  $E$  definită într-un spațiu Hilbert  $K \supset H$  astfel ca oricare ar fi mulțimea boreliană  $\delta$ , să avem

$$F(\delta) = PE(\delta)P$$

unde  $P$  este proiecția  $K \rightarrow H$ . Spațiul  $K$  poate fi ales minimal în sensul că  $K = \{E(\delta)x, x \in H, \delta \in \mathfrak{B}^2\}$ .

**TEOREMA 4.2.7.** Fie  $F$  o mulțime în planul complex;  $F$  este mulțime spectrală pentru operatorul  $T \in \mathcal{L}(H)$  dacă și numai dacă pentru orice  $x, y \in H$  există o măsură Borel regulată  $\mu_{x,y}$  cu suportul în frontiera  $\partial F$  a mulțimii  $F$  și astfel ca

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle f(T)x, y \rangle$$

oricare ar fi  $f \in R(F)$  = algebra Banach a funcțiilor raționale cu poli în afara mulțimii  $F$  și

$$1) \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|,$$

$$2) \mu_{x,x} \geq 0, \|\mu_{x,x}\| = \|x\|^2.$$

*Demonstrație.* Să presupunem că există măsurile  $\mu_{x,y}$  cu proprietățile enunțate; în acest caz oricare ar fi  $f \in R(F)$  avem

$$\begin{aligned} \|f(T)x\|^2 &= \langle f(T)x, f(T)x \rangle = \int f d\mu_{x,f(T)x} \leq \|f\| \mu_{x,f(T)x} \leq \\ &\leq \|f\| \|x\| \|f(T)x\|, \end{aligned}$$

care ne dă că

$$\|f(T)x\| \leq \|f\| \|x\|$$

unde  $\|f\| = \sup_{\lambda \in \partial F} |f(\lambda)|$  și deci  $F$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ .

Să presupunem acum că  $F$  este o mulțime spectrală și pentru orice  $x, y \in H$  să definim

$$F_{x,y}(f) = \langle f(T)x, y \rangle$$

dacă  $f \in R(F)$ . Dacă  $f, g \in R(F)$  vom avea

$$1. F_{x,y}(f+g) = F_{x,y}(f) + F_{x,y}(g),$$

$$2. F_{x,y}(\lambda f) = \lambda F_{x,y}(f),$$

$$3. |F_{x,y}(f)| \leq \|f\|_{\partial F} \|x\| \|y\|$$

și deci  $F$  este o funcțională liniară și continuă pe  $R(F)$ ; din teorema lui Hahn-Banach-Bohnenblust-Sobczyk rezultă că  $F_{x,y}$  se poate prelungi la o funcțională, cu păstrarea normei, definită pe spațiul funcțiilor continue pe  $\partial F$  și din teorema de reprezentare a lui Riesz-Kakutani există o măsură Borel regulată  $\mu_{x,y}$  pe  $\partial F$ , astfel ca

$$|\mu_{x,y}| = \|F_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|,$$

$$\int f d\mu_{x,y} = F_{x,y}(f) = \langle f(T) x, y \rangle$$

oricare ar fi  $f \in R(F)$ . Cum avem

$$\|x\|^2 = \int 1 d\mu_{x,x} \leq |\mu_{x,x}| \leq \|x\|^2$$

teorema este demonstrată.

În studiul algebrelor Banach care au aplicații importante, un loc important îl ocupă algebrele introduse de A. Gleason sub numele de algebre Dirichlet: o algebră  $A \subset C(X)$ , unde  $X$  este un spațiu compact Hausdorff se spune că este algebră Dirichlet dacă:

- 1)  $1 \in A$ ,
- 2) separă punctele lui  $X$  și este închisă față de norma sup indusă de  $C(X)$ ,
- 3)  $\text{Re} A = \text{Re} f, f \in A$ , este densă în spațiul funcțiilor continue pe  $X$ .

Menționăm că aceste algebre au fost generalizate considerându-se algebre log-modulare, de către K. Hoffman și de către G. Lumer care a considerat algebre cu măsuri de reprezentare unice.

Pentru detalii a se vedea [207].

Are loc:

**TEOREMA 4.2.8.** Fie  $F$  o mulțime compactă în plan și cu proprietatea că  $R(F)$  este o algebră Dirichlet. Dacă  $\bar{F}$  este o mulțime spectrală pentru operatorul  $T$  atunci există o dilatare tare minimală normală  $N$  a operatorului  $T$  astfel ca  $\partial F \supset \sigma(N)$ .

*Demonstrație.* Conform teoremei 4.2.7. pentru orice  $x, y \in H$  există măsura Borel  $\mu_{x,y}$  astfel că  $\mu_{(x)} = \mu_{x,x}$  are suportul în  $\partial F$  și  $|\mu_{(x)}| = \|x\|^2$  și de asemenea

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle f(T) x, y \rangle.$$

Cum  $\mu_{(x)}$  este pozitivă rezultă că

$$\langle f(T)^* x, x \rangle = \langle x, f(T) x \rangle = \overline{\langle f(T) x, x \rangle} = \int \bar{f} d\mu_{x,x}.$$

Fie  $f \in C(\partial F)$  și deci  $f = f_1 + if_2$  când  $f_i \in C_R(\partial F)$  și să punem

$$f(T) = f_1(T) + if_2(T)$$

dacă  $f_i \in R(F)$ . Vom avea

$$\int f d\mu_{(x)} = \int f_1 d\mu_{(x)} + i \int f_2 d\mu_{(x)} = \langle f(T)x, x \rangle$$

și dacă  $x, y \in H$ , să punem

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4} [\mu_{x+y} - \mu_{x-y} + i\mu_{x+iy} - i\mu_{x-iy}].$$

Dacă  $f = f_1 + \bar{f}_2$  cu  $f_i \in R(F)$  vom avea

$$1) \int f d\mu_{x,y} = \langle f(T)x, y \rangle,$$

$$2) \int f d\mu_{x_1+x_2,y} = \int f d\mu_{x_1,y} + \int f d\mu_{x_2,y}.$$

Cum  $R(F)$  este o algebră Dirichlet, mulțimea funcțiilor de forma  $f = f_1 + \bar{f}_2$  cu  $f_i \in R(F)$  este densă în  $\mathcal{C}(\partial F)$  și deci oricare ar fi  $f \in C(\partial F)$

$$\int f d\mu_{x_1+x_2,y} = \int f d\mu_{x_1,y} + \int f d\mu_{x_2,y}.$$

Cum însă  $\mu$  este regulată deducem că

$$\mu_{x_1+x_2,y} = \mu_{x_1,y} + \mu_{x_2,y}.$$

Analog arătăm că

$$1) \mu_{x,y_1+y_2} = \mu_{x,y_1} + \mu_{x,y_2},$$

$$2) \mu_{\lambda x,y} = \lambda \mu_{x,y},$$

$$3) \mu_{x,\lambda y} = \bar{\lambda} \mu_{x,y}.$$

Din definiția măsurii  $\mu_{x,y}$  deducem că

$$\begin{aligned} \|\mu_{x,y}\| &\leq \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] = \\ &= \frac{1}{4} \|x\|^2 + \frac{1}{4} \|y\|^2 \end{aligned}$$

și deci

$$\|\mu_{x,y}\| \leq \frac{1}{4} \{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \leq \|x\| \|y\|.$$

De aici deducem că  $\mu_{x,y}(\delta)$  este o formă liniară pe  $H$  oricare ar fi  $\delta$  boreliană și deci există un operator  $F(\delta)$  pe  $H$  astfel ca

$$\langle F(\delta)x, y \rangle = \mu_{x,y}(\delta)$$

și  $\delta \rightarrow F(\delta)$  este o măsură spectrală generalizată. Conform teoremei lui Naimark există un spațiu  $K \supset H$  și o măsură spectrală  $(E(\delta))$  astfel ca

$$F(\delta) = PE(\delta)P,$$

oricare ar fi  $\delta \in \mathfrak{B}^2$  și  $K = \{E(\delta)x\}_{x \in H, \delta \in \mathfrak{B}^2}$ . Să luăm  $N = \int \lambda dE(\lambda)$  care este un operator normal și reprezintă dilatarea minimală tare normală a operatorului  $T$ . Dacă  $F(\delta) = 0$  vom avea

$$\|E(\delta)x\|^2 = \langle E(\delta)x, x \rangle = \langle F(\delta)x, x \rangle = 0$$

oricare ar fi  $x \in H$ . Cum  $K$  are forma de mai sus, rezultă că  $E(\delta)x = 0$  implică  $E(\delta) = 0$  adică suportul lui  $\delta \rightarrow E(\delta)$  și suportul lui  $\delta \rightarrow F(\delta)$  sînt aceleași. Cum suportul lui  $\delta \rightarrow F(\delta)$  este în  $\partial F$  rezultă că  $\sigma(N) \subset \partial F$ . Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și următoarea:

**TEOREMA 4.2.9.** *Fie  $F$  o mulțime compactă în plan și dacă  $F$  este o mulțime spectrală pentru operatorul  $T$  atunci există o dilatare  $N$ , tare, normală, minimală a operatorului  $T$  astfel ca  $\partial F \supset \sigma(N)$ .*

*Demonstrație.* Dacă mulțimii  $F$  îi adăugăm componentele mărginite ale complementarei vom avea o mulțime  $\tilde{F}$  care este tot mulțime spectrală pentru  $T$  și  $\partial F \supseteq \partial \tilde{F}$ . Cum  $F$  este frontiera unei mulțimi conexe nemărginite,  $R(F)$  este o algebră Dirichlet și teorema rezultă din teorema 4.2.8.

Vom da acum unele rezultate privind mulțimile spectrale și rangul numeric.

**TEOREMA 4.2.10.** *Dacă  $\overline{W(T)} = F$  este mulțime spectrală pentru  $T$  atunci  $T$  este convexoid și*

$$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)} = \overline{W(N)}$$

unde  $N$  este o dilatare tare normală a lui  $T$ .

*Demonstrație.* Să considerăm mulțimea  $\text{conv } \sigma(T)$  și cum  $\overline{W(T)}$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ , vom avea

$$\|T + I\| \leq \sup_{z \in W(T)} |z + \lambda| \leq \|T + \lambda I\|$$

și deci  $T + \lambda I$  este normaloid. Deci  $\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$ . Conform teoremei 4.2.8, există o dilatare tare normală  $N$  astfel încît  $\sigma(N) \subset \partial \text{conv } \sigma(T)$ .

Dar cum

$$\text{conv } \sigma(N) \subseteq \text{conv}(\partial \sigma(T)) = \text{conv } \sigma(T),$$

deoarece  $N$  este normal deducem că

$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)} \subseteq \overline{W(N)} = \text{conv } \sigma(N) \subseteq \text{conv } \sigma(T)$   
și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă o caracterizare cazului când  $\overline{W(T)}$  este o mulțime spectrală.

**TEOREMA 4.2.11.**  $\overline{W(T)}$  este mulțime spectrală pentru operatorul  $T$  dacă și numai dacă există o dilatare normală tare  $N$  a lui  $T$  astfel ca  $\overline{W(N)} = \overline{W(T)}$ .

*Demonstrație.* Din teorema de mai sus rezultă că condiția pusă este necesară. Să arătăm că este și suficientă. Fie  $\lambda$  suficient de mare astfel ca  $(T - \lambda I)^{-1}$  și  $(N - \lambda I)^{-1}$  există și să avem o dezvoltare Neumann. Dar atunci avem, pentru orice  $x$  din  $H$  că

$$(T - \lambda I)^{-1}x = P(N - \lambda I)^{-1}x.$$

de unde, oricare ar fi  $y \in H$ ,

$$\langle (T - \lambda I)^{-1}x, y \rangle = \langle (N - \lambda I)^{-1}x, y \rangle$$

și cum  $\overline{W(T)} = \overline{W(N)}$ ,  $\lambda$  din  $\overline{CW(T)}$ . Fie  $f \in R(W(T))$  și deci

$$\langle f(T)x, y \rangle = \langle f(N)x, y \rangle$$

sau că

$$f(T)x = Pf(N)x$$

oricare ar fi  $x \in H$ . De aici rezultă imediat că

$$\|f(T)\| \leq \|f(N)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(N)} |f(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \overline{W(N)}} |f(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \overline{W(T)}} |f(\lambda)|$$

care arată că  $\overline{W(T)}$  este o mulțime spectrală pentru  $T$  și teorema este demonstrată.

### § 3. OPERATORI CU PROPRIETATEA $G_1$

Fie  $X$  un spațiu Hilbert și  $T$  un operator liniar și mărginit, iar  $\sigma(T)$  spectrul său. Se spune că operatorul  $T$  are proprietatea  $G_1$ , dacă oricare ar fi  $z \in \rho(T) = C_{\sigma(T)}$  are loc relația

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \sigma(T))}$$

unde  $d(z, \sigma(T)) = \inf_{\lambda \in \sigma(T)} |z - \lambda|$ .

Am remarcat faptul că orice operator hiponormal și orice operator  $T$  pentru care  $T_\lambda = T - \lambda I$  este de clasă  $(N)$  oricare ar fi  $\lambda$ , are proprietatea  $G_1$ . O proprietate interesantă a acestei clase de operatori este dată în următoarea :

**TEOREMA 4.3.1.** Dacă  $T$  are proprietatea  $G_1$  atunci

$$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$$

*Demonstrație.* Vom demonstra mai întâi că spectrul unui operator arbitrar este conținut în închiderea rangului său numeric. Dacă  $\lambda$  este un punct de pe frontieră atunci  $\lambda$  este o valoare proprie aproximativă în sensul că există  $\{x_n\}$   $\|x_n\| = 1$  astfel ca  $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0$ . Deci

$$\lambda = \lim \langle Tx_n, x_n \rangle$$

și deci  $\lambda \in \overline{W(T)}$ . Să presupunem acum că  $\lambda$  este un punct arbitrar în  $\sigma(T)$  și fie  $L$  o dreaptă arbitrară care trece prin  $\lambda$  și fie  $A$  intersecția acestei drepte cu  $\sigma(T)$ . Dacă  $\mu_1$  și  $\mu_2$  reprezintă capetele celui mai mic segment care conține pe  $A$  atunci evident că  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , sînt puncte pe frontieră și conform cu observația făcută sînt în  $\overline{W(T)}$ . Dar cum, conform cu teorema lui Toeplitz-Hausdorff,  $\overline{W(T)}$ , este o mulțime convexă rezultă că  $\lambda \in \overline{W(T)}$  deoarece se află pe un segment cu capetele în  $\overline{W(T)}$ .

Deci  $\text{conv } \sigma(T) \subset \overline{W(T)}$  este adevărată oricare ar fi operatorul  $T$ . Să arătăm că dacă satisface  $G_1$ , atunci este adevărată și relația

$$W(T) \subset \text{conv } \sigma(T),$$

de unde va rezulta egalitatea.

Pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că orice semiplan care conține mulțimea  $\sigma(T)$  conține și  $\overline{W(T)}$ . Pentru aceasta, putem presupune făcînd o translație și o rotație că avem semiplanul  $\text{Re } z \leq 0$ .

Fie deci  $\text{Re } \sigma(T) \leq 0$  și să demonstrăm că și  $\text{Re } \overline{W(T)} \leq 0$ .

Fie  $x$ ,  $\|x\| = 1$  și  $Tx = (a + ib)x + y$  cu  $a, b$  reale și  $x$  ortogonal cu  $y$ . Cum  $T$  are proprietatea  $G_1$  rezultă că

$$\|(T - cI)x\| \geq d(c, \sigma(T)) \geq c$$

oricare ar fi  $c > 0$ . De aici rezultă că

$$c^2 \leq \|(T - cI)x\|^2 = (a - c)^2 + b^2 + \|y\|^2$$

de unde rezultă că  $2ac \leq a^2 + b^2 + \|y\|^2$ . Cum  $c$  este arbitrar deducem că  $\text{Re } \langle Tx, x \rangle = a \leq 0$ . Teorema este astfel demonstrată.

Din această teoremă rezultă următoarea caracterizare a operatorilor hermitici.

**TEOREMA 4.3.2.** Operatorul  $T$  este hermitic dacă și numai dacă

1.  $T$  are proprietatea  $G_1$ ,
2.  $\sigma(T)$  este în  $R$ .

*Demonstrație.* Evident condițiile sînt necesare. Suficiența rezultă din teorema de mai sus, deoarece

$$W(T) \subset \overline{W(T)} = \text{conv } \sigma(T) \subset R$$

și deci  $\langle Tx, x \rangle$  este real oricare ar fi  $x \in X$ , de unde rezultă că  $T$  este hermitic.

**TEOREMA 4.3.3.** Dacă  $T$  este cu proprietatea  $G_1$  și  $\sigma(T)$  este o mulțime finită atunci  $T$  este un operator normal.

*Demonstrație.* Fie  $\sigma(T) = \{z_1, \dots, z_n\}$  și pentru  $z_j \in \sigma(T)$  să definim

$$E_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} (T - zI)^{-1} dz,$$

care este o proiecție care comută cu  $T$ ; presupunem  $\varepsilon$  suficient de mic astfel ca în cercul  $C_\varepsilon$  să nu se găsească alt punct al spectrului în afară de  $z_j$ . Cum avem

$$\|E_j\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{C_\varepsilon} (T - zI)^{-1} dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

și deci proiectorul  $E_j$  este un operator hermitic.

Să luăm  $x \in E_j X$  și deci

$$\|(T - z_j)x\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} (z - z_j)(T - zI)^{-1} dz \right\| \leq \varepsilon$$

și pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  obținem că  $Tx = z_j x$ . Dar atunci cum  $T = \sum z_j E_j$  rezultă că  $T$  este normal și teorema este demonstrată. Din această teoremă rezultă că pe spații finite dimensionale nu există operatori cu proprietatea  $G_1$  fără să fie normali.

Următorul exemplu arată că proprietatea  $G_1$  nu se păstrează prin trecerea la subspații invariante sau chiar subspații care reduc.

Fie pentru aceasta operatorul care are matricea

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și care nu satisface proprietatea  $G_1$  (nu este un operator normal). Să considerăm un operator  $T_2$  și să formăm  $T = T_1 \oplus T_2$  astfel ca noul operator să aibă proprietatea  $G_1$ . Fie pentru aceasta  $\{f_i\}_{i=1}^\infty$  o bază ortonormală a unui spațiu Hilbert  $\tilde{H}$ . Să punem  $Tf_i = z_i f_i$  unde  $z_i$  sînt numere complexe în așa fel ca

$$\min_i |z - z_i| \leq |z|^2$$

oricare ar fi  $z$ ,  $|z| < 1$ . Este suficient ca zero să fie singurul punct de acumulare al șirului  $\{z_i\}$ . Operatorul  $T$  definit prin formula de mai sus satisface condiția  $G_1$  și este chiar compact, iar restricția sa la un subspațiu care îl reduce nu satisface condiția  $G_1$ .

Următoarea teoremă dă o informație privind relația între operatorii cu proprietatea  $G_1$  și algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $X$ . Are loc următoarea:

**TEOREMA 4.3.4.** Mulțimea  $\mathcal{G}_1$  a operatorilor cu proprietatea  $G_1$  este tare densă în  $\mathcal{L}(X)$ .

*Demonstrație.* Fie  $T$  un operator pe  $H$  și  $f_1, f_2, \dots, f_n \in H$ , iar  $M$  subspațiul generat de  $f_1, \dots, f_n$ ,  $Tf_1, \dots, Tf_n$  și  $A$  operatorul definit prin  $Af_i = Tf_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  și 0 pentru orice element ortogonal pe  $f_1, \dots, f_n$ . Să considerăm un operator normal  $N$  pe  $M^\perp$  ( $\dim M^\perp = \infty$ ) astfel ca  $\sigma(N) =$

$= \{z, |z| \leq 1, \|A\|\}$  și cum rangul numeric al lui  $N$  este conținut în  $\sigma(N)$  deducem că  $A \oplus N$  satisface proprietatea  $G_1$ . Cum însă  $A \oplus N$  coincide cu  $T$  pe  $f_1, \dots, f_n$ , deducem că orice vecinătate tare a lui  $T$  conține un operator cu proprietatea  $G_1$  și deci teorema este demonstrată.

Fie  $T$  un operator definit pe spațiul Hilbert  $H$ , iar  $\xi$  un număr complex. Să punem

$$E_\xi(T) = \{x, Tx = \xi x\}.$$

Vom da următoarea :

DEFINIȚIA 4.3.5. Numărul  $\xi$  se numește valoare normală dacă

$$E_\xi(T) = E_{\bar{\xi}}(T^*).$$

Vom remarca faptul că dacă  $T$  este o contracție și  $\xi, |\xi| = 1, \sigma_p(T) \ni \xi$ , atunci  $\xi$  este o valoare proprie normală.

DEFINIȚIA 4.3.6. Prin  $A_\xi(T)$  vom însemna mulțimea tuturor șirurilor  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  cu proprietatea că

$$Tx_n - \xi x_n \rightarrow 0$$

și vom spune că în acest caz  $\xi$  este o valoare proprie aproximativă.  $\xi$  va fi o valoare proprie aproximativă normală dacă

$$A_\xi(T) = A_{\bar{\xi}}(T^*).$$

Este clar că orice punct  $\xi, |\xi| = 1, \sigma(T) \ni \xi$  cu  $T$  contracție este o valoare proprie aproximativă.

Este evident că pentru cazul operatorilor normali orice valoare proprie aproximativă normală și orice valoare proprie este de fapt o valoare proprie normală.

Vom da acum o teoremă care dă condiții suficiente pentru existența valorilor proprii și a valorilor proprii aproximative normale.

TEOREMA 4.3.7. Fie  $T$  un operator liniar și  $F$  o mulțime închisă,  $F \supset \sigma(T)$ , iar  $T$  are proprietatea că pentru orice  $z \in C_F$

$$(*) \quad \|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, F)} = \frac{1}{\inf_{y \in F} |z - y|}.$$

Dacă  $\xi$  este în  $\partial F$  și există un șir de cercuri  $\{D_n\}$

$$D_n = \{\lambda, |\lambda - \alpha_n| < r_n\}$$

situate în  $C_F$  și avînd proprietățile:

$$(\tilde{*}) \quad \begin{aligned} &1. \alpha_n \rightarrow \xi, \\ &2. r_n^{-1} |\alpha_n - \xi| \rightarrow 1, \end{aligned}$$

și dacă  $\xi$  nu este în spectrul rezidual al lui  $T$ , atunci  $\xi$  este valoare proprie normală sau valoare proprie aproximativă normală.

Demonstrație. Fie  $\{x_n\}$  un șir cu proprietățile :

$$\begin{aligned} &1. \|x_n\| = 1, \\ &2. T^*x_n - \bar{\xi}x_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Cum  $\alpha_k \in \sigma(T)$  oricare ar fi  $k$  rezultă că operatorii  $T_k = r_k(T - \alpha_k I)^{-1}$  există și sînt în  $\mathcal{E}(X)$ . Mai avem însă relația

$$\|T_k^* x_k - \bar{\xi}_k x_n\| \rightarrow 0$$

unde  $\xi_k = r_k(\xi - \alpha_k)^{-1}$ . Cum  $T$  are proprietatea (\*) rezultă că

$$\|T_k\| = r_k \|(T - \alpha_k I)^{-1}\| \leq \frac{r_k}{d(\alpha_k, I)} \leq 1$$

și deci  $T_k$  sînt operatori contracție. Fie  $U_k$  o dilatare unitară pentru  $T_k$ . Vom avea

$$\begin{aligned} (**) \quad & \| (T_k - \xi_k I) x_n \|^2 = \| P(U_k - \xi_k) x_n \|^2 \leq \\ & \leq \| (U_k - \xi_k) x_n \|^2 = \| U_k^* - \bar{\xi} \| x_n \|^2 = I - |\xi_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \xi_k \langle (T_k^* - \bar{\xi}_k) x_n, x_n \rangle \leq \\ & \leq 1 - |\xi_k|^2 + 2 |\xi_k| \| (T_k^* - \bar{\xi}_k I) x_n \|. \end{aligned}$$

Dar cum  $T_k - \xi_k I = r_k(T - \alpha_k I)^{-1}(\xi I - T)(\xi - \alpha_k)^{-1}$  și deci

$$\begin{aligned} & \| (T_k - \xi_k I) x_n \| = r_k^{-1} \| (\xi - \alpha_k)(T - \alpha_k I)(T_k - \alpha_k I) x_n \| \leq \\ & \leq r_k^{-1} |\xi - \alpha_k| (\|T\| + |\alpha_k|) \| (T_k - \xi_k I) x_n \| \leq \\ (***) \quad & \leq c r_k^{-1} |\xi - \alpha_k| (1 - |\xi_k|^2 + 2 |\xi_k| \| (T_k^* - \bar{\xi}_k I) x_n \|)^{1/2} = \\ & = c (r_k^{-1} |\xi - \alpha_k|^2 - 1 + 2 r_k^{-1} |\xi - \alpha_k| \| (T_k^* - \bar{\xi}_k I) x_n \|)^{1/2} \end{aligned}$$

unde  $c > 0$ . Dacă  $\varepsilon > 0$  este dat, din (\*\*) rezultă că există  $k$  astfel ca

$$0 \leq (r_k^{-1} |\xi - \alpha_k|)^2 - 1 < (\varepsilon/2c)^2.$$

Pentru acest  $k$  există  $N > 0$  astfel ca

$$2 r_k^{-1} |\xi - \alpha_k| \| (T_k^* - \bar{\xi}_k I) x_n \| \leq (\varepsilon/2c)^2, \quad n > N.$$

De aici rezultă că

$$\| (T - \xi I) x_n \| < \varepsilon$$

și cum  $\varepsilon$  este arbitrar rezultă că  $\xi$  este valoare proprie aproximativă normală. Cazul cînd  $\xi$  este valoare proprie este evident acum.

Fie  $\xi$  în spectrul rezidual și deci  $\bar{\xi} \in \sigma_p(T^*)$  adică există  $x$  astfel ca

$$T^* x = \bar{\xi} x$$

și dacă ar fi valoare proprie normală am avea că  $\xi \in \sigma_p(T)$  care este o contradicție. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă următoarea:

**TEOREMA 4.3.8.** *Dacă  $F$  este o mulțime spectrală pentru  $T$  și  $\xi \in \partial F$ , iar  $\{D_n\}$  un șir de discuri,  $D_n = \{\alpha, |\alpha - \alpha_n| < r_n\}$  situate în  $C_F$  și satisfăcând proprietatea (\*) atunci  $\xi \notin \sigma_r(T)$ .*

*Demonstrație.* Cum în acest caz  $T$  satisface condiția  $(G_1)$  afirmația este evidentă. Pentru rezultatul care urmează vom avea nevoie de noțiunea de punct semibară.

**DEFINIȚIA 4.3.9.** Fie  $F$  o mulțime închisă în planul complex, un punct  $\xi \in F$  se numește punct semibară dacă există un cerc care trece prin  $\xi$  și nu are în interior puncte din  $F$ .

**TEOREMA 4.3.10.** *Dacă  $T$  este un operator hiponormal atunci mulțimea punctelor semibară din  $\sigma(T)$  nu intersectează spectrul rezidual  $\sigma_r(T)$ .*

*Demonstrație.* Fie  $\xi \in \sigma(T)$  și care este de asemenea punct bară. În acest caz există  $\alpha_0 \in \sigma(T)$  astfel ca

$$|\xi - \alpha_0| = \alpha(\alpha_0, \sigma(T))$$

$\alpha_0$  care este în fapt centrul cercului din definiția 4.3.9. și fie  $\{\alpha_n\}$  un șir de puncte pe dreapta care trece prin  $\xi$  și  $\alpha_0$  astfel ca să aibă loc relația

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < |\alpha_n - \xi| < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

În acest caz  $D_n = \{\lambda, |\lambda - \alpha_n| < r_n\}$  cu  $r_n = |\alpha_n - \xi| - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  este în  $C_{\sigma(T)}$  și

1.  $\alpha_n \rightarrow \xi$
2.  $r_n^{-1} |\alpha_n - \xi| \rightarrow 1$

deci putem aplica rezultatul obținut mai sus. Teorema este demonstrată.

Vom arăta acum că proprietatea de mai sus este adevărată pentru operatori cu proprietatea  $G_1$ .

**TEOREMA 4.3.11.** *Dacă  $T$  este un operator cu proprietatea  $G_1$  atunci intersecția mulțimii punctelor semi bară  $B_s$  cu spectrul rezidual este vidă.*

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că dacă  $\lambda \in \sigma(T)$  și  $|\lambda| = \|T\|$ , atunci  $\lambda$  are proprietatea că există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$$

și dacă  $\lambda$  are proprietatea de mai sus, iar  $T^{-1}$  există atunci și  $\lambda^{-1}$  are aceeași proprietate.

Să presupunem acum că afirmația teoremei este falsă. Deci există un punct  $\alpha$  semibară care este și în spectrul rezidual. Deci există  $\beta$  astfel ca  $|\alpha - \beta| = d(\alpha, \sigma(T))$  și cum  $\beta \in \sigma(T)$ ,  $(T - \beta I)^{-1}$  există și este în  $\mathcal{L}(X)$ . Dar  $T$  satisface proprietatea  $G_1$  și deci

$$\|(T - \beta I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\alpha - \beta|}$$

dar, din „spectral mapping theorem” rezultă că

$$|\alpha - \beta|^{-1} \leq \|(T - \beta I)^{-1}\|$$

și deci avem că  $|\alpha - \beta|^{-1} = \|(T - \beta I)^{-1}\|$ . De aici rezultă că există  $\{x_n\}$  astfel ca

$$(T - \beta I)^{-1}x_n - \frac{1}{\alpha - \beta}x_n \rightarrow 0$$

sau că

$$x_n - \frac{1}{\alpha - \beta}(T - \beta I)x_n \rightarrow 0$$

adică

$$(\alpha - \beta)x_n - (T - \beta I)x_n \rightarrow 0$$

care ne dă că  $(T - \alpha I)x_n \rightarrow 0$  adică  $\alpha \in \sigma_{ap}(T)$  unde  $\sigma_{ap}$  înseamnă spectrul aproximativ al lui  $T$  și aceasta este o contradicție. Teorema este demonstrată.

În rezultatul pe care-l vom da intervine noțiunea de curbă convexă pe care o reamintim în următoarea:

**DEFINIȚIA 4.3.12.** O curbă este convexă dacă și numai dacă este frontiera unei mulțimi convexe.

**TEOREMA 4.3.13.** Fie  $T$  cu proprietatea  $G_1$  și  $\partial\sigma(T)$  o curbă convexă pe care o notăm cu  $c$ . În acest caz  $\xi \in c$  este sau valoare proprie aproximativă normală.

*Demonstrație.* Este clar că orice punct  $\xi \in c$  este un punct semibară și deci există un șir de discuri  $\{D_n\}$  care satisface condițiile de mai sus și deci obținem afirmația teoremei.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente privind valorile proprii normale sau valorile proprii aproximative normale.

**TEOREMA 4.3.14.** Dacă  $\xi \in \sigma(T) \cap \partial W(T)$  atunci  $\xi$  este valoare proprie aproximativă normală sau valoare aproximativă normală.

*Demonstrație.* Printr-o translație, putem presupune, fără a restringe generalitatea că  $\xi = 0$  și deci există  $\{x_n\}$  astfel ca

$$1. \|Tx_n\| \rightarrow 0, \quad 2. \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$$

Cum  $\langle (\operatorname{Re} T)x_n, x_n \rangle = \operatorname{Re} \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$  deducem că

$$\|(\operatorname{Im} T)x_n\| \leq \|Tx_n\| + \|(\operatorname{Re} T)x_n\| \rightarrow 0$$

și deci

$$\|T^*x_n\| = \|(\operatorname{Re} T)x_n - i(\operatorname{Im} T)x_n\| \leq$$

$$\leq \|(\operatorname{Re} T)x_n\| + \|(\operatorname{Im} T)x_n\| \rightarrow 0$$

și deci  $A_{\xi}(T) \subseteq A_{\xi}(T^*)$ . Similar are loc relația  $A_{\xi}(T^*) \subseteq A_{\xi}(T)$  de unde egalitatea lor. Similar se procedează pentru valori proprii.

O generalizare naturală a operatorilor cu proprietatea  $G_1$  poate fi dată considerând că această proprietate poate fi îndeplinită local.

**DEFINIȚIA 4.3.15.** Se spune că operatorul  $T \in \mathcal{L}(X)$  satisface condiția  $G_1$  local dacă există o vecinătate deschisă a lui  $\sigma(T)$ ,  $U$  pentru care are loc relația

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \sigma(T))}$$

oricare ar fi  $z \in U - \sigma(T)$ .

Vom nota clasa operatorilor cu proprietatea din definiția 4.3.15 prin  $G_1^{\text{loc}}$ .

Fie  $H$  și  $K$  două spații Hilbert, iar  $H \oplus K$  suma lor directă, iar  $A$  un operator arbitrar din  $\mathcal{L}(H)$ , iar  $N$  un operator normal pe  $K$ . În acest caz putem considera operatorul  $A \oplus N$ .

Are loc următoarea :

**TEOREMA 4.3.16.** Operatorul  $T$  este în  $G_1^{\text{loc}}$  când  $N$  este un operator normal și  $\sigma(N) \subset U$ , unde  $U$  este o vecinătate deschisă a mulțimii  $\sigma(A)$ .

*Demonstrație.* Fie  $T = A \oplus N$  și atunci evident că  $\sigma(A) \cup \sigma(N) = \sigma(T) = \sigma(N)$ . Dacă  $z \in \rho(T)$  atunci

$$\|R(z, T)\| = \max \{ \|R(z, A)\|, \|R(z, N)\| \} =$$

$$= \max \left\{ \|R(z, A)\|, \frac{1}{d(z, \sigma(T))} \right\},$$

deoarece  $N$  este un operator normal. Cum există  $U$  deschisă cu proprietatea că

$$\sigma(N) \supset U \supset \sigma(A)$$

există o mulțime deschisă  $V$ ,  $V \supset \sigma(N) = \sigma(T)$  astfel ca pentru orice  $z \in U - \sigma(T)$

$$\|R(z, T)\| \leq \frac{1}{d(z, \sigma(T))}$$

și deci  $T \in G_1^{\text{loc}}$ . Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 4.3.17.** Dacă  $T \in G_1^{\text{loc}}$  atunci orice punct izolat din  $\sigma(T)$  este o valoare proprie normală.

*Demonstrație.* Pentru  $\varepsilon > 0$  să luăm un cerc  $C_{\varepsilon}$  care să conțină în interior numai punctul  $\lambda_0$  și raza cercului să fie  $< \varepsilon$ . Să definim

$$E_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\varepsilon}} (T - zI)^{-1} d\lambda$$

care este un proiector. Cum  $T \in G_1^{\text{loc}}$ , vom arăta că  $E_{\lambda_0}$  este hermitic.

În adevăr

$$\|E_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{c_\varepsilon} (T - zI)^{-1} dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon \cdot 2\pi \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

și afirmația este demonstrată. Tot din condiția  $G_1^{\text{loc}}$  deducem că pentru  $x \in E_{\lambda_0} X$  avem că

$$Tx = \lambda_0 x.$$

În adevăr, vom avea

$$\|(T - \lambda_0)x\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{c_\varepsilon} (z - \lambda_0)(T - zI)^{-1} x dz \right\| \leq \varepsilon$$

și pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  obținem relația cerută. Cum avem

$$\|R(z, T)\| = \|R(z, T^*)\|$$

afirmația că  $\lambda_0$  este valoare proprie normală este demonstrată.

Din această teoremă rezultă că pe spații finit-dimensionale mulțimea  $G_1^{\text{loc}}$  coincide cu mulțimea operatorilor normali.

Teorema următoare dă informații privind relația între mulțimea  $G_1^{\text{loc}}$  și mulțimea operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

**TEOREMA 4.3.18.** *Există un operator în  $G_1^{\text{loc}}$  și nu este cu proprietatea  $G_1$ .*

*Demonstrație.* Fie  $A$  operatorul definit pe un spațiu finit-dimensional  $M$  cu matricea  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și în acest caz  $W(A) = \{z, |z| \leq 1\}$  după cum se putea vedea ușor. Fie  $N$  un operator pe spațiul  $M^\perp$  ( $M$  poate fi un subspațiu 2 dimensional al unui spațiu Hilbert, ceea ce noi vom presupune). Fie  $N$  cu proprietatea că  $\sigma(N) = \{z, |z| \leq 1/2\}$ . În acest caz conform teoremei de mai sus  $T = A \oplus N \in G_1^{\text{loc}}$ , dar  $\|R(1, T)\| > \frac{1}{d(1, \sigma(T))}$ .

Teorema este demonstrată.

O proprietate importantă a operatorilor cu proprietatea  $G_1$  este că  $\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$ ; vom arăta acum că această proprietate nu are loc pentru  $G_1^{\text{loc}}$ . Este suficient să remarcăm că operatorul din teorema de mai sus satisface relația  $\text{conv } \sigma(T) \neq \overline{W(T)}$ .

Se poate arăta că mulțimea  $G_1^{\text{loc}}$  nu este nici închisă și nici deschisă. Pentru alte proprietăți a se vedea [325], [326], [327].

O altă generalizare a operatorilor cu proprietatea  $G_1$  poate fi dată considerând rangul numeric.

**DEFINIȚIA 4.3.19.** Un operator  $T$  este în clasa  $R$  dacă oricare ar fi  $z \in \sigma(T)$  are loc relația

$$\|R(z, T)\| = \|(T - zI)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, W(T))}.$$

Am văzut mai înainte că pentru orice operator are loc relația

$$\frac{1}{d(z, \sigma(T))} = \|(T - zI)^{-1}\|; \quad z \notin \sigma(T)$$

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, W(T))}; \quad z \in \overline{W(T)}.$$

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorului din clasa  $R$ .

**TEOREMA 4.3.20.** *Operatorul  $T$  este în  $R$  dacă și numai dacă*

$$\partial W(T) \subseteq \sigma(T).$$

*Demonstrația.* Să presupunem că  $\partial W(T) \subseteq \sigma(T)$  și fie  $z \in \overline{W(T)}$ . În acest caz avem că  $d(z, \sigma(T)) = d(z, W(T))$  și deci

$$\frac{1}{d(z, W(T))} = \frac{1}{d(z, \sigma(T))} \leq \|R(z, T)\| \leq \frac{1}{d(z, W(T))}$$

de unde rezultă că  $T \in R$ .

Fie acum  $T \in R$  și  $z_0 \in \partial W(T)$ . În acest caz există  $\{z_n\}$ ,  $|z_n - z_0| \rightarrow 0$ ,  $d(z_n, W(T)) > 0$  oricare ar fi  $n = 1, 2, 3, \dots$ . În acest caz însă

$$\|R(z_n, T)\| = \frac{1}{d(z_n, W(T))} \rightarrow \infty$$

și deci  $z_0 \in \sigma(T)$ . Teorema este demonstrată.

Este clar că din această teoremă rezultă că pentru un operator din  $R$  avem că

$$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$$

și că dacă  $\sigma(T)$  este o mulțime finită atunci  $T$  este un multiplu al operatorului  $I$ .

Cum prima afirmație este evidentă din teorema 4.3.20, vom arăta cum se obține ceea ce a doua. Conform teoremei lui Toeplitz-Hausdorff,  $W(T)$  este o mulțime convexă și relația  $\partial W(T) \subset \sigma(T)$  ne arată că  $\sigma(T)$  trebuie să conțină exact un punct  $\alpha$  și în acest caz  $\sigma(T) = W(T) = \{\alpha\}$  de unde

$$\langle Tx, x \rangle = \alpha \|x\|^2,$$

oricare ar fi  $x \in X$  și deci  $T = \alpha I$ .

Are loc :

**TEOREMA 4.3.21.** *Există un operator  $T$  cu proprietatea că*

$$\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$$

și care nu este în  $R$ .

*Demonstrație.* Putem lua ca exemplu un operator nenormal pe un spațiu finit-dimensional al cărui spectru conține cel puțin două puncte și evident că nu este în  $R$ .

Următoarea teoremă dă unele proprietăți topologice ale clasei de operatori  $R$ .

**TEOREMA 4.3.22.**  $R$  are următoarele proprietăți :

- 1° este convexă prin arce,
- 2° este închisă,
- 3° este nicăieri densă.

*Demonstrație.* Fie  $T \in R$  și în acest caz este evident că pentru orice  $\alpha$ , operatorul  $T_\alpha = \alpha T \in R$  și deci prima afirmație este evidentă.

Fie acum  $\{T_n\} \subset R$  și  $T_n \rightarrow T$  în normă. În acest caz  $W(T_n) \rightarrow W(T)$  în metrica lui Hausdorff-Pompeiu și deci dacă  $z \in \overline{W(T)}$  există  $N$  astfel că dacă  $n \geq N$ ,  $z \in W(T_n)$ . În acest caz însă

$$\|R(z, T_n)\| = \frac{1}{d(z, W(T_n))} \rightarrow \frac{1}{d(z, W(T))}.$$

Să alegem pe  $N$  așa fel că dacă  $n \geq N$

$$\|(T - T_n) R(z, T_n)\| < 1$$

și cum

$$R(z, T) = [I - (T - T_n) R(z, T_n)]^{-1} R(z, T_n),$$

iar

$$(T - T_n) R(z, T_n) \rightarrow 0$$

vom avea că

$$\|R(z, T)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - (T - T_n) R(z, T_n))\|^{-1} \|R(z, T_n)\| = \frac{1}{d(z, W(T))}$$

și deci  $R$  este închisă.

Afirmația 3° rezultă din următoarea teoremă:

**TEOREMA 4.3.23.** Mulțimea operatorilor  $T$ , operatori normali este nicăieri densă în mulțimea operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

Să arătăm mai întâi cum se obține din această teoremă afirmația 3°. Din rezultatele expuse mai înainte  $R$  este o submulțime închisă a unei mulțimi nicăieri densă și deci  $R$  va fi de asemenea nicăieri densă și teorema 4.3.21 este complet demonstrată.

Să demonstrăm acum teorema 4.3.22.

Se poate arăta că mulțimea operatorilor cu proprietatea că

$$(*) \quad \text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$$

este închisă și pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că are interiorul vid în mulțimea operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

Fie deci  $T$  cu proprietatea (\*) și  $\varepsilon > 0$ . Dacă  $T$  are o valoare proprie cu multiplicitatea infinită, putem presupune că această valoare proprie este zero și fie  $M$  spațiul corespunzător, adică  $Tx = 0$ ,  $x \in M$ . În acest caz  $\dim M = \infty$  și  $M$  reduce pe  $T$ . În acest caz  $T = B \oplus Z$  unde  $Z$  este operatorul zero pe  $T$ .

Fie

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus N,$$

unde  $S$  este astfel ca să aibă proprietatea  $G_1$  pe  $M$  cu  $N$  un operator normal, astfel ca

$$\sigma(N) = W \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În acest caz  $B \oplus S$  este fără proprietatea  $G_1$  și

$$\|T - B \oplus S\| = \|S\| = \varepsilon,$$

de unde rezultă că  $T$  nu este în interiorul mulțimii operatorilor cu proprietatea  $\text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$  în mulțimea operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

Dacă  $\sigma(T)$  este finită și  $T$  este cu proprietatea din teoremă atunci  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$  și  $T$  are o valoare proprie de multiplicitate infinită.

Putem presupune că  $\sigma(T)$  este infinită și că zero este un punct de acumulare al lui  $\sigma(T)$ . Fie  $C_\varepsilon$  un cerc în jurul originii cu rază  $\varepsilon/2$  și dacă  $\{E_\varepsilon\}$  este măsura spectrală să punem

$$T = \int z dE_z,$$

iar  $M = (E(D_\varepsilon))H$ ,  $P = \sigma - D_\varepsilon$  cu

$$A = \int_P z dE_z.$$

În acest caz  $M$  reduce pe  $T$ ,  $\dim M = \infty$  și  $A$  este un operator normal.

Dacă  $Z$  este un operator zero pe  $M$  atunci  $A \oplus Z$  este normal cu zero valoare proprie de multiplicitate infinită și

$$\|T - A \oplus Z\| = \left\| \int_{D_\varepsilon} z dE_z \right\| \leq \varepsilon/2.$$

Din prima parte a demonstrației rezultă că există un operator fără proprietatea  $G_1$ ,  $S$  astfel ca

$$\|S - A \oplus Z\| < \varepsilon/2$$

și deci

$$\|T - S\| \leq \|T - A \oplus Z\| + \|S - A \oplus Z\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Deci, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ ,  $T$  nu este conținut în interiorul mulțimii operatorilor normali ca submulțime a operatorilor cu proprietatea  $G_1$  și deci interiorul mulțimii operatorilor normali este vid ca submulțime a operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

**TEOREMA 4.3.24.** *Dacă  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$  satisface condiția*

$$\|R(z, T)\| = \frac{1}{d(z, W(T))}$$

*oricare ar fi  $z \in U - \overline{W(T)}$ , unde  $U$  este o mulțime deschisă care conține pe  $\overline{W(T)}$ , atunci  $T \in R$ .*

*Demonstrație.* Fie  $z_0 \in \partial W(T)$  și deci există  $z_n \in U - \overline{W(T)}$  astfel ca  $z_n \rightarrow z_0$  și  $|z - z_0| = d(z_n, W(T))$ . În acest caz

$$\|R(z_n, T)\| = \frac{1}{d(z_n, W(T))} \rightarrow \infty$$

și deci  $z_0 \in \sigma(T)$ . Din teorema de caracterizare a operatorilor din clasa  $R$ , teorema 4.3.20, rezultă că  $T \in R$ . Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă dă o metodă de construcție a operatorilor din clasa  $R$ .

**TEOREMA 4.3.25.** *Dacă  $A$  este un operator definit pe spațiul Hilbert  $H$ , iar  $N$  este un operator normal pe spațiul Hilbert  $K$  cu  $\sigma(N) \supset \partial W(A)$  atunci operatorul  $A \oplus N$  este în  $R$ .*

*Demonstrație.* Fie  $T = A \oplus N$  și cum  $W(A) \subseteq W(N)$  rezultă că

$$W(T) = \text{conv}(W(A) \cup W(N)) = W(N),$$

de unde rezultă că pentru  $z \notin \sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(N)$

$$\|R(z, N)\| = \frac{1}{d(z, \sigma(N))} = \frac{1}{d(z, W(T))}.$$

Deci cum

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{1}{d(z, W(A))} \leq \frac{1}{d(z, W(T))}$$

vom avea că

$$\begin{aligned} \|R(z, T)\| &= \max \{ \|R(z, A)\|, \|R(z, N)\| \} = \\ &= \max \left\{ \|R(z, A)\|, \frac{1}{d(z, W(T))} \right\} = \frac{1}{d(z, W(T))} \end{aligned}$$

și deci  $T \in R$ . Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă arată că clasa operatorilor din  $R$  nu este închisă față de anumite operații.

TEOREMA 4.3.26. *Există  $T \in R$  astfel încât:*

- 1°  $T^2 \notin R$ ,
- 2°  $\gamma_T \leq \|T\|$ ,
- 3°  $T^{-1}$  există și  $T^{-1} \in R$ .

*Demonstrație.* Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , iar  $N$  un operator normal cu  $\sigma(N) = W(A)$  și să punem  $T = A \oplus D$ . Din teorema 4.3.24 rezultă că  $T \in R$ . Însă

$$W(A) = \{z, |1 - z| \leq 1/2\}$$

și

$$W(A^2) = \{z, |z - 1| \leq 1\}$$

Deci  $0 \in W(A^2) \leq W(T^2)$  și  $0 \in \text{conv } \sigma(T^2) = \text{conv } \sigma(T)^2$ , de unde  $\text{conv } \sigma(T^2) \neq W(T^2)$  și deci  $T^2 \notin R$ .

Prima afirmație este demonstrată.

A doua rezultă din faptul că

$$\|T\| = (3/2 + \sqrt{5/2})^{1/2},$$

$$\gamma_T = 3/2.$$

Dacă  $T^{-1} \in R$  atunci

$$\|T^{-1}\| = \|R(T^{-1}, 0)\| = \frac{1}{d(0, W(T^{-1}))}$$

și cum  $\frac{1}{d(0, W(T^{-1}))} = 2 > \|T\|$  care este o contradicție.

Teorema este demonstrată.

#### § 4. OPERATORI CU PROPRIETATEA $\text{Re } \sigma(T) = \sigma(\text{Re } T)$

Fie  $T$  un operator liniar și mărginit pe spațiul Hilbert  $H$ ; este cunoscut că pentru orice funcție rațională cu poli în afara mulțimii  $\sigma(T)$  are loc relația

$$(1) \quad \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

cunoscută și sub numele de „spectral mapping theorem”. Dacă  $T$  este însă un operator normal, pentru orice polinom  $p(\lambda, \bar{\lambda})$  are loc relația

$$(2) \quad \sigma(p(T, T^*)) = \{p(\lambda, \bar{\lambda}), \lambda \in \sigma(T)\}$$

după cum rezultă din descompunerea spectrală. (Această relație se poate demonstra și fără utilizarea descompunerii spectrale după cum au arătat Bernau și Whitley).

În particular dacă  $p(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda})$  și  $T$  este normal avem

$$(3) \quad \operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T).$$

Este ușor de văzut că această proprietate nu are loc pentru orice operator definit pe  $H$ . Să considerăm, de exemplu operatorul

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

care are proprietatea că  $T^2 = 0$  și deci  $\sigma(T) = 0$ . Dacă ar avea loc relația de mai înainte  $\operatorname{Re} T$  ar fi zero, ceea ce nu este adevărat.

Apare astfel natural problema claselor de operatori pentru care relația (3) este adevărată.

Următoarea teoremă arată unele clase de operatori care au proprietatea (3).

**TEOREMA 4.4.1.** *Dacă  $T$  este un operator pe spațiul Hilbert  $H$  și una din următoarele condiții este satisfăcută, atunci  $T$  are proprietatea (3):*

1.  $T$  este hiponormal;
2.  $T^*$  este hiponormal;
3.  $\sigma(T)$  este mulțime spectrală pentru  $T$ ;
4.  $T$  are proprietatea  $G_1$  și  $\sigma(T)$  este conexă.

Demonstrația teoremei va rezulta din câteva leme care au și interes intrinsec.

**LEMA 4.4.2.** *Fie  $T \in \mathcal{L}(X)$ ; atunci există un spațiu  $K$  astfel ca orice  $T \in \mathcal{L}(X)$  determină un operator  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(K)$  cu proprietatea că*

$$\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(\tilde{T}) = \sigma_p(\tilde{T}).$$

*Demonstrație.* Fie  $X$  spațiul Hilbert pe care este definit operatorul  $T$  și să considerăm  $\mathfrak{B}$  spațiul tuturor șirurilor  $x = (x_i)$   $x_i \in X$ , astfel ca  $\|x_i\| < M < \infty$  care se poate organiza ca spațiu vectorial în mod natural.

Fie  $x, y \in \mathfrak{B}$  și cum

$$|\langle x_n, y_n \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n\|$$

rezultă că  $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$  este un șir de numere complexe mărginit. Să considerăm o limită Banach „glim” pe spațiul șirurilor mărginite de numere complexe care are următoarele proprietăți:

1.  $\operatorname{glim} (\lambda_n + \mu_n) = \operatorname{glim} \lambda_n + \operatorname{glim} \mu_n$ ,
2.  $\operatorname{glim} (\lambda \lambda_n) = \lambda \operatorname{glim} \lambda_n$ ,
3.  $\operatorname{glim} \lambda_n = \lim \lambda_n$ , dacă  $\{\lambda_n\}$  are limită
4.  $\operatorname{glim} \lambda_n \geq 0$ , dacă  $\lambda_n \geq 0$ .

Vom defini

$$\varphi(x, y) = \lim \langle x_n, y_n \rangle$$

care este o formă biliniară simetrică pe  $H \times H$ , are loc relația

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y)$$

și să punem  $N = \{x, \varphi(x, x) = 0\}$  care este astfel un subspațiu al lui  $\mathfrak{B}$ .

Să punem  $P = \mathfrak{B}/N$  spațiul cît care este un spațiu cu produs scalar care poate să nu fie complet și să notăm cu  $K$  completatul său. Evident că spațiul  $X$  poate fi considerat ca subspațiu al lui  $P$  și anume al elementelor de forma

$$\{x + n\}, \quad n \in N,$$

adică dat de aplicația

$$x \rightarrow \{x + n\}_{n \in N}.$$

Orice operator  $T \in \mathfrak{L}(X)$  induce un operator în  $K$  prin

$$T_0 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B},$$

$$T_0(x) = \{Tx_n\}$$

și cum  $\varphi(T_0 x, T_0 x) \leq \|T\|^2 \varphi(x, x)$  și deci invariază spațiul  $N$ . În acest mod

$$\{x_n\} \rightarrow \{Tx_n\}$$

este bine definită. Aceasta induce în completat un operator bine definit,  $\tilde{T}_0$  și are proprietatea

$$\|\tilde{T}_0\| \leq \|T\|.$$

Aplicația  $T \rightarrow \tilde{T}_0$  este un omomorfism al spațiului  $\mathfrak{L}(X)$  și  $\mathfrak{L}(K)$  cu proprietatea  $T \geq 0 \Rightarrow \tilde{T}_0 \geq 0$ .

Evident că  $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(\tilde{T}_0) \subset \sigma_p(\tilde{T}_0)$  deoarece pentru  $\varepsilon > 0$

$$(T - \mu I)^* (T - \mu I) \geq \varepsilon \Rightarrow (\tilde{T}_0 - \mu I)^* (\tilde{T}_0 - \mu I) \geq \varepsilon I$$

și ultima relație este clară. Fie acum  $\{x_n\}$  în  $X$ , astfel ca

$$\|Tx_n - \mu x_n\| \rightarrow 0$$

și fie  $\{x_n\} = x$  atunci evident  $\|x\| = 1$  și  $\tilde{T}_0 x - \mu x = 0$  adică  $\mu \in \sigma_p(T_0)$ .

Lema este demonstrată. Vom observa că  $W(\tilde{T}_0)$  este o mulțime închisă.

LEMA 4.4.3. Fie  $T$  un operator hiponormal, atunci  $\operatorname{Re} \sigma_{ap}(T) \subset \sigma \operatorname{Re}(T)$ .

*Demonstrație.* Fie  $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma_{ap}(T)$  și deci există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\|=1$  astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$$

și cum  $T$  este hiponormal avem și relația

$$T^* x_n - \bar{\lambda} x_n \rightarrow 0,$$

de unde rezultă că

$$\operatorname{Re} Tx_n - \alpha x_n = \frac{1}{2} (T + T^*) x_n - \frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda}) x_n \rightarrow 0$$

și deci  $\alpha \in \sigma_{ap}(\operatorname{Re} T) \subset \sigma(\operatorname{Re} T)$ .

LEMA 4.4.4. Dacă  $T$  sau  $T^*$  este hiponormal atunci  $\operatorname{Re} \sigma(T) \subset \sigma \operatorname{Re}(T)$ .

*Demonstrație.* Putem presupune că  $T$  este hiponormal și fie  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ . Linia verticală  $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \lambda_0$  taie spectrul într-un punct frontieră  $\mu$ . Cum  $\partial \sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$  rezultă că  $\operatorname{Re} \lambda_0 = \operatorname{Re} \mu \in \sigma \operatorname{Re}(T)$  din lema 4.4.3, și lema este demonstrată.

LEMA 4.4.5. Dacă  $T$  este normal, atunci

$$\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma \operatorname{Re} T.$$

*Demonstrație.* Din teorema de reprezentare spectrală.

Vom demonstra acum că dacă  $T$  este hiponormal sau  $T^*$  este hiponormal atunci afirmația din teoremă este adevărată.

Conform cu lema 4.4.1 putem presupune, fără a restringe generalitatea că  $\sigma(H) = \sigma_p(H)$ . Fie  $T = H + iJ$  și fie  $\alpha \in \sigma(H)$ , iar

$$M = N(H - \alpha I).$$

Cum  $\alpha$  este valoarea proprie  $M \neq \{0\}$ . Vom arăta mai întâi că  $M$  este invariant pentru  $J$ . Fie deci  $x \in M$  și  $Hx = \alpha x$ . Cum  $T$  este hiponormal avem

$$(H - \alpha I)J - J(H - \alpha I) = -\frac{1}{2}iD$$

și deci

$$-\frac{1}{2}i \langle Dx, x \rangle = \langle Jx, (H - \alpha I)x \rangle - \langle (H - \alpha I)x, Jx \rangle = 0,$$

de unde

$$\langle Dx, x \rangle = 0.$$

Dar  $D \geq 0$  și deci  $\langle D^{1/2} x, D^{1/2} x \rangle = \|D^{1/2} x\|^2 = 0$ . Deci avem  $Dx = 0$  sau

$$0 = H(Jx) - J(Hx) = HJ(x) - \alpha J(x) = 0,$$

adică  $J(x) \in M$ . Fie acum  $J_1 = J/M$  și cum  $M$  este invariant și pentru  $H$  rezultă că  $M$  este invariant pentru  $T$  și

$$T/M = \alpha I + i J_1$$

și cum  $J_1$  este hermitian  $T/M$  este normal. Cum  $T$  este hiponormal  $M$  reduce pe  $T$  și  $T/M = T_1$  este un operator normal. Dacă punem  $T_2 = T/M^\perp$  avem că  $T = T_1 \oplus T_2$  și  $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ , de unde

$$\operatorname{Re} \sigma(T) = \operatorname{Re} \sigma(T_1) \cup \operatorname{Re} \sigma(T_2).$$

Cum  $T_1$  este normal, din lema 4.4.5 rezultă că

$$\operatorname{Re} \sigma(T_1) = \sigma \operatorname{Re}(T_1) = \sigma(\alpha I) = \{\alpha\}$$

și deci  $\alpha \in \operatorname{Re} \sigma(T)$  și primele două afirmații ale teoremei sînt demonstrate.

**LEMA 4.4.6.** *Dacă  $T$  este un operator convexoid și  $[\alpha_0, \beta_0]$  este cel mai mic segment care conține mulțimea  $\operatorname{Re} \sigma(T)$  atunci  $\alpha_0, \beta_0 \in \sigma \operatorname{Re}(T)$ .*

*Demonstrație.* Conform lemei 4.3.1 putem presupune că  $W(T)$  este închis și  $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ . Fie  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  cu  $\operatorname{Re} \lambda_0 = \alpha_0$  și  $\lambda_0$  este un punct de pe frontiera mulțimii  $\sigma(T)$ ,  $\lambda_0 \in \partial \sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T) = \sigma_p(T)$  și deci  $\lambda_0 \in W(T)$ . Cum  $T$  este convexoid și  $W(T)$  este închis, iar  $\operatorname{Re} \sigma(T) \geq \alpha_0$  vom avea

$$\operatorname{Re} W(T) = \operatorname{Re} \operatorname{conv} \sigma(T) \geq \alpha_0$$

și deci  $\lambda_0$  este un punct de pe frontiera mulțimii  $W(T)$ . Deci este o valoare proprie normală. Fie deci  $u_0 \neq 0$ ,  $Tu_0 = \bar{\lambda}_0 u_0$  și deci  $T^*u_0 = \bar{\lambda}_0 u_0$ ,  $\alpha_0 \in \operatorname{Re} T$ . Analog se procedează cu  $\beta_0$ .

Lema este demonstrată.

**LEMA 4.4.7.** *Dacă  $T$  este un operator convexoid și  $\sigma(T)$  este o mulțime conexă atunci dacă  $[\alpha, \beta]$  este cel mai mic segment care conține  $\sigma(\operatorname{Re} T)$  atunci*

$$\sigma(\operatorname{Re} T) \subset [\alpha, \beta] \subset \operatorname{Re} \sigma(T).$$

*Demonstrație.* Cum  $\sigma(T)$  este o mulțime conexă,  $\operatorname{Re} \sigma(T)$  este un interval și deci va fi suficient să arătăm că  $\alpha, \beta \in \operatorname{Re} \sigma(T)$ . Să presupunem că nu este așa. Deci  $\alpha \notin \operatorname{Re} \sigma(T)$  și dacă  $L$  este dreapta  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ , atunci  $L$  este disjunctă de  $\sigma(T)$  și cum este o mulțime conexă ( $\sigma(T)$ ) trebuie să fie strict de o parte a dreptei. Să presupunem că este în partea dreaptă. Deci există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $\operatorname{Re} \sigma(T) \geq \alpha + \varepsilon$  și cum  $T$  este convexoid rezultă că  $\operatorname{Re} W(T) \geq \alpha + \varepsilon$  adică  $\operatorname{Re} T \geq \alpha + \varepsilon$  care ne dă că  $\sigma(\operatorname{Re} T) \geq \alpha + \varepsilon$  și deci  $\alpha \geq \alpha + \varepsilon$  cu  $\varepsilon > 0$  care este o contradicție. În mod similar dacă  $\sigma(T)$  se află în stînga dreptei. Lema este demonstrată.

**LEMA 4.4.8.** *Dacă  $T$  este un operator convexoid astfel ca  $\sigma(T)$  și  $\operatorname{Re} \sigma(T)$  sînt mulțimi conexe atunci*

$$\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma \operatorname{Re} T$$

este adevărată.

*Demonstrație.* Fie  $\operatorname{Re} \sigma(T) = [\alpha_0, \beta_0]$  și  $\sigma(\operatorname{Re} T) = [\alpha, \beta]$  din lema 4.4.7. deducem că  $[\alpha_1, \beta] \subset [\alpha_0, \beta_0]$ ; dar cum  $\alpha_0 \in [\alpha, \beta]$  și  $\beta_0 \in [\alpha, \beta]$  rezultă că  $[\alpha_0, \beta_0] = [\alpha, \beta]$  și lema este demonstrată.

LEMA 4.4.9. Dacă  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală pentru  $T$  atunci  $\sigma(\operatorname{Re} T) \subset \operatorname{Re} \sigma(T)$ .

*Demonstrație.* Conform teoremei de caracterizare a operatorilor pentru care  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală, pentru orice funcție rațională cu poli în afara mulțimii  $\sigma(T)$ ,  $f(T)$  este un operator normaloid. Deci  $T_\lambda = T - \lambda I$  este normaloid și deci  $T$  este convexoid și  $T$  satisface proprietatea  $G_1$ .

Fie  $\alpha \in (\operatorname{Re} T)$  și să presupunem că  $\alpha \notin \operatorname{Re} \sigma(T)$ . Dacă  $L$  este dreapta verticală  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$  atunci  $\sigma(T)$  este disjunct de  $L$  și deci se află de o parte a dreptei  $L$ .

Cazul când se află de o parte și de alta va fi considerat mai jos.

Deci există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $\operatorname{Re} \sigma(T) \leq \alpha - \varepsilon$  și cum  $T$  este convexoid, exact ca în lema de mai înainte, deducem că  $\alpha \leq \alpha - \varepsilon$  care reprezintă o contradicție. Analog dacă  $\sigma(T)$  se află la dreapta liniei  $L$ .

Dacă  $\sigma(T) = X_1 \cup X_2$  cu  $X_1$  situat în stînga dreptei, iar  $X_2$  în dreapta atunci  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală,  $X_i$  sînt de asemenea spectrale, și  $T = T_1 \oplus T_2$ ,  $\sigma(T_i) = X_i$ ,  $i = 1, 2$ , iar  $X_i$  sînt mulțimi spectrale pentru  $T_i$ , și putem aplica argumentele de mai înainte. Lema este demonstrată.

LEMA 4.4.10. Dacă  $T$  satisface condiția  $G_1$  atunci  $\operatorname{Re} \sigma(T) \subset \sigma(\operatorname{Re} T)$ .

*Demonstrație.* Putem presupune că  $\sigma_p(T) = \sigma_{ap}(T)$  și cum

$$\partial \sigma(T) \leq \sigma_{ap}(T) = \sigma_p(T)$$

să luăm  $\alpha_0 \in \operatorname{Re} \sigma(T)$ . Dacă  $L$  este dreapta verticală  $\operatorname{Re} L = \alpha_0$  presupunem că  $L$  taie pe  $\sigma(T)$  în  $\lambda_0 \in \partial \sigma(T)$  de unde  $\alpha_0 = \operatorname{Re} \lambda_0$ .

Pentru aceasta va fi suficient să construim un șir  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca  $(T - \lambda_0)x_n \rightarrow 0$  și  $(T^* - \bar{\lambda}_0)x_n \rightarrow 0$ , de unde va rezulta că  $\alpha_0 \in \sigma(\operatorname{Re} T)$ . Pentru aceasta vom construi un șir de valori proprii normale  $\lambda_n$  astfel ca  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ .

Pentru fiecare  $n$ , fie  $D_n = \{\lambda, |\lambda - \lambda_0| \leq 1/n\}$  și cum  $\lambda_0 \in \partial \sigma(T)$ ,  $D_n$  conține pe  $\mu_n \in \sigma(T)$  astfel ca  $|\mu_n - \lambda_0| < 1/2n$ . Cum

$$d(\mu_n, \sigma(T)) = |\mu_n - \lambda_n|$$

pentru un anumit  $\lambda_n \in \sigma(T)$  deducem că  $\lambda_n$  se află pe cercul cu centrul în  $\mu_n$  și nu are în interior alte puncte din  $\sigma(T)$ . Cum  $T$  satisface proprietatea  $G_1$ ,  $\lambda_n$  este o valoare proprie normală.

Însă  $\lambda_n \in \partial \sigma(T)$  cum avem

$$(T - \lambda_0)x_n = (T - \lambda_n)x_n + (\lambda_n - \lambda_0)x_n$$

care tinde către zero în normă pentru  $n \rightarrow \infty$ . Analog

$$(T^* - \bar{\lambda}_0)x_n = (T^* - \bar{\lambda}_n)x_n + (\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_0)x_n$$

tinde către zero în normă pentru  $n \rightarrow \infty$ . De aici rezultă că  $\alpha_0 \in \sigma \operatorname{Re} T$  și lema este demonstrată.

Să demonstrăm acum că relația

$$\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T)$$

are loc pentru operatorii pentru care  $\sigma(T)$  este o mulțime spectrală. Din lema 4.4.9 avem că

$$\sigma(\operatorname{Re} T) \subset \operatorname{Re} \sigma(T)$$

și din lema 4.4.10 deoarece  $T$  este cu proprietatea  $G_1$

$$\operatorname{Re} \sigma(T) \subset \sigma(\operatorname{Re} T),$$

de unde egalitatea.

Să demonstrăm acum ultima afirmație a teoremei. Dacă  $T$  este cu proprietatea  $G_1$  și  $\sigma(T)$  este o mulțime convexă, din lema 4.4.10 deducem că

$$\operatorname{Re} \sigma(T) \subseteq \sigma(\operatorname{Re} T).$$

Fie  $[\alpha, \beta]$  cel mai mic segment care conține pe  $\sigma(\operatorname{Re} T)$  și cum  $T$  este convexoid deducem că  $[\alpha, \beta] \subset \operatorname{Re} \sigma(T)$ . Deci

$$\sigma(\operatorname{Re} T) \subset [\alpha, \beta] \subset \operatorname{Re} \sigma(T) \subset \sigma(\operatorname{Re} T)$$

și deci egalitate. Teorema este demonstrată.

*Remarcă.* Teorema rămâne adevărată dacă se consideră clasa operatorilor de tip Toeplitz, deoarece orice operator de tip Toeplitz este convexoid și are spectrul, conform unei teoreme a lui Widom, conex.

Se poate arăta, utilizând tehnica din lemele de mai sus, că are loc :

**TEOREMA 4.4.11.** *Dacă  $T$  este un operator cu proprietatea că oricare ar fi  $\lambda, \mu$ ,  $T_{\lambda, \mu} = \lambda T + \mu I$  satisface proprietatea*

$$\operatorname{Re} \sigma(T_{\lambda, \mu}) = \sigma(\operatorname{Re} T_{\lambda, \mu}),$$

*atunci  $T$  este convexoid.*

Următorul exemplu arată că există operatori convexoizi pentru care relația de mai sus nu este adevărată.

Fie  $T = A \oplus B$  definit pe  $C^3$  prin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

și  $B$  diagonal cu

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

și  $\lambda_i$  sînt în afara axei imaginare și sînt înălțimile triunghiului care conține discul cu centrul în origine și de rază  $1/2$ .

Avem :

$$W(A) = \{\lambda, |\lambda| \leq 1/2\} = D_{1/2},$$

$$W(B) = \{\text{conv}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\} \supset D_{1/2}.$$

Cum  $T$  este convexoid și  $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(B) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  deducem că  $0 \in \text{Re} \sigma(T)$ . Dar  $\text{Re} T = \text{Re} A \oplus \text{Re} B \leq (-1/2, 1/2) \cup \text{Re} \sigma(B)$  și afirmația este demonstrată.

O atentă examinare a demonstrației ultimei afirmații a teoremei 4.4.1 arată că avem și următoarea extindere :

TEOREMA 4.4.12. *Dacă  $T$  este un operator cu proprietatea  $G_1$ , atunci dacă  $\sigma(T)$  este conex,*

$$\sigma(\text{Re } T) = \text{Re} \sigma(T).$$

## § 5. OPERATORI CONVEXOIZI

Reamintim că operatorul  $T$  pe spațiul Hilbert se numește convexoid dacă

$$\text{conv} \sigma(T) = \overline{W(T)}.$$

Scopul nostru este de a expune rezultate privind această clasă de operatori în cazul spațiilor Hilbert. Vom da de asemenea și unele rezultate privind operatorii pe spații Banach.

Vom prezenta câteva rezultate noi privind mulțimile spectrale care sînt necesare în teoremele de caracterizare a operatorilor convexoizi.

TEOREMA 4.5.1. *Fie  $T$  un operator pe un spațiu Hilbert și  $X$  mulțimea spectrală pentru  $T$ . Dacă  $f$  este o funcție rațională pentru care  $f(T)$  există atunci  $Y = \{f(x), x \in X\} = f(X)$  este o mulțime spectrală pentru  $f(T)$ .*

*Demonstrație.* Fie  $u(\cdot)$  o funcție vectorială cu poli în afara mulțimii  $Y$  și din teorema de „spectral mapping theorem” obținem că

$$Y = f(X) \supset f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$$

și deci  $u(f(T))$  există. Cum  $X$  este o mulțime spectrală avem că

$$\|u(f(T))\| = \|(u \circ f)(T)\| \leq \sup_{\xi \in X} |(u \circ f)(\xi)| = \sup_{\lambda' \in Y} |u(\lambda')|$$

și deci  $Y$  este o mulțime spectrală. Teorema este demonstrată.

Fie  $f(z)$  de forma  $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  și inversa sa  $f^{-1}(z') = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}$ ,  $X$  fiind o mulțime închisă, iar  $Y = f(X)$  să o presu-

punem mărginită. Dacă  $X$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ , atunci  $f(X)$  este mărginită și deci  $f(T) = T'$  există și  $Y$  este o mulțime spectrală pentru  $T'$ . Reciproc, dacă  $T'$  există și  $Y$  este mulțimea spectrală pentru  $T'$ , atunci  $X$  este mulțimea spectrală pentru  $T$ .

În adevăr, conform cu „spectral mapping theorem” avem

$$\sigma(T') = \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) \subseteq Y = f(X)$$

și deci  $f^{-1}(\sigma(T')) = \sigma(T) \subseteq X$  de unde rezultă că  $f^{-1}(z')$  este mărginită în  $\sigma(T')$  și  $f^{-1}(T') = T$  există și afirmația este demonstrată.

Vom considera acum cazul când  $f$  are una din formele

$$\frac{z - \alpha}{r}, \quad \frac{r}{z - \alpha}, \quad \frac{z - 1}{z + 1}, \quad r > 0$$

și vom avea :

**TEOREMA 4.5.2.** 1) Submulțimea  $\{z, |z - \alpha| \leq r\}$  este mulțime spectrală pentru  $T$  dacă și numai dacă  $\|T - \alpha I\| \leq r$ ;

2) Submulțimea  $\{z, |z - \alpha| \geq r\}$  este mulțime spectrală pentru  $T$  dacă și numai dacă  $\|(T - \alpha I)^{-1}\| \leq 1/r$ ;

3) Submulțimea  $\{z, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  este mulțimea spectrală pentru  $T$  dacă și numai dacă  $\|(T - I)(T + I)^{-1}\| \leq 1$ .

*Demonstrație.* Funcțiile  $f_1(z) = \frac{z - \alpha}{r}$ ,  $f_2(z) = \frac{r}{z - \alpha}$ ,  $f_3(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$  duc mulțimile  $\{z, |z - \alpha| \leq r\}$ ,  $\{z, |z - \alpha| \geq r\}$  și  $\{z, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  respectiv în cercul unitate și știm că aceasta este o mulțime spectrală pentru orice contracție. Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 4.5.3.** Dacă  $M$  este un semiplan închis, atunci  $M$  este mulțime spectrală pentru operatorul  $T$  dacă și numai dacă  $W(T) \subseteq M$ .

*Demonstrație.* Fie  $\operatorname{Re} T \geq 0$ ; este evident că această relație are loc dacă și numai dacă  $(T + I)^{-1}$  există și  $\|(T - I)(T + I)^{-1}\| \leq 1$ , afirmație care rezultă din relația

$$(*) \quad \|(T + I)x\|^2 = \|Tx\|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle + \|x\|^2,$$

deoarece

$$(**) \quad \|(T + I)x\|^2 - \|(T - I)x\|^2 = 4\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle.$$

Fie deci  $\|(T + I)^{-1}(T - I)\| \leq 1$  și pentru orice  $x \in X$  avem

$$\|(T - I)x\| \leq \|(T + I)x\|$$

asa că ultima inegalitate (\*\*) ne dă  $\operatorname{Re} T \geq 0$ . Invers dacă  $\operatorname{Re} T \geq 0$ , atunci din (\*) deducem că

$$\|(T + I)x\| \geq \|x\|$$

și cum  $\operatorname{Re} T = \operatorname{Re} T^* \geq 0$  avem și

$$\|(T^* + I)x\| \geq \|x\|,$$

de unde rezultă că trebuie să avem

$$(T^* + I)(T + I) \geq I,$$

$$(T + I)(T^* + I) \geq 0,$$

de unde deducem că  $(T + I)^{-1}$  există. Din (\*\*) deducem că

$$\|(T + I)x\| \geq \|(T - I)x\|,$$

deoarece  $\operatorname{Re} T \geq 0$  așa că

$$\|(T - I)(T + I)^{-1}x\| \leq \|x\|.$$

Din teorema de mai sus și cu această observație,  $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$  este mulțimea spectrală pentru  $T$  dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} T \geq 0$  sau echivalent  $\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle \geq 0$  oricare ar fi  $x$ ,  $\|x\| = 1$ , deci  $W(T) \subset \{z, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ .

În cazul general există o transformare a planului

$$\lambda \rightarrow p(\lambda) = a\lambda + b,$$

cu  $|\lambda| = 1$  astfel ca  $p(M) = \{z, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  și deci  $M$  este mulțimea spectrală pentru  $T$  dacă și numai dacă  $\{z, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  este mulțimea spectrală pentru  $p(T) = \alpha T + \beta$  adică

$$\{z, \operatorname{Re} z \geq 0\} \supset W(p(T)) = W(\alpha T + \beta)$$

dacă și numai dacă  $W(T) \subseteq M$ . Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 4.5.4.** *Operatorul  $T \in \mathcal{L}(X)$  este convexoid dacă și numai dacă orice semiplan suport pentru  $\operatorname{conv} \sigma(T)$  este mulțimea spectrală pentru  $T$ .*

*Demonstrație.* Să presupunem că  $T$  este convexoid și atunci orice suport  $M$  pentru  $\operatorname{conv} \sigma(T)$  conține pe  $W(T)$  și deci  $M$  este mulțimea spectrală pentru  $T$ .

Reciproc dacă orice semiplan suport  $M$  al lui  $\operatorname{conv} \sigma(T)$  este o mulțime spectrală pentru  $T$ , din teorema de mai sus deducem că  $M \supset W(T)$  și cum

$$\operatorname{conv} \sigma(T) = \bigcap M$$

deducem că  $W \subset \operatorname{conv} \sigma(T)$  și deci egalitatea  $\overline{W(T)} = \operatorname{conv} \sigma(T)$  și  $T$  este convexoid.

**TEOREMA 4.5.5.** *Dacă  $T$  este un operator pe spațiul Hilbert  $H$  atunci  $\operatorname{Re} T \leq 0$  dacă și numai dacă  $\|(T - \alpha I)^{-1}\| \leq 1/\alpha$  oricare ar fi  $\alpha > 0$ .*

*Demonstrație.* Să presupunem că inegalitatea de mai sus este adevărată și deci  $\alpha^2 \leq \|(T - \alpha I)x\|^2$  oricare ar fi  $x$ ,  $\|x\| = 1$  care ne dă că relația este echivalentă cu

$$\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle \leq \frac{1}{2\alpha} \|Tx\|^2$$

și făcând  $\alpha \rightarrow \infty$  obținem  $\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle \leq 0$ , adică  $\operatorname{Re} T \leq 0$ .

Să demonstrăm acum necesitatea inegalității din teoremă. Dacă nu ar fi adevărată atunci există un  $\alpha_0 > 0$  astfel ca

$$\alpha_0^2 > \|(T - \alpha_0)x\|^2$$

pentru un anume  $x$ ,  $\|x\| = 1$ , de unde rezultă că

$$\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle > \frac{1}{2\alpha_0} \|Tx\|^2 \geq 0$$

și aceasta contrazice faptul că  $\operatorname{Re} T \leq 0$ . Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor convexoizi.

**TEOREMA 4.5.6.** *Operatorul  $T$  este convexoid dacă și numai dacă oricare ar fi  $\alpha \notin \operatorname{conv} \sigma(T)$  are loc relația*

$$\|(T - \alpha I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\alpha, \operatorname{conv} \sigma(T))}.$$

*Demonstrație.* Conform teoremei 4.5.5. este suficient să arătăm că orice semiplan suport al lui  $\operatorname{conv} \sigma(T)$  este o mulțime spectrală și aceasta este echivalent cu faptul că

$$\{z, |z - \alpha| > d(\alpha, \operatorname{conv} \sigma(T))\}$$

este o mulțime spectrală pentru  $T$  oricare ar fi  $\alpha \notin \operatorname{conv} \sigma(T)$ .

Printr-o translație și o rotație

$$T \rightarrow \xi T + \eta$$

este suficient să considerăm  $\alpha > 0$  și semiplanul suport  $\{z, \operatorname{Re} z \leq 0\} = M$ . Dar atunci afirmația

$$(*) \quad \|(T - \alpha I)^{-1}\| \leq 1/\alpha$$

este adevărată dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} T \leq 0$ , iar  $M$  este mulțimea spectrală dacă și numai dacă  $W(T) \subset M$ , deci (\*) este adevărată dacă și numai dacă  $M$  este mulțimea spectrală pentru  $T$ .

Teorema este demonstrată.

Vom reaminti acum noțiunea de operator spectraloid.

**DEFINIȚIA 4.5.7.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(X)$  se numește spectraloid dacă raza spectrală este egală cu raza numerică

$$r_T = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\} = \omega(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

Vom da acum o nouă demonstrație pentru teorema 4.5.6. și vom da o nouă caracterizare a operatorilor convexoizi în :

**TEOREMA 4.5.8.** *Operatorul  $T$  este convexoid dacă și numai dacă operatorul  $T = T + \lambda I$  este spectraloid oricare ar fi  $\lambda$ .*

Vom avea nevoie de două rezultate privind înfășurătoarea convexă  $\operatorname{conv}(\cdot)$  a unor submulțimi din plan  $(\cdot)$  date în teoremele 4.5.9. și 4.5.10.

**TEOREMA 4.5.9.** *Dacă  $F$  este o submulțime închisă, mărginită în planul complex atunci*

$$\text{conv } F = \bigcap_{\mu} \{ \lambda, |\lambda - \mu| \leq \sup_{x \in F} |x - \mu| \}$$

**TEOREMA 4.5.10.** *Dacă  $F$  este o submulțime închisă, mărginită în planul complex atunci*

$$\text{conv } F = \bigcap_0 \{ \lambda, \text{Re } \lambda e^{i\theta} \geq \inf_{s \in F} \text{Re } s e^{i\theta} \}.$$

*Demonstrația teoremei 4.5.9.* Fie

$$D_{\mu} = \{ \lambda, |\lambda - \mu| \leq \sup_{x \in F} |x - \mu| \}$$

atunci evident că  $D_{\mu} \supset F$  și deci cum  $D_{\mu}$  sînt convexe  $\text{conv } F \subseteq \bigcap_{\mu} D_{\mu}$ .

Să arătăm că are loc și relația contrară. Fie  $x_0 \in \bigcap_{\mu} D_{\mu}$  și care nu este în  $\text{conv } F$ , de unde rezultă că avem și

$$|x_0 - \mu| \leq \sup_{x \in F} |x - \mu|,$$

$\mu$  este arbitrar. De aici rezultă că  $\bigcap_{\mu} D_{\mu}$  este în  $\text{conv } F$ .

Teorema 4.5.10 se demonstrează similar.

*Demonstrația teoremei 4.5.8.* Să luăm  $F = \overline{W(T)}$  de unde deducem că  $\overline{W(T)}$  fiind convexă,

$$\overline{W(T)} = \bigcap_{\mu} \{ \lambda, |\lambda - \mu| \leq \omega(T - \mu I) \}$$

și pentru  $F = \sigma(T)$

$$\text{conv } \sigma(T) = \bigcap_{\mu} \{ \lambda, |\lambda - \mu| \leq r_{T-\mu I} \}$$

și deci dacă este convexoid rezultă că  $\omega(T - \mu I) = r_{T-\mu I}$ , adică  $T$  este spectraloid și  $T_{\mu} = T - \mu I$  este de asemenea spectraloid. Din relațiile de mai sus rezultă că este adevărată și afirmația că dacă  $T_{\mu}$  este spectraloid pentru orice  $\mu$  atunci  $T$  este convexoid. Teorema este demonstrată.

*Demonstrația teoremei 4.5.6.* Știm că oricare ar fi operatorul  $T$  are loc relația: pentru orice  $z \in \overline{W(T)}$

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \overline{W(T)})}$$

și deci dacă  $T$  este convexoid condiția pusă este necesară. Să arătăm că este și suficientă. Vom avea pentru  $\mu \notin \text{conv } \sigma(T)$

$$\|(T - \mu)x\| \geq d(\mu, \text{conv } \sigma(T)), \|x\| = 1,$$

adică

$$\|Tx\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle + |\mu|^2 \geq \inf_{s \in \operatorname{conv} \sigma(T)} \{|s|^2 - 2 \operatorname{Re} s\bar{\mu} + |\mu|^2\}$$

și pentru  $\mu = |\mu| e^{-i(0+\pi)}$  și împărțind la  $|\mu|$ , făcând apoi  $|\mu| \rightarrow \infty$  obținem

$$\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle e^{i0} \geq \inf_{s \in \operatorname{conv} \sigma(T)} \operatorname{Re} s e^{i0}, \quad \|x\| = 1$$

care ne dă că  $\overline{W(T)} \subset \operatorname{conv} \sigma(T)$ . Cum incluziunea în sens contrar este totdeauna adevărată avem egalitate și  $T$  este convexoid. De aici rezultă și :

**TEOREMA 4.5.11.** Pentru orice operator  $T$  avem

$$\overline{W(T)} = \bigcap_k \left\{ \operatorname{conv} X_k, \|(T - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, X_k)}, \mu \notin \operatorname{conv} X_k \right\}$$

unde  $X_k$  este închisă și mărginită în planul complex.

**TEOREMA 4.5.12.** Operatorul  $T$  este convexoid dacă și numai dacă pentru orice  $\theta \in [0, \pi]$  are loc relația

$$\operatorname{Re} (\operatorname{conv} \sigma(e^{i\theta} T)) = \operatorname{conv} (\operatorname{Re} e^{i\theta} T).$$

*Demonstrație.* Avem

$$\operatorname{Re} \{e^{i\theta} \operatorname{conv} \sigma(T)\} = \overline{W} (\operatorname{Re} (e^{i\theta} T)) = \operatorname{Re} \overline{W}(e^{i\theta} T) = \operatorname{Re} \{e^{i\theta} W(T)\}$$

pentru orice  $\theta \in [0, \pi]$ , deoarece orice operator hermitic este convexoid. Din această relație rezultă evident teorema.

Vom menționa că această teoremă se poate aplica operatorilor convexoizi pentru a deduce în ce condiții avem relația :

$$\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T).$$

Vom menționa că o problemă interesantă care se pune este următoarea : este orice operator de clasă (N) convexoid ? În cele ce urmează vom da exemple de operatori de clasă (N) care nu sînt hiponormali și care sînt convexoizi.

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și să considerăm spațiul  $K = \bigoplus_{k=1}^{\infty} (H_k = H)$  ; să luăm doi operatori pozitivi și mărginiți pe  $H$  și să construim un operator pe  $K$  astfel ca matricea sa să fie

$$T_{A,B,n} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ A & A & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & 0 & \\ & & & \cdot & A & 0 \\ & & & & A & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

care este de clasă (N) dacă și numai dacă pentru orice  $\lambda \geq 0$

$$AB^2A - 2\lambda A^2 + \lambda^2 \geq 0$$

și este hiponormal dacă și numai dacă

$$B^2 \geq A^2.$$

Dacă luăm  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$  și punem  $A = C^{1/2}$ ,

$$B = (C^{-1/2}DC^{1/2})^{1/2}$$

operatorul  $T_{A,B,n}$  corespunzător este de clasă (N), dar  $T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}$  nu este.

Vom arăta că  $T_{A,B,n}$  și  $T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}$  sînt operatori convexoizi.

Fie  $\mu$  o valoare proprie pozitivă a lui  $B$ ,  $B\varphi = \mu\varphi$ ,  $\|B\| = \mu$  și fie  $\lambda$  un număr complex astfel ca  $\|A\| < |\lambda| < \mu$  și să luăm în  $k$  vectorul de forma

$$\psi = \left( \frac{1}{\lambda^n} A^n \varphi, \frac{1}{\lambda^{n-1}} A^{n-1} \varphi, \dots, \frac{1}{\lambda} A \varphi, \varphi, \frac{\lambda}{\mu} \varphi, \frac{\lambda^2}{\mu^2} \varphi, \dots, \frac{\lambda^k}{\mu^k} \varphi, \dots \right)$$

care este în  $k$  și avem că  $T_{A,B,n}^* \psi = \lambda \psi$ , de unde rezultă că  $\lambda^* \in \sigma_p(T_{A,B,n}) \cup \sigma_r(T_{A,B,n}) \subset \sigma(T_{A,B,n})$  și deci orice număr complex  $\lambda$  cu proprietatea de mai sus este în  $\sigma(T)$  și deci înfășurătoarea convexă a spectrului coincide cu  $\{z, |z| \leq \mu\}$  și cum  $\|T_{A,B,n}\| = \|B\| = \mu$  rezultă că  $T_{A,B,n}$  este convexoid.

Cum avem

$$\text{conv } \sigma(T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}) = \text{conv}(\sigma(T_{A,B,n}) \cdot \sigma(T_{A,B,n})) = \{z, |z| \leq \mu^2\}$$

și

$$\mu^2 = \|T_{A,B,n}\|^2 = \|T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}\| \equiv \omega(T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}),$$

de unde rezultă că  $T_{A,B,n} \otimes T_{A,B,n}$  este convexoid.

Vom da acum unele rezultate care indică un mod de a „calcula” raza spectrală și raza numerică și  $\text{conv } \sigma(T)$ .

**TEOREMA 4.5.13.** Pentru orice operator  $T$  avem

$$r(T) = \inf_{S \text{ invertibil}} \|S^{-1}TS\|.$$

**TEOREMA 4.5.14.** Pentru orice operator  $T$  are loc

$$r(T) = \inf_{S \text{ invertibil}} W(S^{-1}TS).$$

TEOREMA 4.5.15. Pentru orice operator  $T$

$$\text{conv } \sigma(T) = \bigcap_{S \text{ invertibil}} \overline{W}(S^{-1}TS)$$

Demonstrațiile acestor teoreme le dăm după ce vom demonstra o teoremă ajutătoare care prezintă interes și în sine.

TEOREMA 4.5.16. Dacă  $T$  este un operator astfel ca

$$\|T^n\| \leq \theta^n$$

pentru  $n$  suficient de mare, atunci pentru orice  $\delta > 0$  există un operator invertibil (hermitic)  $S$  astfel încât

$$\|S^{-1}TS\| \leq \delta.$$

*Demonstrație.* Să definim

$$R = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\delta^{2n}} T^{*n} T^n$$

care este hermitic și  $\|R\| \geq 1$ . Să notăm cu  $S = R^{1/2}$  care este de asemenea hermitic și pozitiv. De asemenea,

$$T^*RT = \delta^2(R - I) \leq \delta^2 R$$

și deci

$$\|STS^{-1}\|^2 = \|S^{-1}T^*SST S^{-1}\| = \|S^{-1}T^*RT S^{-1}\| \leq \delta^2 \|S^{-1}RS^{-1}\| = \delta^2$$

și teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și teoremele 4.5.13, 4.5.14. și 4.5.15.

În adevăr, dacă  $r_T$  este raza spectrală a operatorului  $T$  atunci conform formulei lui Beurling-Gelfand

$$r_T = \lim \|T^n\|^{1/n},$$

deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , pentru  $n \geq N_\varepsilon$  avem relația

$$\|T^n\| \leq (r_T + \varepsilon)^n$$

și din teorema 4.5.16, există  $S$  astfel ca

$$\|STS^{-1}\| \leq r_T + \varepsilon$$

și cum  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, rezultă teorema 4.5.13.

Teorema 4.5.14 rezultă din teorema 4.5.13 și din observația că

$$r_T = r(S^{-1}TS) \leq W(S^{-1}TS) \leq \|S^{-1}TS\|$$

oricare ar fi  $S$  invertibil.

Demonstrația teoremei 4.5.15 rezultă astfel

$$\begin{aligned}\operatorname{conv} \sigma(T) &= \bigcap_{\mu} \{\lambda, |\lambda - \mu| \leq r(T - \mu)\} = \\ &= \bigcap_{\mu} \{\bigcap_{S \text{ invertibil}} |\lambda - \mu| \leq \inf \|S^{-1}TS - \mu\|\} = \\ &= \bigcap_{\mu} \bigcap_{S \text{ invertibil}} \{\lambda, |\lambda - \mu| \leq \|S^{-1}TS - \mu\|\} = \\ &= \bigcap_{S \text{ invertibil}} \bar{W}(S^{-1}TS).\end{aligned}$$

În legătură cu rezultatul din teoremele 4.5.13 și 4.5.14 apare natural să ne întrebăm cât este  $\sup_{S \text{ invertibil}} \|S^{-1}TS\|$ . Următoarea teoremă dă un răspuns la această problemă.

**TEOREMA 4.5.17.** *Dacă  $T$  nu este multiplu al operatorului  $I$  atunci pentru orice mulțime  $C$  compactă în plan există  $S$  invertibil astfel ca*

$$W(S^{-1}TS) \supset C.$$

Înainte de a demonstra această teoremă vom menționa următorul rezultat care rezultă imediat și care dă răspunsul la problema enunțată mai sus.

**TEOREMA 4.5.18.** *Pentru orice  $T$  ca în teorema 4.5.17 are loc*

$$\sup_S \|S^{-1}TS\| = \infty.$$

Faptul că această teoremă rezultă din teorema 4.5.17 este clar deoarece

$$\{z, |z| \leq \|A\|\} \supset W(A)$$

oricare ar fi operatorul mărginit  $A$ .

Să demonstrăm acum teorema 4.5.17. Din ipoteză rezultă că există o proiecție  $P$  (un proiector) cu  $\dim PH = 2$  astfel că  $A = PTP/H$  nu este multiplu al operatorului identitate. Fie  $S_0$  un operator invertibil pe  $PH$  și atunci  $\tilde{S} = S_0P + P^\perp$  este invertibil pe  $H$  care comută cu  $P$  și  $P(S^{-1}TS)P$  este exact  $S_0^{-1}AS_0$  și cum rangurile numerice satisfac relația

$$W(S_0^{-1}AS_0) \subset W(\tilde{A}), \quad \tilde{A} = S^{-1}TS$$

și în acest mod este suficient să demonstrăm teorema în cazul  $\dim H = 2$ .

**Cazul 1.**  $T$  are o valoare proprie  $\lambda$  și fie  $\{e_1, e_2\}$  o bază ortonormală pentru  $H$ , și deci  $T$  are matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ cu } a \neq 0.$$

În acest caz este ușor de văzut că  $W(T) = \left\{ z, |z - \lambda| \leq |a| \frac{1}{2} \right\}$ .

Există un operator invertibil  $S$  astfel ca  $S^{-1}TS$  să aibă matricea  $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  în raport cu baza  $(e_1, e_2)$  și cum  $b$  este la alegerea noastră, afirmația teoremei în acest caz este demonstrată.

**Cazul 2.**  $T$  are valorile proprii  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Fie  $A_0 = S^{-1}TS$  astfel ca unghiul între cele două valori proprii să fie cât dorim noi și în acest caz în raport cu o bază  $A_0$  are matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1) \cotg \theta \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

și  $W(A_0)$  este o elipsă cu focarele în  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  cu excentricitatea  $\sin \theta$ . În particular dacă  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ,  $j = 1, 2$  și este astfel ca

$$\max_{x^2 + y^2 \leq n^2} \sqrt{(x - \lambda_1)^2 + (y - \lambda_1)^2} + \sqrt{(x - \lambda_2)^2 + (y - \lambda_2)^2} \leq \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\sin \theta}$$

atunci  $W(A_0)$  va conține un cerc cu centrul în origine și rază  $n$ . Deci și în acest caz teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă arată cât de „mare” este rangul numeric al unui operator.

**TEOREMA 4.5.19.** Pentru orice operator  $T$ ,  $W(T)$  conține interiorul  $\overline{W(T)}$ .

Vom da mai întâi o teoremă privind mulțimile convexe în plan și care va fi utilă la stabilirea teoremei

**TEOREMA 4.5.20.** Dacă  $C$  este o mulțime convexă în plan cu proprietatea că  $S(0, \varepsilon) = \{z, |z| < \varepsilon\}$ ,  $S(0, \varepsilon) \cap C$  este densă în  $S(0, \varepsilon)$  pentru un anumit  $\varepsilon > 0$ , atunci  $C$  conține mulțimea  $S(0, \varepsilon)$ .

**Demonstrație.** Fie  $x \in S(0, \varepsilon)$  și fie  $\{e^{iu(k)} : k = 1, \dots, n\}$  înălțimile unui poligon cu  $n$  laturi înscris în cercul  $\{z, |z| = \varepsilon\}$  așa că  $x$  este în interiorul acestui poligon. Deci pentru  $k = 1, \dots, n$  există șirurile  $\{C_{m,k}\}$  care converg către  $\varepsilon e^{iu(k)}$  pentru  $m \rightarrow \infty$ . Poligonul cu vîrfurile în  $\{C_{m,k}\}$  aproximează în metrica Hausdorff-Pompeiu, poligonul nostru și deci pentru  $m$  suficient de mare  $x$  este în  $\text{conv} \{C_{m,1}, \dots, C_{m,n}\}$  și cum  $C$  este convexă rezultă că  $x \in C$ . Teorema este demonstrată.

Demonstrația teoremei se face astfel: pentru  $x$  în interiorul lui  $\overline{W(T)}$  să luăm  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $S(x, \varepsilon)$  să fie conținută în  $\overline{W(T)}$ , deci  $\overline{W(T - xI)}$  conține  $S(0, \varepsilon)$  și  $\overline{W(T - xI)} \cap S(0, \varepsilon)$  trebuie să fie densă în  $S(0, \varepsilon)$ , iar din teorema de mai sus rezultă că  $x \in W(T)$ .

Teorema este demonstrată.

## § 6. PRODUSUL TENSORIAL ȘI CLASE DE OPERATORI

Vom studia în acest capitol câteva probleme legate de proprietățile operatorilor definiți pe un produs tensorial. Aceste probleme sînt: spectrul produsului tensorial a doi operatori, rangul numeric, produsul tensorial și unele clase de operatori (hiponormali și de clasă  $(N)$ ).

Fie  $T$  și  $S$  doi operatori definiți pe spațiile Banach  $X$  și  $Y$ , să considerăm produsul tensorial  $S \otimes T$ . Se pune problema cum arată spectrul operatorului  $S \otimes T$  în funcție de  $\sigma(S)$  și  $\sigma(T)$ . Are loc :

**TEOREMA 4.6.1.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(X)$ , respectiv  $S \in \mathcal{L}(Y)$ , atunci  $\sigma(S \otimes T) = \sigma(S) \cdot \sigma(T) = \{\lambda\mu, \lambda \in \sigma(S), \mu \in \sigma(T)\}$ .*

Vom demonstra teorema în cazul spațiilor Hilbert urmînd ca să dăm apoi o teoremă mai generală pe spații Banach.

Cum evident avem

$$\sigma(S \otimes I) = \sigma(S)$$

$$\sigma(I \otimes T) = \sigma(T)$$

și  $I \otimes T, S \otimes I$  comută, deducem că

$$\sigma(S \otimes T) \subseteq \sigma(S \otimes I) \cdot \sigma(I \otimes T) \subset \sigma(S) \cdot \sigma(T),$$

deoarece

$$S \otimes T = S \otimes I \cdot I \otimes T.$$

Dacă pentru un operator  $\sigma_{ap}(\cdot)$  înseamnă spectrul aproximativ, atunci

$$\sigma_{ap}(S) \cdot \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(S \otimes T).$$

În adevăr, dacă  $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$  atunci există  $\{x_n\}, \|x_n\| = 1$  astfel ca

$$\|Sx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$$

și similar, dacă  $\mu \in \sigma_{ap}(T)$ , există  $\{y_n\}, \|y_n\| = 1$  astfel ca

$$\|Ty_n - \mu y_n\| \rightarrow 0.$$

Cum

$$\|(S \otimes T - \lambda\mu(I \otimes I))x_n \otimes y_n\| \leq$$

$$\leq \|(S - \lambda I)x_n\| \|Ty_n\| + \|\lambda x_n\| \|(T - \mu I)y_n\| \rightarrow 0$$

deducem că  $\lambda\mu \in \sigma(S \otimes T)$ .

Să mai remarcăm și faptul că

$$[\sigma(S) - \sigma_{ap}(S)] \cdot [\sigma(T) - \sigma_{ap}(T)] \subseteq \sigma(S \otimes T).$$

În adevăr, dacă  $\lambda \in \sigma(S) - \sigma_{ap}(S)$  și  $\mu \in \sigma(T) - \sigma_{ap}(T)$  atunci  $\lambda \in \sigma_p(S)$  și  $\mu \in \sigma_p(T)$ , de unde rezultă că  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(S^*)$ ,  $\bar{\mu} \in \sigma_p(T^*)$ ,  $\sigma_p(\cdot)$  înseamnă spectrul punctual și conform cu observația de mai înainte

$$\bar{\lambda}\bar{\mu} \in \sigma(S^* \otimes T^*) = \sigma((S \otimes T)^*).$$

Vom arăta acum cum rezultă din aceste observații teorema enunțată.

Conform cu observațiile de mai sus vom avea de considerat numai cazul cînd  $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$  și  $\mu \in \sigma(T) - \sigma_{ap}(T)$  sau  $\lambda \in \sigma(S) - \sigma_{ap}(S)$  și  $\mu \in \sigma_{ap}(T)$ . Dacă  $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$  atunci dacă  $\lambda = 0$ ,  $\lambda\mu = \lambda\mu_0 = 0$ , oricare ar fi  $\mu_0 \in \sigma_{ap}(T)$  și deci  $\lambda\mu \in \sigma(S \otimes T)$ . Putem presupune deci că  $\lambda \neq 0$  și de asemenea  $\mu \neq 0$  (considerînd  $\sigma_p(T^*)$ ).

*Cazul 1.*  $\bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(S^*)$  și cum  $\bar{\mu} \in \sigma_p(T^*)$  deducem că  $\lambda\mu \in \sigma(S \otimes T) = \overline{(\sigma(S^* \otimes T^*))}$ .

*Cazul 2.*  $\bar{\lambda} \notin \sigma_{ap}(S^*)$ . Cum  $\sigma(S^*) - \sigma_{ap}(S^*)$  este deschisă, deoarece  $\sigma_{ap}(S^*)$  este închisă și conține  $\partial \sigma(S^*)$ .

$$t\bar{\lambda} \in \sigma(S^*) - \sigma_{ap}(S^*),$$

$$\frac{\mu}{t} \in \sigma(T) - \sigma_{ap}(T)$$

pentru  $t \geq 1$ , dar suficient de aproape de 1 și deci există  $t_0 > 1$  astfel ca

$$t_0\bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(S^*),$$

$$\frac{\mu}{t_0} \in \sigma_{ap}(T),$$

$$t\bar{\lambda} \in \sigma(S^*) - \sigma_{ap}(S^*),$$

$$\frac{\mu}{t} \in \sigma(T) - \sigma_{ap}(T),$$

dacă  $t \in [1, t_0]$ . Dacă  $t_0 \bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(S^*)$ ,  $\frac{\mu}{t_0} \in \sigma_{ap}(T)$  atunci

$$\bar{\lambda}\bar{\mu} = (t_0\bar{\lambda}) \cdot (\bar{\mu}/t_0) \subset \sigma(S^* \otimes T^*).$$

Dacă  $t_0\bar{\lambda} \notin \sigma_{ap}(S^*)$  și  $\mu/t_0 \in \sigma_{ap}(T)$  similar obținem  $\lambda\mu \in \sigma(S \otimes T)$ .

Dacă  $t_0\bar{\lambda} \in \sigma_{ap}(S^*)$  și  $\mu/t_0 \in \sigma_{ap}(T)$ , fie  $t_n \rightarrow t_0$  și cum

$$t_n\bar{\lambda} \notin \sigma_{ap}(S^*),$$

$$t_n\lambda \in \sigma_p(S),$$

deducem că  $(t_n\lambda) \cdot (\mu/t_0) \in \sigma(S \otimes T)$ . Dar cum  $t_n \cdot \lambda \cdot \frac{\mu}{t_0} = (t_n/t_0) \cdot \lambda\mu \rightarrow \lambda\mu$ ,

deducem că  $\lambda\mu \in \sigma(S \otimes T)$ , deoarece este o mulțime închisă. Teorema este demonstrată.

Înainte de a da o extensie a teoremei de mai sus vom menționa un rezultat imediat și anume:

**TEOREMA 4.6.2.** *Condiția necesară și suficientă ca  $S \otimes T$  să fie un operator normaloid este ca  $S$  și  $T$  să fie operatori normaloizi.*

*Demonstrație.* În adevăr

$$\begin{aligned} \|S\| \|T\| &\geq \|S \otimes T\| \geq \sup \{|\tilde{\lambda}|, \tilde{\lambda} \in \sigma(S \otimes T)\} = \\ &= \sup_{\lambda, \mu} \{|\lambda| |\mu|, \lambda \in \sigma(S), \mu \in \sigma(T)\} = \|S\| \|T\|. \end{aligned}$$

Condiția este suficientă.

Să arătăm că este necesară. Fie deci  $S \otimes T$  normaloid

$$\|S \otimes T\| = \sup \{|\lambda \mu|, \lambda \in \sigma(S), \mu \in \sigma(T)\} = r_T r_S \leq \|S\| \|T\| = \|S \otimes T\|$$

și deci trebuie să avem  $r_T = \|T\|$  și  $r_S = \|S\|$ .

Teorema este demonstrată.

Este natural să ne punem problema, ținând seama de „spectral mapping theorem” dacă, pentru orice polinom în două variabile și orice doi operatori care comută, are loc relația

$$p(\sigma(T_1), \sigma(T_2)) = \sigma(p(T_1, T_2)).$$

Este ușor de dat exemple că în general, o astfel de relație nu poate avea loc.

În adevăr, fie  $T$  un operator hermitic și să punem

$$T_1 = T, T_2 = 1 - T$$

și să luăm  $T$  astfel ca  $\sigma(T) = [0, 1]$ . În acest caz  $p(z_1, z_2) = z_1 + z_2$  are proprietatea că

$$\sigma(p(T_1, T_2)) = \{1\}$$

și relația de mai înainte nu este verificată.

Înainte de a enunța extensia teoremei 4.6.1 pentru spații Banach arbitrare vom face câteva observații.

Fie  $\{X_i\}_1^n$  spații Banach și  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  produsul tensorial care completat în raport cu o „normă cross” îl vom nota cu  $W$ , și  $A_i$  operatori liniari și mărginiți pe  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Să definim pe  $W$  operatorul

$$T_i = I_1 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes A_i \otimes I_{i+1} \otimes \dots \otimes I_n,$$

oricare ar fi  $1 \leq i \leq n$  și care ne dă pe  $W$  o familie de  $n$  operatori care comută și evident are loc proprietatea

$$\sigma(T_i) = \sigma(A_i).$$

Dacă  $P(z_1, \dots, z_n)$  este un polinom de  $n$  variabile atunci putem forma  $P(T_1, T_2, \dots, T_n)$  și se pune problema spectrului  $\sigma(P(T_1, \dots, T_n))$ .

Are loc

**TEOREMA 4.6.3.** *Mulțimea  $\sigma(P(T_1, \dots, T_n))$  este formată din acele numere  $\mu$  cu proprietatea că există  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $\lambda_i \in \sigma(T_i) = \sigma(A_i)$  astfel ca*

$$\mu = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Pentru a demonstra această teoremă avem nevoie de următorul rezultat pe care-l vom enunța ca teorema 4.6.4. urmînd ca demonstrația să o dăm după demonstrația teoremei 4.6.3.

**TEOREMA 4.6.4.** *Dacă  $P(z_1, z_2)$  este un polinom de două variabile astfel ca  $P(0, 0) = 0$ , atunci există două funcții complexe continue definite pe  $[0, \infty)$  și astfel ca  $g(0) = h(0) = 0$  și  $|g(t)| + |h(t)| \rightarrow \infty$  cu*

$$P(g(t), h(t)) = 0 \quad 0 \leq t < \infty$$

*Demonstrația teoremei 4.6.3.* Se spune că  $A$  este un operator cu un șir singular dacă există  $x_n \in X$  astfel ca

1.  $\|x_n\| = 1$ ,
2.  $Ax_n \rightarrow 0$  ( $\lim \|Ax_n\| = 0$ ).

Să notăm cu  $S_1$  mulțimea operatorilor liniari și mărginiți cu proprietatea că au un șir singular, iar cu  $S_2$  mulțimea operatorilor cu proprietatea că operatorii adjuncți au un șir singular.

Fie  $T_1, \dots, T_n$  operatorii construiți mai sus și fie  $B$  al doilea comutant al operatorilor  $T_i$ , adică mulțimea elementelor din  $\mathcal{L}(W)$  care comută cu  $T_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Evident că  $B$  este o algebră Banach comutativă și  $\sigma(\cdot)$  al elementului  $(\cdot)$  este același ca element în  $B$  sau ca element în  $\mathcal{L}(W)$ .

Vom defini acum o mulțime în  $C^n$  care pentru  $n = 1$  se reduce la noțiunea cunoscută de mulțime rezolventă:  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  este în mulțimea rezolventă comună dacă există operatorii  $C_1, \dots, C_n \in B$  astfel ca

$$(*) \quad \sum C_i(T_i - \lambda_i I) = I = I_1 \otimes \dots \otimes I_n$$

iar în caz contrar vom spune că  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  este în spectrul comun care va fi notat cu  $\sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . Vom nota aici că spectrul comun este dat de mulțimea valorilor aplicației

$$h: B \rightarrow C$$

astfel ca  $h(T_i) = \lambda_i$  unde  $h$  este un homomorfism. Reamintim că noțiunea de spectru comun a fost introdusă de Arens și Calderon.

Dacă  $P$  este un polinom atunci

$$\sigma(P(T_1, \dots, T_n)) = P(\sigma(T_1, \dots, T_n)).$$

În adevăr, fie  $h: B \rightarrow C$  un homomorfism și după cum este cunoscut  $\lambda \in \sigma(P(\cdot))$  dacă și numai dacă există  $h: B \rightarrow C$  astfel ca  $\lambda = h(P(\cdot))$ . Însă  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  este în  $\sigma(T_1, \dots, T_n)$  dacă și numai dacă există  $h: B \rightarrow C$  astfel ca  $h(T_i) = \lambda_i$  și cum

$$h(P(T_1, \dots, T_n)) = P(h(T_1), \dots, h(T_n))$$

observația este demonstrată. Din această observație rezultă imediat că  $\mu \in \sigma(P(T_1, \dots, T_n))$  este de forma  $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  cu  $\lambda_i \in \sigma(T_i)$ . Reciproc, dacă  $\lambda_i \in \sigma(T_i)$  și pentru orice  $i$ ,  $A_i - \lambda_i \in S_1$ , fie  $\{x_{ik}\}$  șirul singular corespunzător pentru  $A_i - \lambda_i$ , atunci

$$u_k = x_{1k} \otimes x_{2k} \otimes \dots \otimes x_{nk}; \quad k = 1, 2, \dots$$

ne dă că  $\|u_k\| = 1$  și

$$\|(T_i - \lambda_i)u_k\| \rightarrow 0$$

de unde rezultă că (\*) nu poate avea loc. În acest mod  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(T_1, \dots, T_n)$ .

Dacă  $(A_i - \lambda_i)^* \in S_2$  atunci  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(T_1, \dots, T_n)$ . Rămâne deci de considerat cazul cînd toți  $A_i - \lambda_i$  sînt în  $S_1$  sau în  $S_2$ . Pentru aceasta vom arăta că există  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  astfel ca

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

astfel ca numărul de operatori  $T_i - \lambda_i$  care sînt în  $S = S_1 \cap S_2$  este mai mare decît numărul de operatori  $T_i - \lambda_i$  care sînt în  $S$ . Repetînd, obținem  $\mu_1, \dots, \mu_n$  astfel că  $T_i - \mu_i$  sînt toți în  $S$  și cu aceasta teorema este demonstrată. Să presupunem că  $A_1 - \lambda_1 \in S_1$ ,  $A_2 - \lambda_2 \in S_2$  și ceilalți nu sînt în  $S$ . Deci  $R(A_1 - \lambda_1)$  și  $R(A_2 - \lambda_2)$  sînt subspații închise.

Ascentul  $\alpha(A_1 - \lambda_1) \neq 0$ ,  $\alpha(A_2 - \lambda_2) \neq 0$  și descentul  $\beta(A_1 - \lambda_1) = 0$ ,  $\beta(A_2 - \lambda_2) \neq 0$ .

Conform cu teorema 4.6.4. există  $h(t)$  și  $g(t)$  astfel ca

$$g(0) = \lambda_1 \quad h(0) = \lambda_2,$$

$$|g(t)| + |h(t)| \rightarrow \infty,$$

$$P(g(t), h(t), \lambda_3, \dots, \lambda_n) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Cum  $\sigma(A_i)$  sînt mulțimi mărginite și închise, iar  $\Phi_+$ ,  $\Phi_-$  sînt mulțimi deschise (\*) există  $t_0$ ,  $0 < t_0 < \infty$  astfel încît

1.  $R(A_1 - g(t))$ ,  $R(A_2 - h(t))$  sînt mulțimi închise în  $X$ ,
2.  $\alpha(A_1 - g(t)) < \infty$ ,  $\beta(A_1 - g(t)) < \infty$ ,
3.  $\alpha(A_2 - h(t)) < \infty$ ,  $\beta(A_2 - h(t)) < \infty$ ,

dacă  $t \in [0, t_0]$  și nu toate afirmațiile 1 — 3 sînt adevărate dacă  $t = t_0$ . Rezultă astfel că sau  $A_1 - g(t_0)$  sau  $A_2 - h(t_0)$  este în  $S$  pentru că, dacă nu ar fi așa

$$\alpha(A_1 - g(t_0)) - \beta(A_1 - g(t_0)) = \alpha(A_1 - \lambda_1) > 0,$$

$$\alpha(A_2 - h(t_0)) - \beta(A_2 - h(t_0)) = -\beta(A_2 - \lambda_2) < 0.$$

Să punem atunci  $\mu_1 = g(t_0)$  și  $\mu_2 = h(t_0)$ ,  $\mu_i = \lambda_i$ ,  $i \geq 3$  și afirmația este demonstrată și cu aceasta și teorema.

Să dăm acum demonstrația teoremei 4.6.4. Vom putea presupune fără a restrînge generalitatea că  $p(z, \xi)$  este ireductibil și să-l scriem sub forma

$$P(z, \xi) = c_n(z)\xi^n + \dots + c_0(z).$$

Dacă  $c_k(0) = 0$  pentru orice  $k$  atunci  $P(0, t) = 0$  oricare ar fi  $t$  și putem lua  $g(t) = 0$  iar  $h(t) = t$ . În caz contrar există  $k > 0$  astfel ca  $c_j(0) = 0$  pentru  $0 \leq j < k$  și  $c_k(0) \neq 0$ . Din teorema lui Weierstrass există o funcție  $u(t)$  continuă într-o vecinătate a lui zero astfel ca

$$P(t, u(t)) = 0 \quad 0 \leq t \leq a > 0.$$

Să luăm  $a$  suficient de mic și  $v(t)$  o curbă netedă care ocolește punctele singulare ale polinomului și care tinde către  $a$  cu  $v(a) = a$ , iar  $f(z)$  o funcție analitică în vecinătatea acestei curbe astfel ca  $f(t) = v(t)$  și  $P(z, f(t)) = 0$  în vecinătatea curbei. Dacă punem

$$g(t) = t \quad h(t) = u(t) \quad 0 \leq t \leq a,$$

$$g(t) = v(t) \quad h(t) = f(v(t)) \quad a \leq t < \infty$$

obținem funcțiile care îndeplinesc condițiile din teoremă.

*Observație.* Demonstrația acestei teoreme depinde de două instrumente foarte puternice și anume teoria lui Gelfand cît și teorema lui Weierstrass din teoria funcțiilor de mai multe variabile. Este deci de dorit o demonstrație care să utilizeze cît mai puțin din aceste teoreme sau care chiar să nu facă apel la acestea.

În cele ce urmează vom prezenta o demonstrație care nu utilizează teorema lui Weierstrass, în schimb utilizează noțiunea de limită Banach.

Fie  $m$  spațiul Banach al șirurilor mărginite, iar „glim” o limită Banach fixă pe  $m$ , adică o funcțională cu următoarele proprietăți :

1.  $\text{glim}(\lambda_n + \mu_n) = \text{glim} \lambda_n + \text{glim} \mu_n$ ,
2.  $\text{glim}(\lambda \lambda_n) = \lambda \text{glim} \lambda_n$ ,
3.  $\text{glim} \lambda_n = \lim \lambda_n$  dacă  $\{\lambda_n\}$  este convergent
4.  $\text{glim} \lambda_n = \text{glim} \lambda_{n+1}$
5.  $\text{glim} \lambda_n \geq 0$ ,      dacă  $\lambda_n \geq 0 \quad \forall n$ .

În cele ce urmează vom avea nevoie totuși numai de proprietățile 1, 2, 3, 5. Este evident că  $\text{glim } \lambda_n = (\text{glim } \bar{\lambda}_n)$ .

Vom mai avea nevoie și de noțiunea de semiprodus scalar introdusă în § 3, cap. 2 și pentru completitudine o reamintim.

Fie  $X$  un spațiu Banach și  $[,]$  o aplicație de la  $X \times X$  în mulțimea numerelor complexe cu următoarele proprietăți:

1.  $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$ ,
2.  $[\lambda x, \mu y] = \lambda \bar{\mu} [x, y]$ ,
3.  $[x, x] = \|x\|^2$ ,
4.  $|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$ .

Este ușor de arătat utilizând teorema de prelungire a lui Hahn-Banach că există un semiprodus scalar pe spațiul  $X$ .

Să considerăm  $m(X)$  spațiul șirurilor de elemente din  $X$

$$x = (x_i)$$

$x_i \in X$  și  $\{\|x_i\|\} \in m$  care se poate organiza în mod evident ca un spațiu vectorial și pentru orice  $x, y \in m(X)$  să punem

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \text{glim } [x_n, y_n]$$

și să arătăm că

$$N = \{x, \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\} = \{x, \langle\langle x, y \rangle\rangle = 0, \quad \forall y \in m(X).$$

Această afirmație rezultă din proprietatea 4. În adevăr, cum

$$\langle\langle x, x \rangle\rangle = \text{glim } \|x_n\|^2,$$

atunci dacă  $x \in N$

$$|\langle\langle x, y \rangle\rangle| \leq |\text{glim } [x_n, y_n]| \leq \text{glim } [x_n, x_n].$$

$$[y_n, y_n] \leq k \text{glim } [x_n, x_n] = 0$$

unde  $k > \sup \|x_n\|^2$ . Pe spațiul cît  $m(X)/N$  putem defini un semiprodus scalar punînd pentru orice elemente

$$(x + \eta, y + \eta),$$

$$\langle\langle \tilde{x}, y \rangle\rangle = \text{glim } \langle x_n, y_n \rangle,$$

unde  $x + \eta \ni \{x_n\}$ ,  $y + \eta \ni \{y_n\}$ , deoarece  $\langle\langle \rangle\rangle$  este o seminormă și pe spațiul cît obținem o normă, însă este posibil ca spațiul cît  $m(X)/N$  să nu fie complet. Evident că  $X$  poate fi considerat ca un subspațiu al spațiului  $m(X)/N$  al cărui completat îl notăm cu  $\tilde{X}$ . Deci avem

$$X \subset m(X)/N \subset \tilde{X}.$$

Dacă  $T \in \mathcal{L}(X)$  și  $x \in m(X)$  atunci putem defini un operator pe  $m(X)$  prin

$$\tilde{T}(x) = (Tx_n)$$

și evident  $\tilde{T}(x) \in m(X)$ . Dacă  $x \in \eta$  atunci cum

$$[Tx_n, Tx_n] \leq \|T\|^2 [x_n]^2$$

deducem că  $\tilde{T}$  invariază pe  $N$ . Deci avem aplicația

$$\tilde{T}: m(X)/N \rightarrow m(X)/N$$

definită prin

$$(x'_n) \rightarrow (Tx_n)',$$

unde  $(.)'$  am notat clasa de echivalență corespunzătoare. Cum  $X$  este un subspațiu al lui  $m(X)/N$  avem că

$$\|T\| \geq \|\tilde{T}\| \geq \|T\|$$

și deci  $\tilde{T}$  se poate extinde în spațiul  $\tilde{X}$  la un operator  $T_0$  cu aceeași normă ca  $T$ . Evident că aplicația

$$T \rightarrow T_0$$

este un homomorfism al algebrei  $\mathcal{L}(X)$  în algebra  $\mathcal{L}(\tilde{X})$ . Rămîne să arătăm că spectrele se păstrează.

În adevăr, dacă  $\lambda \in \sigma(T)$  există  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel încît

$$y_n = Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$$

și deci  $\lim [y_n, y_n] = 0$  care ne dă că  $\lambda \in \sigma(T_0)$  și dacă nu este în  $\sigma(T_0)$ , atunci nu este spectrul lui  $\sigma(T)$  și afirmația este demonstrată. Mai mult din cele de mai sus vom observa că orice punct din  $\sigma_{ap}(T)$  este în spectrul punctual al operatorului  $T_0$ , deoarece

$$T_0 \{(x_n)\} = \lambda \{x_n\}.$$

Această construcție permite să demonstrăm mai simplu teorema 4.5.3.

În adevăr, dacă  $P(z_1, \dots, z_n)$  este un polinom de  $n$  variabile atunci orice  $\mu \in \sigma(P(T_1, \dots, T_n))$  este de forma  $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  unde  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  este în spectrul comun al operatorilor  $T_1, \dots, T_n$ .

Partea a doua rezultă imediat deoarece dacă  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma(A_1) \otimes \dots \otimes \sigma(A_n)$ , deducem că există în spațiul  $\tilde{X}_n$  elementele

$$\{\tilde{x}_i\}, \quad T_0 \tilde{x}_i = \lambda_i \tilde{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

și obținem că pentru

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{x}_n$$

$$P(T_1, \dots, T_n) \tilde{x} = P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tilde{x}$$

și teorema este demonstrată.

În legătură cu rezultatele obținute pentru spectru, apare în mod natural problema naturii rangului numeric al produsului tensorial și în acest sens este de așteptat ca să avem relația

$$(*) \quad \overline{W(T \otimes S)} = \overline{\text{conv } W(T) \cdot W(S)}$$

dar după cum vom arăta mai jos această relație nu poate avea loc în general.

În adevăr, fie  $A$  operatorul pe spațiul finit-dimensional cu matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și să luăm  $S = A$ ,  $T = A^*$ . Cum avem

$$W(S) = \{z, |z| \leq 1/2\}$$

rezultă că

$$\overline{\text{conv } W(S) \cdot W(T)} \subseteq \{z, |z| \leq 1/4\}$$

și cum  $S \otimes T$  are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix}$$

deducem că

$$\langle (S \otimes T)x, x \rangle = 1/2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H \times H$$

$\|x\| = 1$ , dacă  $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  și afirmația este demonstrată.

Are loc următoarea

**TEOREMA 4.6.5.** Oricare ar fi  $S, T$  operatori liniari și mărginiți pe spațiul Hilbert  $H$

$$\overline{W(S \otimes T)} \supseteq \overline{\text{conv } (W(S)) \cdot W(T)}.$$

*Demonstrație.* Fie  $\lambda \in W(S)$  și  $\mu \in W(T)$  și deci există  $x, y \in H$  astfel ca

$$1. \quad \|x\| = \|y\| = 1$$

$$2. \quad \langle Sx, x \rangle = \lambda, \quad \langle Ty, y \rangle = \mu$$

și deci

$$\lambda\mu = ((S \otimes T), (x \otimes y)) \in W(S \otimes T).$$

Cum  $\overline{W(S \otimes T)}$  este o mulțime convexă și închisă, afirmația teoremei este acum evidentă.

Teorema următoare dă o condiție suficientă pentru ca să aibă loc relația (\*).

**TEOREMA 4.6.6.** *Dacă  $S$  și  $T$  sînt operatori din  $\mathcal{L}(H)$  atunci  $S \otimes T$  este convexoid, atunci  $S \otimes T$  satisface relația (\*).*

*Demonstrație.* Cum  $\text{conv } \sigma(S) \subset \overline{W(S)}$  și  $\text{conv } \sigma(T) \subset \overline{W(T)}$  deducem că

$$\text{conv } (\sigma(S \otimes T)) = \text{conv } (\sigma(S) \cdot \sigma(T)) = \text{conv } (\text{conv } \sigma(S) \cdot$$

$$\text{conv } \sigma(T)) \subseteq \text{conv } (\overline{W(S)} \cdot \overline{W(T)}) = \overline{\text{conv } W(S) \cdot W(T)}$$

și cum  $S \otimes T$  este convexoid

$$\overline{\text{conv } W(S) \cdot W(T)} \subseteq \overline{W(S \otimes T)} = \text{conv } \sigma(S \otimes T)$$

și deci (\*) are loc. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă arată un caz în care teorema 4.6.6. se poate aplica.

**TEOREMA 4.6.7.** *Dacă  $S, T$  sînt operatori hiponormali pe spații Hilbert atunci  $S \otimes T$  este un operator hiponormal.*

*Demonstrație.* Avem

$$(S \otimes T)^* (S \otimes T) - (S \otimes T) (S \otimes T)^* = (S^* S - S S^*) \otimes T T^* + \\ + S S^* \otimes (T^* T - T T^*) \geq 0$$

și cum orice operator hiponormal este convexoid rezultă că putem aplica teorema 4.6.6.

**TEOREMA 4.6.8.** *Dacă  $S$  și  $T$  sînt operatori convexoizi atunci (\*) are loc dacă și numai dacă  $S \otimes T$  este convexoid.*

*Demonstrație.* Dacă  $S \otimes T$  este convexoid atunci evident că (\*) are loc. Fie deci  $S, T$  convexoizi și (\*) adevărată. În acest caz

$$\text{conv } \sigma(S \otimes T) = \text{conv } (\sigma(S) \cdot \sigma(T)) = \text{conv } (\text{conv } \sigma(S) \cdot$$

$$\text{conv } \sigma(T)) = \overline{\text{conv } (W(S) \cdot W(T))} = \overline{W(S \otimes T)}$$

și teorema este demonstrată.

Exemplele care urmează arată că în teorema 4.6.8. condițiile puse nu pot fi slăbite.

Fie  $A$  operatorul cu matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

care are rangul numeric  $\{z, |z| \leq 1/2\}$  și fie  $B$  un operator arbitrar cu proprietatea că  $\overline{W(B)} = \text{conv } \sigma(B) = \{z, |z| \leq 1/2\}$ . Să punem  $S = A \oplus \oplus B$  și  $T = S^*$  de unde deducem că

$$\overline{W(S)} = \text{conv } \sigma(S) = \{z, |z| \leq 1/2\},$$

$$\overline{W(T)} = \text{conv } \sigma(T) = \{z, |z| \leq 1/2\},$$

dar se vede ușor că  $1/2 \in W(S \otimes T)$  și evident  $1/2 \notin \text{conv } \sigma(S \otimes T)$  și deci  $S \otimes T$  nu este convexoid.

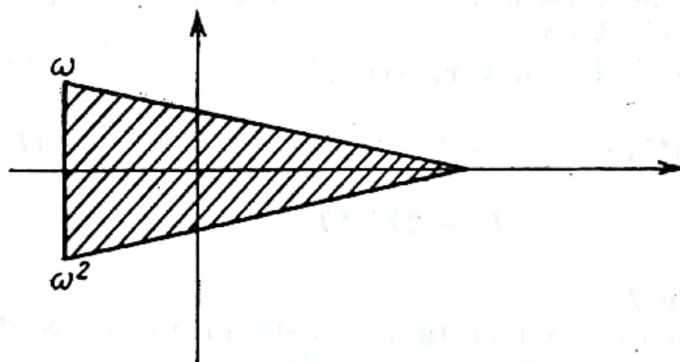
Fie  $S$  și  $T$  operatori care au forma

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

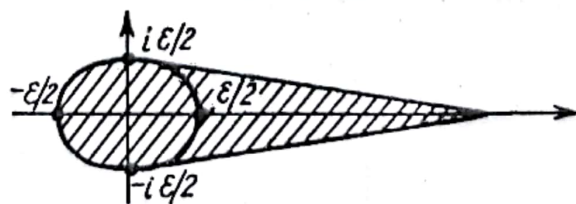
cu  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ . În acest caz avem

$$\sigma(S) = \{0, 1\}, \quad \sigma(T) = \{1, \omega, \omega^2\}; \quad \omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Cum  $T$  este un operator unitar,  $T$  este convexoid și deci  $\overline{W(T)}$  este dată în figura de mai jos



adică triunghiul cu vîrfurile în  $1, \omega$  și  $\omega^2$ . Dar  $\overline{W(S)}$  este dat în figura care urmează



și deci  $S$  nu este convexoid. Dar

$$\text{conv } \sigma(S \otimes T) = \text{conv } (\sigma(S), \sigma(T)) = \text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}.$$

Să luăm

$$S_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

și în acest caz

$$W(S_\varepsilon \otimes T) \leq \|S_\varepsilon \otimes T\| = \varepsilon < 1/2$$

de unde deducem că

$$\overline{W(S_\varepsilon \otimes T)} \subseteq \{z, |z| \leq 1/2\} \leq \overline{W(T)}$$

și deci

$$\begin{aligned} \overline{W(S \otimes T)} &= \overline{\text{conv} (W(S_\varepsilon \otimes T) \cup W(T))} = \text{conv } \overline{W(T)} = \\ &= \overline{W(T)} = \text{conv } \sigma(T) = \text{conv } (\sigma(S \otimes T)). \end{aligned}$$

Rezultă astfel că există operatorii  $S, T$  astfel ca  $S \otimes T$  să fie convexoid fără ca  $S$  și  $T$  să fie operatori convexoizi.

Am văzut mai sus că produsul tensorial a doi operatori normaloizi sau hiponormali este din nou normaloid sau hiponormal. Este normal să ne punem problema pentru operatori de clasă  $(N)$ .

Are loc următoarea :

**TEOREMA 4.6.9.** *Dacă  $T$  este de clasă  $(N)$  atunci  $T \otimes I, I \otimes T$  este un operator de clasă  $(N)$ .*

*Demonstrație.* În adevăr, avem

$$\begin{aligned} (T \otimes I)^* (T \otimes I)^2 - 2\lambda (T \otimes I)^* (T \otimes T) + \lambda^2 (I \otimes I) &= \\ = (T^{*2} T^2 - 2\lambda T^* T + \lambda^2 I) \otimes I &\geq 0 \end{aligned}$$

și similar pentru  $I \otimes T$ .

Următorul exemplu arată că există operatorii  $S, T$  de clasă  $(N)$  astfel încât  $S \otimes T$  nu este de clasă  $(N)$ .

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $K = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus H$ , iar  $A, B$  operatori pozitivi pe  $H$ , să definim operatorul  $T$  pe  $K$  prin

$$T(x_n) = (y_n)$$

cu

$$y_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ A x_1, & n = 2, \\ B x_{n-1}, & n \geq 3, \end{cases}$$

iar  $(x_n) \in K$  și evident  $(y_n) \in K$ . În acest caz avem

$$\begin{aligned} & (T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 I)(x_n) = \\ & = \{(AB^2A - 2\lambda A^2 + \lambda^2 I)x_1, (B^2 - \lambda I)^2x_2, \dots, (B^2 - \lambda I)^2x_n, \dots\} \end{aligned}$$

și deci  $T$  este de clasă  $(N)$  dacă și numai dacă

$$AB^2 - A - 2\lambda A^2 + \lambda^2 I \geq 0$$

oricare ar fi  $\lambda \geq 0$ . Să luăm  $C$  și  $D$  doi operatori pe un spațiu 2-dimensional astfel ca să aibă matricele

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

și deci  $C \geq 0$ ,  $D \geq 0$  cu

$$D - 2\lambda C + \lambda^2 I = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 I & 2(1-\lambda) \\ 2(1-\lambda)I & ((2-\lambda^2) + 4)I \end{pmatrix}$$

oricare ar fi  $\lambda \geq 0$ . Să punem  $A = C^{1/2}$  și  $B = (C^{-1/2} D C^{-1/2})^{1/2}$  care ne dă că  $T$  este de clasă  $(N)$ . Însă  $T \otimes T$  nu este de clasă  $(N)$ . Pentru aceasta ar trebui să avem

$$(T \otimes T)^{*2} (T \otimes T)^2 - 2(T \otimes T)^* (T \otimes T) + I \otimes I \geq 0$$

care ne dă că

$$D \otimes D - 2C \otimes C + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 2 & 12 & 12 & 57 \end{pmatrix},$$

deci nu este pozitiv.

Un rezultat pozitiv în ceea ce privește operatorii de clasă  $(N)$  este dat în :

**TEOREMA 4.6.10.** Dacă  $T$  este hiponormal și  $S$  de clasă  $(N)$  atunci  $S \otimes T$  este de clasă  $(N)$ .

*Demonstrație.* Este clar că teorema se reduce la a arăta că dacă

1.  $ST = TS$ ,
2.  $ST^* = T^*S$ ,

atunci  $ST$  este de clasă  $(N)$ .

Cum

$$T^*T - TT^* \geq 0, \quad T^{*2}T^2 - (T \ T^*)^{1/2}$$

vom avea

$$\begin{aligned} & (ST)^{*2} (ST)^2 - 2\lambda (ST)^* ST + \lambda^2 I = \\ &= S^{*2} S^2 (T^{*2} T^2) - 2\lambda S^* S T^* T + \lambda^2 I \geq \\ &\geq S^{*2} S^2 (T^* T)^2 - 2\lambda (S^* S T^* T) + \lambda^2 I. \end{aligned}$$

Dacă  $T^* T = \int t \, dE_t$  atunci

$$\begin{aligned} & S^{*2} S^2 (T^* T)^2 - 2\lambda S^* S T^* T + \lambda^2 I = \\ &= \int [t^2 S^{*2} S^2 - 2\lambda t S^* S + \lambda^2] \, dE_t \end{aligned}$$

și cum  $S$  este de clasă  $(N)$   $\sqrt{t}$   $S$  este de clasă  $(N)$  și inegalitatea de mai sus este pozitivă. Teorema este demonstrată.

## SUBSPAȚII INVARIANTE ȘI TEOREME DE STRUCTURĂ

## § 1. INTRODUCERE

*O teoremă de existență.* John von Neumann a demonstrat că dacă  $T$  este un operator liniar și mărginit pe un spațiu Hilbert  $H$  și are proprietatea de a fi compact, atunci există un subspațiu închis  $H_1$  astfel ca

1.  $\{0\} \neq H_1 \neq H$ ,
2. dacă  $x \in H_1$  atunci  $Tx \in H_1$ .

Un astfel de subspațiu se spune că este subspațiu invariant pentru  $T$ . Această teoremă a lui von Neumann a fost regăsită de către N. Aronszajn și extinsă împreună cu K. T. Smith la cazul cînd avem un spațiu Banach. Utilizînd teorema lui von Neumann-Aronszajn-Smith, J. T. Schwartz a demonstrat că orice operator definit pe un spațiu Hilbert cu partea imaginară într-o clasă  $C_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) are subspații proprii care sînt invariante pentru orice operator care comută cu operatorul dat. Astfel de rezultate mai obținuse și R. Godement și apoi J. Wermer utilizînd rezultate profunde de analiză armonică.

Vom menționa că teorema lui von Neumann-Aronszajn-Smith a fost extinsă la operatori pe spații local convexe de către J. Dixmier după cum se menționează în expunerea lui R. Pallu de la Barrière consacrată teoremei lui Wermer (Seminaire Bourbaki, Decembrie 1953).

Rezultate importante au mai obținut Robinson și Bernstein care au arătat că teorema lui von Neumann-Aronszajn-Smith este adevărată dacă operatorul este polinomial compact, iar J. Feldman a arătat, în cazul spațiilor Hilbert, că un operator nilpotent cu proprietatea că algebra cu unitate cea mai mică care-l conține are un operator compact, are de asemenea un subspațiu invariant. W. Arveson a arătat că este suficient să se presupună în loc de proprietatea de a fi nilpotent, aceea că pentru un anume  $e$ , avem  $\liminf \|T^n e\|^{1/n} = 0$ .

Sub această formă rezultatul a fost extins la spații Banach de către K. Kitano.

De asemenea N. Suzuki a arătat că dacă  $A$  și  $B$  sînt doi operatori definiți pe un spațiu Hilbert, care sînt pozitivi atunci  $T = AB$  are un subspațiu propriu invariant.

Recent, V.I. Lomonosov a demonstrat o teoremă remarcabilă arătînd că orice operator care comută cu un operator compact are subspații invariante care sînt și subspații invariante pentru orice operator care comută cu operatorul compact.

În cele ce urmează vom expune această teoremă remarcabilă a lui Lomonosov, apoi vom da o teoremă care extinde teorema lui Suzuki cu o demonstrație mai simplă și în sfârșit o teoremă care generalizează o teoremă a lui Stampfli pentru operatori hiponormali și o teoremă privind o clasă de operatori stabilită de Embry.

Are loc următoarea :

**TEOREMA 5.1.1.** *Dacă  $T$  este compact atunci există un subspațiu invariant pentru orice  $S \in \mathfrak{B}_T$ .*

*Demonstrație.* Demonstrația constă dintr-o aplicare ingenioasă a teoremei de punct fix a lui Schauder.

Pentru teorema de punct fix a lui Schauder a se vedea [282]. Vom menționa că altă aplicație a teoremelor de punct fix la această problemă se găsește în [536].

Pentru a începe demonstrația vom observa că putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $T$  nu are vectori proprii. În adevăr dacă

$$m_{\lambda_0} = \{x, Tx = \lambda_0 x\}$$

atunci  $m_{\lambda_0}$  satisface teorema căci dacă  $m_{\lambda_0} = X$  atunci  $T = \lambda_0 I$  și afirmația este în contradicție cu faptul că  $T$  este compact.

De asemenea este evident că există  $x_0$  și o sferă  $S = S(x_0, 1) = \{x, \|x - x_0\| \leq 1\}$  astfel ca  $\inf_{x \in S} \|Tx\| > 0$ . Să notăm cu  $\overline{TS} = \overline{\{Tx, x \in S\}}$ . Dacă  $T$  nu are subspații invariante pentru orice  $K \in \mathfrak{B}_T$  rezultă că pentru orice  $y \in \overline{TS}$  există  $S \in \mathfrak{B}_T$  astfel ca  $\|Sy - x_0\| < 1$  deoarece, în caz contrar, închiderea spațiului generat de  $Sy$ ,  $S \in \mathfrak{B}_T$  este un spațiu care satisface condițiile teoremei.

Cum mulțimea  $\overline{TS}$  este compactă există un număr finit de operatori  $\{T_1, \dots, T_n\}$  astfel ca pentru orice element  $y \in \overline{TS}$  există  $i = i(y)$  astfel ca  $\|T_i y - x_0\| < 1$ .

Să considerăm acum funcția

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

și să definim aplicația  $G: \overline{TS} \rightarrow X$  prin

$$G_y = \frac{\sum_{i=1}^n f(\|T_i y - x_0\|) T_i y}{\sum_{i=1}^n f(\|T_i y - x_0\|)}$$

care este continuă. Mai mult  $Gy \in S$  oricare ar fi  $y \in \overline{TS}$ . Fie  $T_1 = G_0 T$  care este o aplicație continuă și are următoarele proprietăți

$$1^\circ. T_1 S \subset S,$$

$$2^\circ. T_1 \text{ este compact.}$$

Conform teoremei lui Schauder de punct fix există  $\xi$  astfel ca  $T_1 \xi = \xi$ ,  $\xi \in S$  și deci

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T_i T \xi = \xi,$$

unde

$$\alpha_i = \frac{f(\|T_i y - x_0\|)}{\sum_{j=1}^n f(\|T_j y - x_0\|)}.$$

Cum operatorul  $\tilde{T} = \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i T$  este compact și mulțimea elementelor

$$\tilde{m} = \{\xi, \tilde{T}\xi = \xi\}$$

nu se reduce la zero, rezultă că  $T$  are valori proprii deoarece  $\tilde{m}$  trebuie să fie un spațiu de dimensiune finită. În adevăr sfera sa unitate  $\tilde{S}$  este compactă, deoarece dacă nu ar fi așa, fie  $\alpha(\cdot)$  măsura de necompactitate a lui Kuratowski și deci

$$\alpha(\tilde{S}) = \alpha(\tilde{T}S) = 0$$

avem  $\tilde{S}$  este compactă. În acest mod am obținut o contradicție și teorema este demonstrată.

**Observații. 5.1.2.** Raționamentele expuse nu depind de corpul peste care se consideră spațiul Banach  $X$  și deci sînt adevărate pentru spații reale sau complexe.

**5.1.3.** Din această teoremă rezultă ușor o extensie a teoremei de structură a operatorilor pentru care orice subspațiu invariant reduce operatorul și operatorul este polinomial compact, teoremă care va fi expusă în § 7.

## § 2. TEOREMA LUI SUZUKI ȘI O GENERALIZARE A EI. ALTE TEOREME PRIVIND SUBSPAȚIILE INVARIANTE

În cele ce urmează  $X$  va fi un spațiu Banach, iar  $A$  și  $B$  doi operatori pe  $X$  cu următoarea proprietate:  $A^{1/2}$  există și  $A^{1/2} B A^{1/2}$  este un element hermitic pe  $X$ . În acest caz are loc

**TEOREMA 5.2.1.** Operatorul  $AB$  are subspații invariante.

*Demonstrație.* Cum  $A^{1/2}BA^{1/2}$  are subspații invariante, fie  $m$  un astfel de subspațiu și să punem

$$a(m) = \overline{\{x, A^{1/2}x, x \in m\}}$$

care satisface condițiile teoremei. În adevăr, pentru orice  $y = A^{1/2}x$  avem

$$AB y = ABA^{1/2}x = A^{1/2}A^{1/2}BA^{1/2}x \subset A^{1/2}m \subset a(m)$$

și cum orice element din  $a(m)$  este limita unor elemente de această formă deducem că din  $y \in a(m)$  rezultă  $AB y \in a(m)$ . Evident că  $\{0\} \neq a(m)$ . Să arătăm că este diferit de  $X$ . În adevăr, dacă ar fi așa, am avea că  $\{A^{1/2}x, x \in m\}$  este dens în  $X$  și deci  $\{A^{1/2}(BA^{1/2}x)\}$  ar fi dens în  $X$  adică  $m$  ar fi dens în  $X$ . Aici am presupus că  $\{y, A^{1/2}y\}_{y \in X} = \{By\}_{y \in X} = X$  care nu restrânge generalitatea. Teorema este astfel demonstrată.

*Observații 5.2.2.1)* Teorema lui Suzuki se referă la cazul când  $A, B$  sînt operatori hermitici pozitivi pe un spațiu Hilbert și condiția  $A^{1/2}BA^{1/2}$  este automat satisfăcută.

2) Este de remarcat următoarea schemă în care se încadrează teorema de mai sus: dacă  $ABA$  are subspații invariante atunci și  $A^2B$  are subspații invariante.

Fie acum  $X$  un spațiu Hilbert și  $T$  un operator de clasă  $(N, k)$ , adică un operator cu proprietatea că pentru orice  $x \in X, \|x\| = 1$  are loc relația  $\|Tx\|^k \leq \|T^k x\|$ . Are loc următoarea:

**TEOREMA 5.2.3.** *Dacă mulțimea vectorilor maximali<sup>1</sup> pentru operatorul  $T$  de clasă  $(N, k)$  este nevidă, atunci există un subspațiu invariant propriu pentru  $T$ .*

*Demonstrație.* Fie

$$m_{T, \max} = \{x, \|Tx\| = \|T\| \|x\|\}$$

și deci pentru orice  $x \in m_{T, \max}$  avem

$$\|T^k x\| \geq \|Tx\|^k = (\|T\| \|x\|)^k = \|T\|^k,$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \|T(Tx)\| &\leq \|T\| \|Tx\| = \|T\|^2 \|x\| = \|T\|^2 = \frac{1}{\|T\|^{k-2}} \|T\|^k \leq \\ &\leq \frac{1}{\|T\|^{k-2}} \|T^k x\| = \frac{1}{\|T\|^{k-2}} \|T^{k-2}(T^2 x)\| \leq \frac{\|T^{k-2}\|}{\|T\|^{k-2}} \|T^2 x\| \leq \|T(Tx)\| \end{aligned}$$

și în acest mod

$$\|T(Tx)\| = \|T\| \|Tx\|$$

<sup>1</sup> Un vector  $x \in X$  se spune că este maximal pentru  $T$  dacă

$$\|Tx\| = \|T\| \|x\|.$$

În acest mod  $Tx \in m_{T, \max}$  pentru orice  $x \in m_{T, \max}$ . Să arătăm că este propriu. Dacă nu atunci teorema este iarăși adevărată, ceea ce este evident, deoarece în acest caz operatorul  $\frac{T}{\|T\|}$  este o izometrie. Teorema este demonstrată.

**Observații 5.2.4.** Cazul când operatorul  $T$  este hiponormal a fost considerat de către J. Stampfli.

Ar fi interesant dacă subspațiul de mai sus este invariant și pentru orice operator care comută cu  $T$ .

Pentru următoarea teoremă vom avea nevoie de unele noțiuni preliminare.

**DEFINIȚIA 5.2.5.** O subalgebră  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$  se spune că este strict ciclică dacă pentru un anumit  $x \in X$ ,  $\mathcal{A}x = \{Tx, T \in \mathcal{A}\} = X$  și este o algebră închisă în  $\mathcal{L}(X)$ . Vectorul  $x$  se spune vector strict ciclic.

Se spune că  $\mathcal{A}$  separă dacă  $Tx = 0$ ,  $T \in \mathcal{A}$  atunci în mod necesar  $T = 0$  și dacă  $Tx = 0$  dacă și numai dacă  $T = 0$  vom spune că  $x$  este separator pentru  $\mathcal{A}$ .

De asemenea se spune că  $\mathcal{A}$  este intranzitivă dacă există un subspațiu invariant pentru orice  $T \in \mathcal{A}$ .

Prin  $\mathcal{A}'$  vom nota mulțimea tuturor operatorilor din  $\mathcal{L}(X)$  care comută orice element din  $\mathcal{A}$ .

Are loc următoarea :

**TEOREMA 5.2.6.** Dacă  $\mathcal{A}$  este o algebră strict ciclică atunci  $\mathcal{A}'$  este intranzitivă.

Demonstrația teoremei va rezulta dintr-o lemă care prezintă interes și în sine.

**LEMA 5.2.7.** Dacă  $x$  este un vector strict ciclic pentru algebra  $\mathcal{A}$  atunci :

1° există  $k > 0$  astfel ca

$$\|T'\| \leq k \|Tx\|,$$

oricare ar fi  $T' \in \mathcal{A}'$  și  $T \in \mathcal{A}$ ,

2° dacă  $\lim x_n = 0$  există  $\{T_n\} \subset \mathcal{A}$  astfel încât

$$\lim \|T_n\| = 0 \text{ și } T_n x = x_n,$$

3° dacă  $x$  este separator pentru  $\mathcal{A}$  atunci există  $k_1 > 0$  astfel ca oricare ar fi  $T \in \mathcal{A}$  să avem

$$\|T\| \leq k_1 \|Tx\|.$$

**Demonstrație.** Să considerăm aplicația

$$\mathcal{A} \rightarrow X$$

definită prin  $\tilde{T}(T) = Tx$  care este surjectivă și deci există  $k_1 > 0$  astfel ca  $\|T\| \leq k_1 \|Tx\|$ , deci 1° este demonstrată.

Pentru a demonstra 3° vom observa că deoarece  $\tilde{T}$  este o surjecție,  $\tilde{T}^*$  are inversă continuă și deci există  $k > 0$  astfel ca

$$\|x^*\| \leq k \|T^*x^*\|,$$

oricare ar fi  $x^* \in X^*$ . Fie acum  $T \in \mathcal{A}$ ,  $\|T\| = 1$ ,  $E \in \mathcal{A}'$ , de unde obținem

$$\begin{aligned} |\tilde{T}^*(E^*x^*)(T)| &= |E^*x^*(Tx)| = |x^*(ETx)| = |x^*(TEx)| = \\ &= |(T^*x^*)(Ex)| \leq \|T^*x^*\| \|Ex\| \leq \|x^*\| \|Ex\| \end{aligned}$$

și deci

$$\begin{aligned} \|E^*x^*\| &\leq k \|\tilde{T}^*(E^*x^*)\| = k \sup \{ |\tilde{T}^*(E^*x^*)(T)| : T \in \mathcal{A}, \|T\| = 1 \} \leq \\ &\leq k \|x^*\| \|Ex\|. \end{aligned}$$

În acest mod avem că

$$\|E\| = \|E^*\| \leq k \|Ex\|$$

deci 3° este demonstrată.

Să arătăm că are loc și 2°. Vom considera spațiul cît  $\mathcal{A}/m$  unde  $m$  este  $\text{Ker } \tilde{T} = \{T : Tx = 0\}$ . Cum  $T' : \mathcal{A}/m \rightarrow X$  definită prin  $T'[T] = Tx$  este o surjecție deducem că există  $\tilde{k}$  astfel încît

$$\|[T]\| \leq \tilde{k} \|T'(T)\| = \tilde{k} \|Tx\|.$$

Fie acum  $\lim x_n = 0$  și  $E_n x = x_n$  cu  $E_n \in \mathcal{A}$  care există conform ipotezei. Deducem că are loc relația

$$\lim \|[E_n]\| = 0$$

și cum

$$\|[E_n]\| = \inf \{\|A_n\|, A_n x = E_n x\}$$

putem alege  $\{A_n\}$  cu proprietatea cerută de 2°. Lema este astfel demonstrată.

Demonstrația teoremei se poate face acum astfel. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că există un element diferit de zero, neinvertibil în  $\mathcal{A}'$  căci în caz contrar  $\mathcal{A}' = \{zI\}$  și să presupunem că acesta este  $E$ .

Fie  $X_1 = \mathcal{A}' E x$  unde  $x$  este vectorul strict ciclic și să considerăm închiderea sa  $\bar{X}_1$ . Dacă  $x \in \bar{X}_1$  atunci  $x = \lim E_n E x$  pentru un anume șir  $\{E_n\} \subset \mathcal{A}'$  și deci, conform lemei vom avea că

$$\lim \|E_n E - I\| = 0$$

și astfel dacă  $n$  este suficient de mare

$$\|E_n E - I\| < 1.$$

De aici rezultă că  $E_n E$  este invertibil și deci  $E_n$  este surjectiv însă nu este biunivoc deoarece  $E$  nu este invertibil. Să punem

$$X_2 = \mathcal{A}' E_n x.$$

Același argument ca mai sus arată că  $x \notin \bar{X}_2 =$  închiderea lui  $X_2$ . Deci  $\bar{X}_1$  sau  $\bar{X}_2$  sînt subspații invariante pentru  $\mathcal{A}'$  și teorema este astfel demonstrată.

### § 3. OPERATORI COMPLET REDUCTIBILI; UN EXEMPLU

Vom începe prin a da definiția operatorilor complet reductibili prin :

**DEFINIȚIA 5.3.1.** Un operator pe un spațiu Hilbert  $H$  se numește complet reductibil dacă restricția operatorului la orice subspațiu care îl reduce posedă un subspațiu care îl reduce.

Este evident că orice operator normal este complet reductibil după cum rezultă ușor utilizînd, de exemplu, descompunerea spectrală a sa. Are loc :

**LEMA 5.3.2.** Dacă  $H$  este un spațiu finit-dimensional atunci orice operator complet reductibil este normal.

*Demonstrație.* Fie  $T$  un operator definit pe spațiul finit-dimensional  $H$  și  $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = H$  o familie de subspații strict crescătoare care reduc pe  $T$  și putem presupune fără a restrînge generalitatea că  $\dim H = n$ . În acest caz evident că  $\dim M_i = i$  și  $\dim M_1 = 1$ . Fie  $x_1 \in M_1$ . În acest caz  $Tx_1 = \lambda_1 x_1$  și cum  $M_1$  reduce pe  $T$ , avem că  $T^*x_1 = \bar{\lambda}_1 x_1$ . De asemenea cum  $\dim M_2 = 2$  avem că  $M_1 \oplus M_1^\perp = M_2$  unde complementul ortogonal este calculat în raport cu  $M_2$ . Evident că  $M_1^\perp$  este de asemenea un subspațiu care reduce pe  $T$  și  $x_2 \in M_1^\perp$  avem  $Tx_2 = \lambda_2 x_2$  cu  $T^*x_2 = \bar{\lambda}_2 x_2$ . Continuînd în acest mod obținem că  $T$  este normal și lema este demonstrată.

Vom observa că există exemple de operatori definiți pe spații Hilbert (necesar infinit-dimensionale) care sînt complet reductibili și care nu sînt normali. Vom da acum un astfel de exemplu.

Fie pentru aceasta  $H = \mathcal{L}^2[0, 1]$  și operatorul  $T : H \rightarrow H$  definit prin

$$(Tf)(x) = xf(x)$$

care este evident hermitic

$$\langle Tf, f \rangle = \langle f, Tf \rangle.$$

Să considerăm spațiul  $H \oplus H$  al perechilor  $(x, y)$  și cu produsul scalar

$$\langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

și să definim operatorul  $\tilde{T}$  cu ajutorul matricii

$$\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

iar un calcul simplu arată că avem

$$\tilde{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^* & I \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}^* T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^2 + I \end{pmatrix}.$$

Să arătăm că orice subspațiu care reduce pe  $\tilde{T}$  este de forma  $N \oplus N$  unde  $N$  este un subspațiu invariant pentru  $T$ . Fie  $M$  un subspațiu care reduce pe  $\tilde{T}$  și  $\tilde{N}$  subspațiul liniar invariant pentru  $T$  generat de elementele  $f \in \mathcal{L}^2[0, 1]$  astfel că există  $g \in \mathcal{L}^2[0, 1]$  cu proprietatea că  $(f, g) \in M$  sau  $(g, f) \in M$ . Evident că  $M \subset N \oplus N$ . Să arătăm că și afirmația reciprocă este adevărată. Fie deci  $(h, k)$  un element al lui  $M$  și cum pentru orice întreg  $n$ , elementul  $(\tilde{T}^* \tilde{T})^n (h, k) \in M$ , rezultă că  $\{0\} \oplus \{U(T^2 + I)k\}$  este în  $M$ . Să considerăm algebra polinoamelor fără termen constant având ca variabilă  $\xi = x^2 + 1$  care se verifică ușor că satisface ipotezele din teorema lui Weierstrass-Stone și deci este densă în  $\mathcal{C}[0, 1]$ , spațiul funcțiilor continue pe  $[0, 1]$ , de unde rezultă imediat că algebra acestor polinoame este densă în  $\mathcal{L}^2[0, 1]$ . Deci elementul  $(0, k) \in M$  și deci  $(h, 0) \in M$ .

Deci

$$\{0\} + \oplus \bigcup_0^\infty \{T^{2^n}k\}, \{0\} \oplus \bigcup_0^\infty \{(T^{2^{n+1}})h\}, \bigcup_0^\infty \{T^{2^n}h\} \oplus \{0\}$$

și  $\bigcup_0^\infty \{T^{2^{n+1}}h\} \oplus \{0\}$  sînt în  $M$  după cum rezultă ușor aplicînd  $\tilde{T}$  și  $\tilde{T}^*$  elementelor  $(0, k)$  și  $(h, 0)$ . Dacă  $(h, k) \in M$ , atunci  $(h, 0)$  și  $(0, k)$  sînt în  $M$  și deci  $N \oplus N$  este în  $M$ .

Vom mai remarca și faptul că acest operator are proprietatea că

$$\tilde{T}^2 - \tilde{T} = 0$$

și  $\dim \{x, \tilde{T}x = 0\} = \infty$ .

#### § 4. TEOREMA LUI ANDÔ ȘI EXTENSII ALE ACESTEIA

Fie  $T$  un operator normal pe un spațiu Hilbert. Putem demonstra următoarea teoremă :

**TEOREMA 5.4.1.** *Orice subspațiu invariant al unui operator normal  $T$  care posedă una din proprietățile :*

1.  *$T$  este polinomial compact,*

2.  $\operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*),$

*este compactă, atunci orice subspațiu invariant îl reduce.*

*Demonstrație.* Vom avea nevoie de următorul rezultat care prezintă interes și în sine și pe care îl dăm sub formă de leamnă.

LEMA 5.4.2. Dacă  $T$  este un operator haponormal și  $M$  un subspațiu invariant al lui  $T$  astfel că  $T_M = TP_M$  este un operator normal, atunci  $M$  reduce pe  $T$ .

Prin  $P_M$  am notat proiecția ortogonală pe spațiul  $M$ .

*Demonstrația lemei.* Cum presupunem că  $TP_M$  este normal, rezultă că avem relația

$$P_M T^* T P_M = T P_M T^*$$

și cum

$$P_M T^* P_M = P_M T^*$$

rezultă că avem și

$$\begin{aligned} \|(T^* P_M - P_M T^*)x\|^2 &= \langle T T^* P_M x, P_M x \rangle - \langle T P_M T^* P_M x, x \rangle - \\ &- \langle P_M T P_M T^* x, x \rangle + \langle T P_M T^* x, x \rangle \leq \langle T^* T P_M x, x \rangle - \langle T P_M T^* x, x \rangle - \\ &- \langle T P_M T^* x, x \rangle + \langle P_M T^* T P_M x, x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Rezultă astfel că  $T^* P_M = P_M T^*$  și  $TP_M = P_M T$ . Lema este demonstrată.

*Demonstrația teoremei 5.4.1.* Fie  $M$  un subspațiu invariant pentru  $T$  și să considerăm operatorul  $T_M = TP_M$  care este un operator haponormal. Rezultă că  $T_M$  este un operator normal și din leamnă avem că  $M$  reduce pe  $T$  și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă a fost dată pentru  $p(z) = z$  de T. Andô și pentru  $p(z) = z^n$  de T. Saitô. În expunerea care urmează vom urma prezentarea făcută de T. Saitô [440]. Menționăm că teorema a fost stabilită de autor.

TEOREMA 5.4.3. Fie  $T$  un operator definit pe un spațiu Hilbert și să presupunem că pentru operatorul  $T$  au loc următoarele proprietăți:

1.  $T$  este polinomial compact,
2. orice subspațiu invariant reduce pe  $T$ ,

sau:

1'.  $T$  este un operator cu parte imaginară într-o clasă von Neumann-Schatten  $C_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),

2'. restricția la orice subspațiu invariant este cu proprietatea 1'.

În acest caz  $T$  este un operator normal.

*Demonstrație.* Vom avea nevoie de o leamnă cu caracter tehnic care ne asigură existența unui subspațiu minimal.

LEMA 5.4.4. Fie  $K$  un operator compact definit pe un spațiu Hilbert  $H$  și  $\{M_\alpha\}$  o familie total ordonată de subspații invariante ale lui  $K$ , cu proprietatea că

$$\|P_{M_\alpha} K\| = \|K\|.$$

În acest caz avem că

$$\|P_{M_0}K\| = \|K\|,$$

unde  $M_0 = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$  dat. În acest caz pentru fiecare  $\alpha$  există  $x_{\alpha}$ ,  $\|x_{\alpha}\| = 1$  astfel încît să avem

$$\|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})Kx_{\alpha}\| > \|(P_{M_0} - P_{\alpha})K\| - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Cum  $\{x_{\alpha}\}$  este o mulțime mărginită și operatorul  $K$  compact, există  $\{x_{\alpha_v}\}$  care converge tare către un element  $x$ . Cum  $P_{M_0}$  este limita tare a șirului  $\{P_{M_{\alpha}}\}$  există  $v$  astfel ca

$$\|(P_{M_{\alpha_v}} - P_{M_0})x\| < \frac{\varepsilon}{4} \|Kx_{\alpha_v} - x\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Din aceste relații rezultă că avem și

$$\begin{aligned} \|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})K\| &< \|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})Kx_{\alpha_v}\| + \varepsilon/4 \leq \\ &\leq \|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})(Kx_{\alpha_v} - x)\| + \|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})x\| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\ &\leq 2\|Kx_{\alpha_v} - x\| + \|(P_{M_0} - P_{M_{\alpha}})x\| + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Cum  $\varepsilon > 0$  a fost ales arbitrar deducem că

$$\|P_{M_0}K\| = \lim \|P_{M_{\alpha_v}}K\| = \|T\|.$$

Lema este demonstrată.

*Demonstrația teoremei 5.4.3.* Să presupunem că sînt satisfăcute condițiile 1 și 2, iar pentru orice punct  $\xi \in \sigma_p(T)$ , spectrul punctual al lui  $T$ , subspațiul

$$E_{\xi}(T) = \{x, Tx = \xi x\}$$

este invariant și  $E_{\xi}$  reduce pe  $T$ . De aici rezultă că

$$\begin{aligned} \|T^*x - \bar{\xi}x\|^2 &= \langle TT^*x, x \rangle - 2\operatorname{Re}\bar{\xi}\langle Tx, x \rangle + |\xi|^2\|x\|^2 = \\ &= \xi\langle x, Tx \rangle - 2|\xi|^2\|x\|^2 + |\xi|^2\|x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

deoarece dacă  $x \in E_{\xi}(T)$  atunci și  $T^*x \in E_{\xi}(T)$ . Rezultă astfel că familia subspațiilor  $\{E_{\xi}(T)\}_{\xi \in \sigma_p(T)}$  este o familie de subspații ortogonale care reduce pe  $T$ . Să punem  $H_0 = \sum_{\xi \in \sigma_p(T)} \oplus E_{\xi}(T)$  și  $T_0 = T|_{H_0}$  care este evident un

operator normal. Să notăm cu  $Q$  proiecția pe subspațiul  $H_1 = H_0^\perp$  și  $T_1 = TQ$ . Să arătăm că  $T_1$  este operatorul zero. În adevăr, în caz contrar  $p(T)_1 = p(T)Q$  și deci este un operator compact și  $p(T_1) \neq 0$  căci în caz contrar am avea

$$\prod_{k=1}^n (T - \lambda_k I)x = 0,$$

cu  $x \in H_1$  și  $p(\lambda) = \alpha \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$ . Deci  $H_0$  nu ar fi maximal căci am găsi vectori proprii pentru  $T$  în  $H_1$ . Rezultă că  $\|p(T_1)\| \neq 0$ . În acest caz conform teoremei lui Bernstein-Robinson există subspații proprii invariante pentru  $T_1$ . Fie  $\mathcal{F}$  familia subspațiilor invariante pentru  $T$  și astfel ca

$$\|P_M p(T_1)\| = \|p(T_1)\|,$$

dacă  $M \in \mathcal{F}$ . Dacă introducem o relație de ordine  $\leq$  în mulțimea acestor subspații prin relația de incluziune

$$M \leq N \text{ dacă } M \subseteq N,$$

se verifică ușor că putem aplica lema lui Zorn și lema 5.4.4, obținând un subspațiu minimal  $M_0$ . Cum  $p(T_1) \neq 0$ ,  $M_0 \neq \{0\}$ . Dacă  $\dim M_0 \geq 2$ ,  $M_0$  conține, conform tot teoremei lui Bernstein-Robinson un subspațiu invariant propriu, pe care să-l notăm cu  $N_0$ , care conform ipotezei reduce pe  $T_1$  și deci

$$\|p(T_1)\| = \|P_{M_0} p(T_1)\| = \max\{\|P_{N_0} p(T_1)\|, \|(P_{M_0} - P_{N_0})p(T_1)\|\},$$

de unde rezultă că  $N_0$  sau  $M_0 \cap N_0^\perp$  sînt în  $\mathcal{F}$  și aceasta contrazice ipoteza minimalității lui  $M_0$ . Deci  $\dim M_0 = 1$  și în acest caz

$$M_0 = \{\alpha_0 x_0, \quad \alpha_0 \in C\}$$

și  $Tx_0 = \lambda x_0$  pentru un anumit  $\lambda$  în  $C$ , aceasta este iarăși o contradicție. Deci  $T_1 = 0$  și teorema în cazul cînd condițiile 1 și 2 sînt îndeplinite este demonstrată.

Demonstrația în cazul cînd sînt îndeplinite condițiile 1' și 2' se face în mod asemănător și de aceea o omitem.

## § 5. O GENERALIZARE A NOȚIUNII DE OPERATOR COMPLET REDUCTIBIL

Fie  $T$  și  $S$  doi operatori definiți pe un spațiu Hilbert  $H$ . O generalizare a noțiunii de operator complet reductibil poate fi introdusă prin :

DEFINIȚIA 5.5.1. Operatorii  $(T, S)$  formează o pereche reductibilă dacă  $M$  este un subspațiu invariant pentru  $T$  și  $S$ , restricțiile  $T|_M$  și  $S|_M$  au un subspațiu propriu invariant  $M_1$  comun și de asemenea  $M_1^\perp$  are această proprietate.

Pentru studiul proprietăților acestei clase de operatori avem nevoie de următoarea lema.

**LEMA. 5.5.2.** *Dacă  $\{M_\alpha\}$  este o familie total ordonată de subspații în spațiul  $H$  (pe care-l presupunem separabil) și dacă punem  $N = \bigcap_\alpha M_\alpha$ , atunci există o familie numărabilă de subspații  $\{M_{\alpha_i}\} \subset \{M_\alpha\}$  astfel ca  $\bigcap_i M_{\alpha_i} = N$  și  $M_{\alpha_{i+1}} \subset M_{\alpha_i}$  pentru fiecare  $i$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $\complement N$  este complementara mulțimii  $N$ , atunci avem  $\complement N = \bigcup_\alpha \complement M_\alpha$  și cum  $\complement N$  este spațiu Lindelöf, există o acoperire numărabilă  $\{\complement M_{\alpha_i}\}$ . În acest caz evident  $N = \{M_{\alpha_i}\}$ . Pentru a obține și proprietatea  $M_{\alpha_{i+1}} \subset M_{\alpha_i}$  eliminăm acei  $M_{\alpha_i}$  pentru care nu are loc proprietatea menționată, lucru care nu restrânge generalitatea deoarece familia este total ordonată. Lema este astfel demonstrată.

Putem demonstra următoarea :

**TEOREMA 5.5.3.** *Dacă  $(T, S)$  este o pereche reductibilă și subspațiul  $E_\lambda(T) = \{x, Tx = \lambda x\}$  este finit-dimensional, atunci  $E_\lambda(T)$  este invariant pentru  $S$ .*

*Demonstrație.* Să notăm cu  $\mathfrak{F}$  familia subspațiilor  $M$  din  $H$  care sînt invariante pentru  $T$  și  $S$  și care intersectează subspațiul  $E_\lambda(T)$  nu numai cu  $\{0\}$ . Din lema lui Zorn există o familie de subspații total ordonată maximală în  $\mathfrak{F}$ ,  $\{M_\alpha\}$ . Din lema rezultă că  $N = \bigcap M_\alpha$  și aceasta ne va ajuta să arătăm că  $N$  este nevidă. În adevăr, pentru orice  $i$  există  $x_i \in E_\lambda(T)$  astfel ca

$$1. \|x_i\| = 1,$$

$$2. Tx_i = \lambda x_i$$

și cum  $E_\lambda(T)$  este finit-dimensional putem extrage un subsir convergent al șirului  $\{x_i\}$ . Putem presupune, pentru a nu complica scrierea că este chiar acesta. În acest caz  $x_i \rightarrow x_0$  și evident  $\|x_0\| = 1$ ,  $Tx_0 = \lambda x_0$ , rezultă că  $N \in \mathfrak{F}$ .

Să arătăm că dimensiunea lui  $N$  este 1. În adevăr, dacă ar fi mai mare decît 1 atunci  $T|_N$  și  $S|_N$  ar avea un subspațiu propriu invariant comun  $L$ . În acest caz  $L$  sau  $L^\perp \cap N$  ar fi subspații invariante comune pentru ei și deci ar fi în  $\mathfrak{F}$  ceea ce contrazice minimalitatea lui  $N$ . Deci  $\dim N = 1$  și există  $x_1 \in N$  astfel ca  $Tx_1 = \lambda x_1$  și  $Sx_1 = \mu x_1$ . Dacă  $\dim N > 1$  atunci aplicăm același raționament pentru  $T, S$  pe subspațiul  $\{x_1\}^\perp$ . Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 5.5.4.** *Dacă  $(T, S)$  este o pereche reductibilă și dacă există un operator compact  $A$  diferit de zero cu proprietatea că orice subspațiu  $M$  care reduce pe  $A$  are proprietatea că  $M$  și  $M^\perp$  sînt subspații invariante pentru  $T$  și  $S$ . În acest caz  $T$  și  $S$  au un vector propriu comun.*

*Demonstrație.* Fie  $\mathfrak{F}$  familia acelor subspații ale operatorului  $A$  care-l reduc și pentru orice  $M \in \mathfrak{F}$ ,  $\|A|_M\| = \|A\|$ . Conform cu lema 5.5.2, există  $M_{\alpha_i}$  astfel ca

$$N = \bigcap_i M_{\alpha_i} = \bigcap_\alpha M_\alpha, \quad M_\alpha \in \mathfrak{F} = \{M_\alpha\}.$$

Să arătăm că  $\dim N = 1$  și în primul rând că este diferit de zero. În adevăr, există  $x_i$  astfel ca

$$\|x_i\| = 1, \quad \|Ax_i\| = \|A\|, \quad x_i \in M_{\alpha_i}$$

și putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $\{x_i\}$  este un șir convergent. În acest caz este clar că  $x = \lim x_i \in N$  și deci  $N \in \mathcal{F}$ . Exact ca mai sus arătăm că  $\dim N > 1$  duce la o contradicție și deci  $\dim N = 1$  care ne dă afirmația teoremei.

## § 6. STRUCTURA OPERATORILOR POLINOMIAL COMPACTI

Utilizînd teorema de existență a subspațiilor invariante pentru clasa operatorilor polinomial compacti expunem teoreme care stabilesc structura acestor clase mai întîi în cadrul general al spațiilor Banach și apoi pentru clasa operatorilor de același tip definiți pe spații Hilbert și care sînt operatori normali. Vom menționa că teorema de structură pentru operatorii normali polinomiali compacti poate fi demonstrată, așa după cum a arătat S. Berberian într-un mod simplu utilizînd proprietățile spectrului Weyl al unui operator; noi vom expune aceasta în capitolul dedicat teoriei spectrului Weyl.

### 6.1. OPERATORI POLINOMIAL COMPACTI PE SPAȚII BANACH

Fie  $X$  un spațiu Banach complex și  $T$  un operator în  $\mathcal{L}(X)$ , algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $X$ . Să presupunem că există un polinom  $p(\lambda)$  astfel încît  $p(T)$  să fie un operator compact. Există un polinom de grad cel mai mic astfel ca  $p(T)$  să fie compact. Putem presupune că un astfel de polinom este unic dacă cerem ca coeficientul lui  $\lambda^n$  să fie 1. Un astfel de polinom îl vom numi polinom minimal pentru  $T$ .

Următoarea teoremă arată structura operatorilor polinomiali compacti:

**TEOREMA 5.6.1.** *Fie  $T$  un operator polinomial compact și  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$  descompunerea polinomului minimal pentru  $T$ . În acest caz spațiul Banach  $X$  se descompune în suma directă*

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k,$$

iar  $T$  este de forma

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k,$$

astfel încît pentru orice  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ,  $T_i$  este restricția operatorului  $T$  la subspațiul invariant  $X_i$  și operatorii  $(T_i - \lambda_i)^{n_i}$  sînt toți compacti.

Spectrul operatorului  $T$  constă dintr-o mulțime numărabilă de puncte avînd posibil pe  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  puncte limită ale spectrului și orice  $\lambda_i$  este ori limită de valori proprii ori  $(T_i - \lambda_i)$  este cvasinilpotent.

**Demonstrație.** Să arătăm mai întîi că orice rădăcină  $\lambda_i$  este în  $\sigma(T)$ . Să presupunem că nu este așa. Deducem că  $(T - \lambda_i)^{-1}$  există și deci opera-

torul  $(T - \lambda_i)^{-1}p(T)$  este compact și polinomul  $(\lambda - \lambda_i)^{-1}p(\lambda)$  are gradul mai mic decât gradul lui  $p(\lambda)$  și am obținut o contradicție. Cum avem

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

deducem că  $\sigma(T)$  este o mulțime finită sau numărabilă.

Cum  $p(\lambda)$  este (evident) o funcție continuă și singurul punct de acumulare al mulțimii  $\sigma(p(T))$  este zero, după cum rezultă din teoria operatorilor compacți, deducem că singurele puncte de acumulare ale mulțimii  $\sigma(T)$  sînt rădăcinile polinomului  $p(\lambda)$ .

Fie  $\lambda \in \sigma(T)$  un punct izolat astfel ca  $p(\lambda) \neq 0$ . Să arătăm că  $\lambda$  este o valoare proprie și

$$E_\lambda(T) = \{x, Tx = \lambda x\}$$

este un spațiu finit-dimensional.

Fie  $\delta$  un domeniu în planul complex astfel ca  $\lambda \in \delta$  și  $\bar{\delta} \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ . Să punem

$$P_\delta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\delta} (T - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

și  $X_\lambda = P_\delta X$  care este un subspațiu invariant pentru  $T$  și  $\sigma(T|_{X_\lambda}) = \{\lambda\}$ . Cum  $p(\lambda) \neq 0$  rezultă că  $p(T)|_{X_\lambda}$  este un operator invertibil și compact. Deci în acest caz trebuie să avem  $X_\lambda$  un spațiu finit-dimensional. Cum  $\{\lambda\} = \sigma(T|_{X_\lambda})$  rezultă că  $X_\lambda = \{x, (T - \lambda I)^n x = 0\}$  pentru un întreg  $n$  suficient de mare. Deci  $\lambda$  este valoare proprie și afirmațiile făcute mai sus sînt demonstrate.

Să considerăm acum  $\lambda \in \sigma(T)$  și  $p(\lambda) = 0$ , iar  $\lambda$  are proprietatea de a fi de asemenea un punct izolat. Să considerăm  $V_1$  și  $V_2$  domenii în plan astfel ca închiderile  $\bar{V}_1$  și  $\bar{V}_2$  să satisfacă relația

$$\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$$

și în același timp să avem îndeplinite condițiile :

1.  $V_1 \cup V_2 \subset \sigma(T)$ ,
2.  $\lambda \in V_1$ ,
3.  $\bar{V}_1 \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ .

Să punem

$$X_{V_1} = P_{V_1} X, \quad X_{V_2} = P_{V_2} X$$

și atunci avem că  $X = X_{V_1} \oplus X_{V_2}$ , iar  $T = T_{V_1} \oplus T_{V_2}$ , unde  $T_{V_1}$  respectiv  $T_{V_2}$  înseamnă restricția operatorului  $T$  la subspațiul  $X_{V_1}$  respectiv  $X_{V_2}$ . Cum  $\{\lambda\} = \sigma(T_{V_1})$  și  $\lambda \in \sigma(T_{V_2})$  deducem că  $(T_{V_2} - \lambda I_{V_2})^{-1} p(T_{V_2})$  este un operator compact și cum acest polinom trebuie să fie minimal, rezultă că  $X_{V_2}$  trebuie să fie de dimensiune infinită și  $(T_{V_2} - \lambda I_{V_2})$  este evasinilpotent.

Fie acum  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  rădăcinile polinomului  $p(z)$  și  $\{\delta_i\}_1^k$  domenii în planul complex astfel încît :

1.  $\lambda_i \in \delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ,
2.  $\partial\delta_i$  = frontiera domeniului  $\delta_i$  este o curbă Jordan rectificabilă, pentru  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ,

3.  $\bar{\delta}_i \cap \bar{\delta}_j = \emptyset, i \neq j,$
4. dacă  $\lambda_i$  este un punct izolat în  $\sigma(T)$  atunci  $\delta_i \cap \sigma(T) = \{\lambda_i\},$
5.  $\sigma(T) \subset \bigcup_{i=1}^k \delta_i.$

Pentru fiecare  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  să punem  $P_{\delta_i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \delta_i} (T - \lambda)^{-1} d\lambda$  și  $X_i = P_{\delta_i} X$  care sînt subspații invariante pentru fiecare  $i = 1, 2, \dots, k.$  Să notăm cu  $T_i$  restricția operatorului  $T$  la subspațiul  $X_i$  și să punem  $I_i = I|_{X_i}.$  Din proprietățile 1–5 rezultă că :

1.  $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_k,$
2.  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k,$
3.  $\sigma(T_i) = \sigma(T) \cap \delta_i.$

Dacă  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$  operatorul  $(T_i - \lambda_i I_i)^{n_i}$  este compact, căci în caz contrar  $p(\lambda)$  nu ar fi minimal. Teorema este astfel demonstrată.

## § 7. OPERATORI NORMALI POLINOMIAL COMPACTI

Vom considera acum cazul unui operator  $T$  care este normal și polinomial compact. Din teorema de structură demonstrată mai sus rezultă ușor următoarea teoremă :

**TEOREMA 5.7.1.** *Dacă  $T$  este un operator normal polinomial compact și  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$  este polinomul său minimal, atunci au loc următoarele proprietăți :*

1.  $\sigma(T)$  constă dintr-o mulțime numărabilă,
2. o parte din  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  sînt valori proprii de multiplicitate finită,
3. celelalte puncte din  $\sigma(T)$  sînt sau valori proprii izolate de multiplicitate infinită sau limite de valori proprii,
4.  $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_k$  și  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k,$  unde fiecare  $X_i$  reduce pe  $T_i$  iar  $T_i - \lambda_i I_i$  sînt operatori compacți.

*Demonstrație.* Toate proprietățile 1–3 și descompunerea 4 rezultă din teorema de mai sus. Cum  $T_i - \lambda_i I_i$  este un operator hiponormal cu  $(T_i - \lambda_i I_i)^{n_i}$  compact, rezultă că este în fapt un operator normal și chiar compact. De aici rezultă evident proprietatea 4. Teorema este demonstrată.

## § 8. OPERATORUL DE TRANSLAȚIE; OPERATORI CVASISIMILARI

Vom arăta mai întîi cîteva rezultate privind operatorul de translație și apoi vom studia rolul subspațiilor care reduc în cazul operatorilor similari și cvasisimilari.

## 8.1. OPERATORUL DE TRANSLAȚIE

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $l^2_+(H) = H \oplus H \oplus \dots \oplus H \oplus \dots$ , spațiul Hilbert al șirurilor  $x = (x_i)_0^\infty$ ,  $x_i \in H$  astfel

$$\|x\|^2 = \sum \|x_i\|^2 < \infty$$

și cu produsul scalar

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \sum \langle x_i, y_i \rangle,$$

unde  $y = (y_i)$ ,  $y_i \in H$ , iar  $\langle, \rangle$  este produsul scalar pe spațiul Hilbert  $H$ .

DEFINIȚIA 5.8.1. Operatorul de translație unilaterală  $U_+$  pe spațiul  $l^2(H)$  este prin definiție operatorul definit pe  $l^2(H)$  prin

$$U_+(x) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots),$$

iar multiplicitatea sa este prin definiție  $n = \dim H$ .

DEFINIȚIA 5.8.2. Operatorul de translație cu ponderile  $\alpha = \{\alpha_n\}$  este prin definiție operatorul  $U_+$  definit prin

$$U_+(x) = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n, \dots).$$

Să considerăm spațiul Hilbert  $l^2(H) = \Sigma \oplus H$  definit ca spațiul șirurilor  $x = (x_i)_0^\infty$  cu  $x_i \in H$  și astfel ca

$$\sum \|x_i\|^2 < \infty.$$

DEFINIȚIA 5.8.3. Operatorul de translație bilateral este prin definiție operatorul

$$U : l^2(H) \rightarrow l^2(H)$$

dat prin

$$U(x) = U(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_1, x_0, x_1, \dots)$$

(și care este evident un operator unitar).

DEFINIȚIA 5.8.4. Fie  $T$  un operator definit pe un spațiu Hilbert  $H$ . Se spune că un subspațiu  $M$  închis reduce pe  $T$  dacă oricare ar fi  $x \in M$  avem că  $Tx \in M$  și  $T^*x \in M$ . Un operator se spune că este ireductibil dacă nu are alte subspații invariante care reduc decât  $H$  și  $\{0\}$ .

DEFINIȚIA 5.8.5. Operatorul  $T$  este similar cu operatorul  $S$  dacă există  $A$  un operator mărginit și invertibil astfel ca

$$T = ASA^{-1}.$$

Are loc următoarea teoremă importantă :

TEOREMA 5.8.6. Orice operator  $T$  care este similar cu operatorul de translație cu ponderile diferite de zero, este ireductibil.

Noi nu vom demonstra această teoremă. Vom demonstra o teoremă mai generală, de unde va rezulta foarte simplu această teoremă. Menționăm că teorema 5.8.6. a fost demonstrată de N. Suzuki și H. Bencke.

Vom avea nevoie de un rezultat ajutător.

Fie  $H$  un spațiu Hilbert separabil și  $\{\mathcal{O}_n\}$  o bază ortonormală a sa și în acest caz operatorul de translație unilateral cu ponderile  $\{\alpha_n\}$  este operatorul definit prin

$$A\mathcal{O}_n = \alpha_n \mathcal{O}_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

și adjunctul său este operatorul dat prin relațiile

$$A^*\mathcal{O}_0 = 0, \quad A^*\mathcal{O}_n = \bar{\alpha}_n \mathcal{O}_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Să demonstrăm :

**LEMA 5.8.7.** *Spațiul Hilbert  $H$  nu poate fi descompus ca sumă directă algebrică a două subspații invariante netriviiale ale operatorului  $A$ .*

*Demonstrație.* Să presupunem că afirmația lemei nu este adevărată și deci  $H$  se poate scrie ca suma directă algebrică a subspațiilor invariante netriviiale  $M$  și  $N$ . Cum  $M \cap N = \{0\}$  putem presupune că  $\mathcal{O}_0 \in M$ . Deci  $\mathcal{O}_0 = \Psi_1 + \Psi_2$  cu  $\Psi_1 \in M$  și  $\Psi_2 \in N$ . Cum avem

$$\Psi_1 = \sum \lambda_n \mathcal{O}_n$$

$$\Psi_2 = \sum \mu_n \mathcal{O}_n$$

și din  $\mathcal{O}_0 = \Psi_1 + \Psi_2$  deducem că au loc relațiile

$$\mu_0 = 1 - \lambda_0,$$

$$\mu_n = -\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

și deci  $-\Psi_2 = \sum_1^\infty \lambda_n \mathcal{O}_n + (\lambda_0 - 1)\mathcal{O}_0$ . Cum  $N$  este invariant pentru  $A^*$  rezultă că

$$A^*(-\Psi_2) = \sum_1^\infty \lambda_n \bar{\alpha}_{n-1} \mathcal{O}_{n-1}$$

este în  $N$ . Cum însă avem  $A^*\Psi_1 = \sum_1^\infty \lambda_n \bar{\alpha}_{n-1} \mathcal{O}_{n-1} \in M$  și deci  $\Psi = \sum_1^\infty \lambda_n \bar{\alpha}_{n-1} \mathcal{O}_{n-1} \in M \cap N$  și cum  $\alpha_n \neq 0$ , iar  $\lambda_n \neq 0$  am obținut o contradicție și lema este demonstrată.

Pentru formularea teoremei care reprezintă o generalizare a teoremei 5.8.6. vom avea nevoie de noțiunea de cvasisimilaritate.

DEFINIȚIA 5.8.8. Dacă  $T$  și  $S$  sînt operatori definiți pe spațiul Hilbert  $H$ , atunci se spune că sînt cvasisimilari dacă există operatorii liniari și mărginiți  $A$  și  $B$  astfel ca :

1.  $AT = SA$ ;  $TB = BS$ ,
2.  $A, B$  au proprietatea că  $\{x, Ax = 0\} = \{x, Bx = 0\} = \{0\}$  și  $\{y, y = Ax\}_{x \in H} = H = \{y, y = Bx\}_{x \in H}$ .

*Observație.* Este evident că dacă  $T$  și  $S$  sînt operatori similari atunci sînt și operatori cvasisimilari. Mai mult, relația  $T \sim B$  ( $T$  este cvasisimilar cu  $B$ ) este, după cum se poate verifica ușor o relație de echivalență.

TEOREMA 5.8.9. Orice operator  $T$  pe un spațiu Hilbert separabil care este cvasisimilar cu operatorul de translație unilateral cu ponderi diferite de zero este ireductibil.

*Demonstrație.* Fie  $M$  un subspațiu care reduce pe  $T$  adică

$$TM \subset M \text{ și } T^*M \subset M.$$

Cum, dacă  $R, S$  sînt operatorii care intervin în definiția cvasisimilarității, avem

$$ST = AS,$$

$$TR = RA,$$

de unde deducem

$$A^*R^*M = R^*T^*M \subset R^*M,$$

$$A^*R^*M^\perp = R^*T^*M^\perp \subset R^*M^\perp,$$

unde  $M^\perp$  înseamnă subspațiul ortogonal spațiului  $M$ . Este clar că  $R^*M$  și  $R^*M^\perp$  sînt subspații invariante pentru operatorul  $A$  și cum spațiul Hilbert  $H$  se poate scrie

$$H = R^*M + R^*M^\perp,$$

care contrazice lema 5.8.7 și teorema este demonstrată.

*Observație.* Este cunoscut că orice operator spectral în sensul lui Dunford (pe spații Hilbert) este de forma  $S + N$ , unde  $S$  este un operator scalar, iar  $N$  este un operator cvasinilpotent (adică  $\sigma(N) = 0$ ) și  $NS = SN$ . De asemenea este cunoscut că orice operator scalar pe spații Hilbert este similar cu un operator normal. Noțiunea de cvasisimilaritate sugerează introducerea unei clase mai vaste de operatori decît cea considerată de N. Dunford și anume astfel :

DEFINIȚIA 5.8.10. Operatorul  $R$  se va numi cvasispectral dacă admite scrierea

$$R = T + N,$$

unde  $TN = NT$ ,  $N$  este cvasinilpotent, iar  $T$  este cvasisimilar cu un operator normal.

Apare astfel în mod natural necesitatea studierii acestei clase din punctul de vedere al teoriei operatorilor spectrali cît și al generalizării teoremei 5.8.6., la această clasă de operatori.

## § 9. CLASE DE SUBSPAȚII CARE REDUC

Este cunoscut că dîndu-se un operator  $T$  pe un spațiu Hilbert există subspații invariante ale lui  $T$  care sînt invariante pentru orice operator care comută cu  $T$ . Operatori cu această proprietate au fost studiați pentru prima dată de R. Godement în 1947.]

Un astfel de subspațiu al lui  $T$  se va numi hiperinvariant.

Dăm următoarea definiție :

DEFINIȚIA 5.9.1. Un subspațiu  $M \subset H$  se va numi hiperreductibil pentru operatorul  $T$  dacă :

1. reduce pe  $T$ ,
2. reduce orice operator care comută cu  $T$ .

Fie  $\mathfrak{L}(H)$  mulțimea subspațiilor (închise) ale lui  $H$  și să definim pentru orice  $M, N \in \mathfrak{L}(H)$

$$\theta(M, N) = \|P_M - P_N\|$$

unde  $P_M, P_N$  sînt proiecțiile ortogonale pe cele două subspații. Este ușor de văzut că  $\theta$  este o metrică pe  $\mathfrak{L}(H)$ . Dacă  $\mathcal{S}_T$  înseamnă mulțimea subspațiilor care reduc operatorul  $T$ , atunci aceasta este un spațiu metric complet.

În adevăr, dacă  $\{M_n\}$  este un șir Cauchy în  $\mathcal{S}_T$  atunci avem că  $\{P_{M_n}\}$  este un șir Cauchy în  $\mathfrak{L}(H)$ , algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $H$  și  $P_{M_n} \rightarrow P$ . Cum avem pentru orice  $n$

$$P_{M_n} T P_{M_n} = T P_{M_n},$$

$$P M_n T^* P_{M_n} = T^* P_{M_n},$$

rezultă că avem și relațiile

$$P T P = T P,$$

$$P T^* P = T^* P$$

și afirmația este demonstrată.

DEFINIȚIA 5.9.2. Un subspațiu  $M$  invariant pentru  $T$  se va numi inaccesibil dacă singura funcție continuă

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{S}_T$$

( $\mathfrak{S}_T =$  mulțimea subspațiilor invariante ale lui  $T$ ) este funcția constantă.

Putem demonstra următoarea teoremă:

**TEOREMA 5.9.3.** *Dacă  $M$  este un subspațiu invariant pentru  $T$  astfel că:*

1.  $M$  reduce pe  $T$ ,
2.  $M$  este inaccesibil,

*atunci  $M$  reduce orice operator  $S$  cu proprietatea că  $ST = TS$ .*

Înainte de a trece la demonstrația acestei teoreme vom da o leamnă care prezintă interes și în sine.

**LEMA 5.9.4.** *Dacă  $M_i, i = 1, 2$  sînt subspații ale spațiului Hilbert  $H$  și  $C_i, i = 1, 2$  operatori liniari și mărginiți care satisfac relația*

$$\|C_i x\| \geq \varepsilon_i \|x\|, \quad \varepsilon_i > 0$$

*oricare ar fi  $x \in H$ . Dacă  $N_i = C_i M_i, i = 1, 2$  atunci  $N_i$  sînt subspații închise și are loc relația*

$$\|P_{N_1} - P_{N_2}\| \leq \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \|C_1 - C_2\| + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \|C_2\| + \frac{1}{\varepsilon_2} \|C_1\| \right) \|P_{M_1} - P_{M_2}\|.$$

**Demonstrație.** Este evident că  $N_i, i = 1, 2$  sînt subspații închise. Dacă  $I$  înseamnă operatorul identitate atunci avem

$$\|P_{N_1} - P_{N_2}\| \leq \|P_{N_1}(I - P_{N_2})\| +$$

$$+ \|(I - P_{N_1})P_{N_2}\| = \|(I - P_{N_1})P_{N_2}\| + \|(I - P_{N_2})P_{N_1}\|$$

și deci va fi suficient să arătăm că are loc inegalitatea

$$\|(I - P_{N_2})P_{N_1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \|C_1 - C_2\| + \frac{1}{\varepsilon_2} \|C_2\| \|P_{M_1} - P_{M_2}\|.$$

Fie pentru aceasta  $x \in H, \|x\| = 1$  și  $x = y_1 + z_1$  cu  $y_1 \in N$  și  $z_1 \in N_1$ , iar  $w_1 \in M_1$  astfel ca  $C_1 w_1 = y_1, w_2 = P_{M_2} w_1$ , iar  $y_2 = C_2 w_2$ . Atunci  $y_2 \in N_2$  și avem

$$\begin{aligned} \|(I - P_{N_2})P_{N_1}x\| &= \|(I - P_{N_2})P_{N_1}y_1\| \leq \|(I - P_{N_2})y_2\| + \\ &+ \|(I - P_{N_2})(y_1 - y_2)\| = \|(I - P_{N_2})(C_1 w_1 - C_2 w_2)\| \leq \|C_1 w_1 - C_2 w_2\| + \\ &+ \|C_2 w_1 - C_2 w_2\| \leq \|C_1 - C_2\| \|w_1\| + \|C_2\| \|(P_{M_1} - P_{M_2})y_1\| \leq \\ &\leq \|C_1 - C_2\| \frac{1}{\varepsilon_1} \|y_1\| + \|C_2\| \|P_{M_2} - P_{M_1}\| \frac{1}{\varepsilon_1} \|y_1\| \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \|C_1 - C_2\| + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_1} \|C_2\| \|P_{M_1} - P_{M_2}\| \end{aligned}$$

și lema este astfel demonstrată.

Să trecem acum la demonstrația teoremei 5.8.3. Este cunoscut că  $M$  reduce pe  $T$  dacă și numai dacă  $M^\perp$  este invariant pentru  $T$ . Fie  $S$  un operator care comută cu  $T$  și putem presupune fără a restrânge generalitatea că

$$0 < \lambda < \|S\| = 1.$$

Să considerăm funcția

$$\Psi : \lambda \rightarrow (I - \lambda S^*)M^\perp$$

pentru  $\lambda \in [0, 1)$ . Operatorul  $(I - \lambda S^*)$  pentru  $\lambda \in [0, 1)$  este invertibil și deci  $(I - \lambda S^*)M^\perp$  sînt subspații închise. Mai mult sînt subspații invariante pentru  $T^*$ . În adevăr,

$$T^*(I - \lambda S^*)M^\perp = (I - \lambda S^*)T^*M^\perp \subset (I - \lambda S^*)M^\perp.$$

Din lema deducem că aplicația

$$\lambda \rightarrow (I - \lambda S^*)M^\perp$$

este continuă, deoarece, punînd  $M_\lambda^* = (I - \lambda S^*)M^\perp$  avem

$$\|P_{M_\lambda^*} - P_{M_\mu^*}\| \leq \{(I - \lambda S^*)^{-1}\| + \|(I - \mu S^*)^{-1}\|\} \|\lambda - \mu\| \|S\|.$$

Cum pentru  $\lambda = 0$  valoarea funcției este  $M^\perp$ , dacă nu ar fi așa (adică o constantă) atunci funcția

$$\lambda \rightarrow \Psi(\lambda)^\perp$$

ar da o funcție neconstantă cu proprietatea că  $\Psi(\lambda)^\perp = M$  și am obține astfel o contradicție. Deci  $\Psi$  este constantă și

$$(I - \lambda S^*)M^\perp = M^\perp,$$

de unde rezultă că

$$S^*M^\perp = M^\perp$$

și teorema este demonstrată.

*Observație.* Apare în mod natural următoarea problemă : dacă  $A$  și  $B$  sînt doi operatori cvasisimilari și  $A$  are un subspațiu inaccesibil atunci și  $B$  are?

Din teorema 5.8.3. putem obține unele informații privind subspațiile invariante ale lui  $T$ .

**COROLARUL 5.9.5.** *Dacă  $M$  este un subspațiu izolat în  $\mathcal{F}_T$  și  $M$  reduce pe  $T$  atunci  $M$  reduce orice operator care comută cu  $T$ .*

**DEFINIȚIA. 5.9.6.** Un subspațiu  $M$  comută cu  $\mathcal{F}_T$  dacă oricare ar fi  $N \in \mathcal{F}_T$ ,  $P_M$  și  $P_N$  comută. Subspațiul  $M$  se spune punct maxim pentru  $\mathcal{F}_T$  dacă pentru orice  $N \in \mathcal{F}_T$  avem  $N \subset M$  sau  $M \subset N$ .

**COROLARUL 5.9.7.** *Fie  $M$  un subspațiu invariant pentru  $T$  și care comută cu  $\mathcal{F}_T$ . Dacă  $M$  reduce pe  $T$  atunci  $M$  reduce orice operator care comută cu  $T$ .*

**COROLARUL 5.9.8.** *Dacă  $M$  este un punct de maxim în  $\mathcal{F}_T$  și  $M$  reduce pe  $T$  atunci  $M$  reduce orice operator care comută cu  $T$ .*

## OPERATORI SIMETRIZABILI ȘI GENERALIZĂRI ALE LOR

Scopul capitolului de față este de a expune rezultatele obținute în teoria operatorilor simetrizabili cât și unele aplicații ale acestora la unele probleme importante, printre care vom menționa problema mărginirii unei forme pătratice care generalizează forma pătratică a lui Hilbert și la spații de interpolare. Capitolul conține și rezultate noi cât și demonstrații mai simple pentru unele teoreme cunoscute.

### § 1. PRODUSE SCALARE PE SPAȚII BANACH

Fie  $X$  un spațiu Banach complex și  $B(x, y)$  o funcțională biliniară care are proprietățile :

1.  $B(x, y) = B(y, x)$ .

2.  $B(x, x) > 0, x \neq 0,$

3.  $B$  este continuă.

Este clar că dacă punem

$$x \rightarrow B(x, x)^{1/2}$$

$(X, B(\dots)^{1/2})$  este un spațiu normat și condiția 3 dă faptul că există  $k > 0$  astfel ca

$$\|x\| = B(x, x)^{1/2} \leq k |x|,$$

unde  $| \cdot |$  este norma din spațiul  $X$ . Cum forma  $B(x, y)$  are toate proprietățile produsului scalar exceptând faptul că spațiul  $(X, B(\cdot, \cdot)^{1/2})$  este complet, putem considera conceptele de operator hermitian, normal, unitar etc. față de această formă. De exemplu, vom spune că operatorul  $T \in \mathcal{L}(X)$  este simetrizabil dacă

$$B(Tx, y) = B(x, Ty)$$

oricare ar fi  $x, y \in X$ . Aici,  $\mathcal{L}(X)$  înseamnă algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul Banach  $X$ . Apare în mod natural problema existenței unor astfel de forme biliniare.

Vom da mai întâi un exemplu simplu. Fie  $I = [0, 1]$  și  $dt$  măsura Lebesgue pe  $I$ , iar pentru orice  $f, g \in C_{[0, 1]}$  să punem

$$B(f, g) = \int_I f(t) g(t) dt$$

pentru orice  $f \in C_I$ ,  $|f| = \sup_{t \in I} |f(t)|$ . Este ușor de văzut că, dacă notăm cu

$$\|f\|^2 = B(f, f),$$

atunci

$$\|f\| \leq |f|$$

și spațiul  $C_I$  admite un produs scalar  $\langle, \rangle$  care satisface relațiile :

$$(i) \langle x, x \rangle > 0, \langle x, x \rangle = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = 0,$$

$$(ii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$(iii) \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle, x, y \in C_I, \lambda \in C,$$

$$(iv) \langle x, x \rangle \leq k |x|^2.$$

Vom spune că un spațiu Banach  $X$  are un produs scalar dacă există un produs scalar  $\langle, \rangle$  cu proprietățile (i) — (iv).

Este ușor de văzut că pe unele clase de spații Banach există produse scalare; vom da în cele ce urmează un exemplu de spațiu care nu posedă această proprietate după care vom prezenta condiții necesare și condiții suficiente pentru existența produselor scalare cu proprietățile (i) — (iv).

Fie  $B_I$  spațiul Banach al funcțiilor mărginite, cu valori complexe definite pe  $I = [0, 1]$ , cu norma

$$|f| = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Pentru orice  $t_0 \in I$ ,  $x_{t_0}$  va fi funcția definită astfel

$$x_{t_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases}$$

care evident este în  $B_I$ . Să presupunem că  $B_I$  posedă un produs scalar cu proprietățile menționate. Fie  $\alpha > 0$  și să punem

$$T_\alpha = \{t, t \in I, \langle x_t, x_t \rangle \geq \alpha\}.$$

Să arătăm că  $T_{1/n}$  este o mulțime infinită pentru un anume întreg  $n$ . Cum  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  rezultă că  $I = \bigcup_n T_{1/n}$  și atunci cum pentru orice

$n$ ,  $T_{1/n}$  este o mulțime finită,  $I$  va fi cel mult numărabilă și cum  $I$  este nenumărabilă, afirmația este demonstrată. Fie  $\alpha_0$  acel indice pentru care  $T = T_{\alpha_0}(\alpha_0 = 1/n_0)$  este infinită și dacă  $t_1, t_2$  sînt în  $T$ ,  $t_1 \neq t_2$  să punem

$$y_1 = x_{t_1}, y_2 = x_{t_2} e^{i\theta_2}$$

și atunci

$$y_1, y_2 = e^{-i\theta_2} \langle x_{t_1}, x_{t_2} \rangle \geq 0$$

dacă alegem pe  $\theta_2$  convenabil. Dacă notăm cu

$$z_1 = y_1, z_2 = y_1 + 2^{-1/2} y_2$$

avem un sistem de elemente  $z_1, z_2$ . Să presupunem că am ales sistemul de elemente  $z_1, \dots, z_{n-1}$ . Să alegem  $t_n \in T$  distinct de  $t_1, \dots, t_{n-1}$  aleși deja și  $\theta_n$  astfel ca

$$y_n = e^{i\theta_n} x_{t_n} \langle z_{n-1}, y_n \rangle \geq 0$$

și să punem  $z_n = z_{n-1} + n^{-1/2} y_n$ . Cum  $t_1, \dots, t_n$  sînt distincți avem

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_n\| &= \|(n+1)^{-1/2} e^{i\theta_{n+1}} x_{t_{n+1}} + \dots + m^{-1/2} 2^{i\theta_m} x_{t_m}\| = \\ &= (n+1)^{-1/2} \text{ pentru } m < n. \end{aligned}$$

Rezultă că  $\{z_n\}$  este un șir Cauchy și deci există  $z \in B_I$  astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\| = 0.$$

Din condiția (iv) rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, z_n \rangle = \langle z, z \rangle.$$

Cum însă avem

$$\langle z_n, z_n \rangle \geq \langle y_1, y_1 \rangle + \dots + \frac{1}{n} \langle y_n, y_n \rangle$$

care se demonstrează prin inducție astfel: pentru  $n=1$  este evidentă. Să presupunem că este adevărată pentru toți indicii pînă la  $n-1$  și s-o demonstrăm pentru  $n$ . Vom avea

$$\begin{aligned} \langle z_n, z_n \rangle &= \langle z_{n-1}, z_{n-1} \rangle + n^{-1/2} \langle z_{n-1}, y_n \rangle + \\ &+ n^{-1/2} \langle y_n, z_{n-1} \rangle + \frac{1}{n} \langle y_n, y_n \rangle \geq \\ &\geq \langle y_1, y_1 \rangle + \dots + \frac{1}{n-1} \langle y_{n-1}, y_{n-1} \rangle + \frac{1}{n} \langle y_n, y_n \rangle \end{aligned}$$

și afirmația este demonstrată.

Întorcându-ne la ceea ce avem de demonstrat, vom remarca faptul că

$$\langle z_n, z_n \rangle \geq \frac{1}{r}$$

și deci pentru  $n \rightarrow \infty$ , membrul drept este o serie divergentă și am obținut astfel o contradicție.

Rezultă că spațiul  $B_r$  nu posedă un produs scalar cu proprietățile menționate.

Exemplul următor arată că spațiile cu produs scalar pot să nu conțină spații care sînt duale de spații Banach.

Fie pentru aceasta spațiul  $E$  al funcțiilor definite pe  $I = [0, 1]$  și care sînt zero exceptînd o mulțime numărabilă de indici din  $[0, 1]$  și cu proprietatea că

$$\sum_{t \in I} |f(t)| < \infty.$$

Este evident că dacă pentru  $f, g \in E$  punem

$$\langle f, g \rangle = \sum_{t \in I} f(t) \bar{g}(t)$$

avem un produs scalar care satisface condițiile de mai înainte. Este însă ușor de văzut (și bine cunoscut) că spațiul dual al spațiului  $E$  este  $B_r$  și afirmația noastră este astfel demonstrată.

## § 2. MĂSURI RADON ȘI PRODUSE SCALARE

Fie  $\Omega$  un spațiu compact, iar  $C(\Omega)$  spațiul Banach al funcțiilor continue cu valori complexe: prin măsură Radon  $\mu$  vom înțelege un element din  $C(\Omega)^*$ , dualul spațiului  $C(\Omega)$ , iar prin suport al măsurii Radon vom înțelege complementarea celei mai mari mulțimi deschise pe care măsura  $\mu$  se anulează. Dacă suportul este  $\Omega$  spunem că  $\Omega$  suportă măsura  $\mu$ .

Este bine cunoscut că, dacă  $\mu$  este o măsură Radon valoarea sa absolută  $|\mu|$  este tot o măsură Radon și suporturile celor două măsuri coincid.

Înainte de a trece mai departe vom da un exemplu simplu de măsură Radon al cărei suport este tot spațiul: fie  $\Omega$  un spațiu compact și metric, iar  $\{t_i\}$  o mulțime numărabilă densă în  $\Omega$ .

Pentru orice  $f \in C(\Omega)$  să punem

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(t_i)$$

unde seria  $\sum \alpha_i$  este absolut convergentă. Este clar că măsura Radon  $\mu$  satisface afirmațiile făcute mai înainte.

Fie acum  $X$  un spațiu Banach, iar  $X^*$  dualul său și

$$S^* = \{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Să considerăm pe spațiul  $X^*$  topologia \*-slabă, adică topologia pentru care sistemul de vecinătăți ale originii este

$$V(x_0^*, \varepsilon : x_1^*, \dots, x_n^*) = \{x^*, |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\},$$

unde  $\varepsilon$  parcurge numerele pozitive, iar  $x_1, \dots, x_n$  sistemele finite de elemente din  $X$ .

Următorul rezultat cunoscut sub numele de teorema lui Banach-Alaoglu este foarte important.

**LEMA 6.2.1.** *Mulțimea  $S^* = \{x^*, \|x^*\| \leq 1\}$  este compactă în topologia \*-slabă.*

Pentru a demonstra această leamnă să punem, pentru orice  $x \in X$ ,  $\alpha_x = \{\alpha, |\alpha| \leq \|x\|\}$  și să considerăm mulțimea produs

$$P = \prod_{x \in X} \alpha_x$$

topologizată cu topologia produs. Ținând seama de teorema lui Tichonov,  $P$  este o mulțime compactă. Să considerăm aplicația

$$p : S^* \rightarrow P$$

definită prin

$$p(x^*) = x^*(x)$$

și fie  $p(S^*)$  imaginea mulțimii  $S^*$  în  $P$  și topologia produs are proprietatea că topologia relativă pe  $S^*$  este chiar topologia \*-slabă. Pentru a demonstra lema este suficient deci să arătăm că  $p(S^*)$  este închisă.

Fie deci  $p_0 \in \overline{p(S^*)}$  (bara înseamnă închiderea) și  $x, y \in X$  arbitrari, iar  $\varepsilon > 0$ . Fie mulțimea

$$\mathcal{V}(p_0) = \{p, |p(z) - p_0(z)| < \varepsilon, z = x, y, \alpha x, x + y\}$$

și într-o vecinătate  $P$  a lui  $p_0$  să luăm  $p = x^*(x)$  care să fie în  $p(S^*)$ .  
Deci

$$|x^*(x) - p_0(x)| < \varepsilon,$$

$$|x^*(y) - p_0(y)| < \varepsilon,$$

$$|x^*(\alpha x) - p_0(\alpha x)| < \varepsilon,$$

$$|x^*(x + y) - p_0(x + y)| < \varepsilon,$$

și cum  $x^* \in S^*$ , rezultă că

$$|p_0(x+y) - p_0(x) - p_0(y)| < 3\varepsilon,$$

$$|\alpha p_0(x) - p_0(\alpha x)| < (|\alpha| + 1)\varepsilon,$$

$$|p_0(x)| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon > 0$  a fost ales arbitrar rezultă că  $p_0$  este o funcțională liniară care este în  $S^*$  și deci  $p_0 \in p(S^*)$  ceea ce arată că  $p(S^*)$  este o mulțime închisă. Cum  $P$  este compactă, rezultă afirmația noastră.

**LEMA 6.2.2.** *Spațiul  $X$  este izomorf și izometric cu un subspațiu închis al spațiului  $C(S^*)$ ,  $S^*$  fiind topologizat cu topologia \*-slabă.*

*Demonstrație.* Fie  $S^*$  sfera unitate a spațiului dual care este \*-slab compactă și să considerăm scufundarea lui  $X$  în  $X^{**}$ . Pentru orice  $x \in X$  să considerăm

$$x \rightarrow f_x$$

care este, după cum se vede ușor, o funcție continuă pe  $S^*$  (restricția sa). De asemenea din teorema lui Hahn-Banach-Sobczyk-Bohnenblust deducem că avem în fapt o izometrie.

Sintem în acest mod conduși la considerarea cazului când un spațiu Hausdorff compact suportă o măsură Radon. Să presupunem că o astfel de măsură există și fie aceasta  $d\mu$ . Pentru orice  $g, f \in C(S^*)$  să punem

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^*} f(t) \overline{g(t)} d\mu(t).$$

Este ușor de verificat că sînt satisfăcute condițiile (i)  $\rightarrow$  (iv) mai puțin (i). În adevăr, pentru a demonstra (i), fie  $f(t) \in C(S^*)$  și  $f(t_0) \neq 0$ ,  $\langle f, f \rangle = 0$ . Cum  $f$  este continuă, există o mulțime deschisă  $\mathcal{V} \ni t_0$  și  $\delta > 0$  astfel ca

$$|f(t)| \geq \delta$$

oricare ar fi  $t \in \mathcal{V}$ . În acest caz avem

$$0 \leq \delta^2 d\mu(\mathcal{V}) \leq \int_{S^*} |f(t)|^2 d\mu = 0$$

de unde  $d\mu(\mathcal{V}) = 0$  care contrazice faptul că suportul măsurii  $d\mu$  este spațiul  $S^*$ .

Vom da acum câteva teoreme privind spațiile Hausdorff compacte care suportă măsuri Radon.

**DEFINIȚIA 6.2.3.** Fie  $X$  un spațiu topologic. Se spune că  $X$  satisface condiția (c.c.c) dacă orice familie de mulțimi deschise nevide disjuncte este numărabilă.

Este ușor de văzut că dacă  $X$  este separabil, atunci  $X$  satisface condiția (c. c. c.). Importanța condiției (c. c. c.) este dată de următoarea :

**LEMA 6.2.4.** Fie  $X$  un spațiu topologic Hausdorff compact. Condiția necesară ca  $X$  să suporte o măsură Radon este ca  $X$  să satisfacă condiția (c. c. c.).

*Demonstrație.* Să presupunem că  $X$  suportă o măsură Radon, fie acesta  $\mu$ . Putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $\mu$  este pozitivă. Să presupunem că proprietatea (c. c. c.) nu are loc pentru  $X$  și deci există o familie de mulțimi deschise nevide, disjuncte,  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$  cu  $I$  o mulțime nenumărabilă.

Fie

$$I_n = \left\{ i \in I, \mu(\mathcal{V}_i) > \frac{1}{n} \right\}$$

și cum  $X$  este suportul măsurii  $\mu$ , orice  $\mathcal{V}_i$  are măsura pozitivă și deci este într-o mulțime  $I_n$ . Are loc relația

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n.$$

Cum  $I$  este nenumărabilă, din această relație rezultă că cel puțin una din mulțimile  $I_n$  este nenumărabilă. Fie aceasta  $I_{n_0}$  și deci cum  $\mu$  este numărabil aditivă, rezultă că  $\mu(X) = \infty$ , ceea ce este o contradicție. Lema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei leme vom arăta că există clase de spații Banach care nu posedă un produs scalar cu proprietățile (i) — (iv).

Fie  $X$  un spațiu Banach separabil și  $X$  dualul său, iar  $S^*$  sfera sa unitate cu topologia \*-slabă. În acest caz  $S^*$  este metrizabil, metrica  $\rho$  fiind dată de

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(x^* - y^*)(x_n)|}{1 + |(x^* - y^*)(x_n)|}$$

unde  $\{x_n\}$  este o mulțime numărabilă densă în  $X$ . De aici rezultă că orice spațiu separabil posedă un produs scalar cu proprietățile (i) — (iv).

**DEFINIȚIA 6.2.5.** Un spațiu Banach  $X$  satisface condiția (+) dacă există o mulțime nemăsurabilă  $\{x_i, i \in I\} \subset X$  cu următoarele proprietăți:

1.  $\|x_i\| = 1, \quad i \in I;$
2.  $\|x_i + x_j\| \leq \rho < 2, \quad i, j \in I$

pentru un  $\rho > 0$ .

Un exemplu simplu ne arată că există spații cu proprietatea (+): fie  $I$  o mulțime nenumărabilă și  $B_I$  spațiul Banach al funcțiilor mărginite pe  $I$  cu valori complexe. Funcțiile caracteristice

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = i, \\ 0, & \tau \neq i \end{cases}$$

sînt în  $B_1$  și  $\{\varphi_i\}$  are proprietatea enunțată.

Un alt exemplu este dat de clasa spațiilor uniform convexe neseperabile pe care le introducem prin următoarea :

DEFINIȚIA 6.2.6. Un spațiu Banach se spune că este uniform convex dacă pentru orice  $\epsilon \in (0, 2)$  există  $\rho < 2$  astfel ca

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \\ 2. \quad \|x - y\| > \epsilon, \end{array} \right\} \Rightarrow \|x + y\| < \rho.$$

Exemple de spații uniform convexe : spațiile Hilbert, spațiile  $l^p$ ,  $L(p)$ .

Are loc :

LEMA 6.2.7. Dacă  $X$  este un spațiu Banach uniform convex neseperabil, atunci  $S^*$  cu topologia  $*$ -slabă nu are proprietatea (c. c. c.).

Lema va rezulta din următoarea propoziție ajutătoare.

PROPOZIȚIA 6.2.8. Orice spațiu Banach uniform convex neseperabil are proprietatea (+).

*Demonstrație.* Să arătăm mai întâi că există  $\eta > 0$  și o mulțime nenumărabilă  $\{I_i, i \in I\}$  astfel ca

$$\|x_i - x_j\| > \eta, i \neq j.$$

În adevăr, pentru  $\eta > 0$  fixat, să considerăm  $\mathcal{F}_\eta$  familia mulțimilor ale căror elemente din sfera unitate sînt la o distanță cel puțin  $\eta$ . În  $\mathcal{F}_\eta$  să introducem o relație de ordine; două submulțimi  $S^1 \in \mathcal{F}_\eta$ ,  $S^2 \in \mathcal{F}_\eta$  au proprietatea că

$$S^1 \leq S^2$$

dacă  $S^1 \subset S^2$ . Se verifică ușor că putem aplica lema lui Zorn și deci să considerăm un element maximal  $S_{m,\eta}$ . Dacă afirmația propoziției ar fi falsă, atunci  $S_{m,\eta}$  este numărabilă pentru orice  $\eta$ . Fie  $\eta = \frac{1}{n}$  și să considerăm mulțimea

$$S = \bigcup_n S_{m,1/n}$$

care va fi numărabilă și densă în  $X$  ceea ce contrazice faptul că  $X$  este neseperabil.

Conform rezultatului obținut, există  $\{x_i, i \in I\}$  astfel ca

$$\|x_i - x_j\| \geq \eta; i \neq j, \|x_i\| = 1$$

pentru un anume  $\eta > 0$ . Din definiția uniform convexității rezultă că există  $\delta > 0$  astfel ca

$$\|x_i + x_j\| \leq \delta < 2$$

și deci  $X$  are proprietatea (+).

*Demonstrația* lemei 6.2.7 se face astfel: fie  $\{x_i\}_{i \in I}$  familia de elemente cu proprietățile date în propoziție și să considerăm

$$\sigma_i = \{x^*, \|x^*\| \leq 1, |x^*(x_i) - 1| < \varepsilon\}$$

pentru fiecare  $i \in I$ . Din teorema lui Hahn-Banach-Bohnenblust-Sobczyk rezultă că mulțimile  $\sigma_i$  sînt nevide. Dacă  $\varepsilon$  este mic atunci  $\sigma_i$  sînt dis-juncte. În adevăr, să arătăm că putem să găsim un astfel de  $\varepsilon$ . Fie pentru aceasta  $x^* \in \sigma_i \cap \sigma_j$  și deci avem

$$|x^*(x_i) - 1| < \varepsilon, |x^*(x_j) - 1| < \varepsilon,$$

de unde rezultă că

$$|x^*(x_i + x_j)| \leq \|x^*\| \|x_i + x_j\| \leq \delta \|x^*\|$$

și deci

$$|x^*(x_i + x_j)| = |2 + (x^*(x_i) - 1) + (x^*(x_j) - 1)| \leq \delta \|x^*\|.$$

Obținem astfel că

$$\|x^*\| \geq \frac{1}{\delta} \{2 - |x^*(x_i) - 1| - |x^*(x_j) - 1|\} \geq \frac{1}{\delta} (2 - 2\varepsilon).$$

Cum  $\delta > 0$  este fix alegem  $\varepsilon > 0$  astfel ca

$$0 < \varepsilon < 1 - \frac{\delta}{2}$$

și aceasta ne dă că  $\|x^*\| > 1$  care este o contradicție. Rezultă că familia  $\{\sigma_i\}$  este nenumărabilă și deci  $S^*$  nu are proprietatea (c. c. c.).

Deducem că  $S^*$  nu suportă măsuri Radon.

### § 3. OPERATORI SIMETRIZABILI PE SPAȚII HILBERT. GENERALIZĂRI

Noțiunea de operator simetrizabil a fost introdusă pentru cazul particular al transformărilor integrale de J. Marti în 1910.

**DEFINIȚIA 6.3.1.** Un operator liniar și mărginit  $T$  definit pe un spațiu Hilbert se spune că este simetrizabil relativ la operatorul hermitian  $H (\neq 0)$  dacă operatorul  $S = HT$  este hermitian.

Are loc :

**TEOREMA 6.3.2.** Dacă operatorul  $T$  este simetrizabil în raport cu operatorul hermitian  $H$  atunci pentru orice întreg  $n$ , operatorul  $T^n$  este simetrizabil.

*Demonstrație.* Să presupunem că pentru orice  $i, 1 \leq i \leq n-1$ ,  $HT^i$  este hermitian. În acest caz avem

$$\begin{aligned}\langle HT^n x, x \rangle &= \langle HT^{n-1} Tx, x \rangle = \langle Tx, HT^{n-1} x \rangle = \\ &= \langle HTx, T^{n-1} x \rangle = \langle x, HT \cdot T^{n-1} x \rangle = \langle x, HT^n x \rangle\end{aligned}$$

și prin inducție, afirmația teoremei este demonstrată.

Se poate arăta că o mare parte a rezultatelor demonstrate pentru operatorii compacți și hermitici sînt adevărate pentru operatori compacți și simetrizabili.

Vom introduce în cele ce urmează clase de operatori care generalizează clasa operatorilor simetrizabili.

DEFINIȚIA 6.3.3. Fie  $H$  un operator pozitiv definit pe spațiul Hilbert  $B$  și  $T$  un operator liniar și continuu pe  $E$ . Un operator  $\tilde{T}$  liniar și continuu pe  $E$  se spune că este  $H$ -adjunctul lui  $T$  dacă

$$\langle HTx, y \rangle = \langle Hx, \tilde{T}y \rangle$$

oricare ar fi  $x, y \in E$ .

*Observație.* Dacă  $T = \tilde{T}$  evident că avem operatori simetrizabili în sensul lui Marti-Zaanen.

DEFINIȚIA 6.3.4. Un operator  $T$  se va numi  $H$ -normalizabil dacă

$$H\tilde{T}T = HT\tilde{T}$$

și se va numi  $H$ -hiponormalizabil dacă

$$H\tilde{T}T - HT\tilde{T} \geq 0.$$

Următoarele două teoreme arată unele proprietăți ale acestor clase de operatori. Vom presupune că  $H$  are rangul închis,  $\mathcal{E} = \{x, Hx = 0\}$ , iar  $m = \{x, x \perp \mathcal{E}\} = \mathcal{E}^\perp$   $P$  fiind proiecția ortogonală pe  $m$ .

Pe spațiul  $m$  se poate introduce un produs scalar prin

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle Hx, y \rangle = \langle H^{1/2} x, H^{1/2} y \rangle$$

oricare ar fi  $x, y \in m$ .

Are loc :

TEOREMA 6.3.5. Un operator  $T$  este  $H$ -hiponormalizabil dacă și numai dacă :

$$1. PT = PTP,$$

2.  $PT$  este un operator hiponormal pe spațiul Hilbert  $(m, \langle\langle, \rangle\rangle)$ .

*Demonstrație.* Să arătăm mai întâi că existența  $H$ -adjunctului este echivalentă cu relația  $PT = PTP$ .

În adevăr, dacă  $T$  este  $H$ -adjunctul lui  $T$ , din faptul că  $H = HP = PH$ , obținem

$$\langle PTx, Hy \rangle = \langle HPTx, y \rangle = \langle HTx, y \rangle = \langle Hx, Ty \rangle = 0$$

pentru orice  $x \in \mathcal{E}$ ,  $y \in E$ , adică  $PT \perp HE$  și deci  $PT\mathcal{E} \perp m$  ceea ce implică  $PT\mathcal{E} \subset m$ . Cum  $PTm \subseteq m$ , avem

$$PT = P(PT) = (PT)P = PTP.$$

Să presupunem acum că  $PT = PTP$  și să notăm cu  $H_0$  restricția operatorului  $H$  la subspațiul  $\{m, \ll, \gg\}$ . Cum  $H_0$  este invertibil avem

$$\begin{aligned} \langle HTx, y \rangle &= \langle HPTx, y \rangle = \langle HPTPx, y \rangle = \langle x, PT^*PHy \rangle = \\ &= \langle x, H_0H_0^{-1}PT^*Hy \rangle = \langle x, HH_0^{-1}PT^*Hy \rangle = \\ &= \langle Hx, H_0^{-1}PT^*Hy \rangle, \quad x, y \in E, \text{ adică } \tilde{T} = H_0^{-1}PT^*H. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că  $PT$  este hiponormal pe spațiul  $\{m; \ll, \gg\}$ .

Observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} \langle H\tilde{T}Tx, y \rangle &= \langle H\tilde{T}Tx, Py \rangle = \langle HTx, TPy \rangle = \langle PHTx, TPy \rangle = \\ &= \langle HTx, PTPy \rangle = \langle Hx, \tilde{T}PTPy \rangle = \langle HPx, (P\tilde{T})(PT)Py \rangle = \\ &= \ll Px, (P\tilde{T})(PT)Py \gg \end{aligned}$$

oricare ar fi  $x, y \in E$ .

Analog

$$\langle H\tilde{T}Tx, y \rangle = \ll Px, (PT)(P\tilde{T})Py \gg.$$

Dar  $P\tilde{T}x = (PT)^*x$ , oricare ar fi  $x \in m$  unde  $(PT)^*$  este adjunc-tul lui  $PT$  în spațiul  $\{m, \ll, \gg\}$  întrucît

$$\begin{aligned} \ll PTx, y \gg &= \langle HPTx, y \rangle = \langle HTx, y \rangle = \langle Hx, \tilde{T}y \rangle = \\ &= \langle x, HP\tilde{T}y \rangle = \langle Hx, P\tilde{T}y \rangle = \ll x, PTy \gg \end{aligned}$$

oricare ar fi  $x, y \in m$  și oricare ar fi  $T$  care posedă  $H$ -adjunct. Atunci

$$\langle H(\tilde{T}T - T\tilde{T})x, y \rangle = \langle Px, ((PT)^*(PT) - (PT)(PT)^*)Py \rangle.$$

Dacă  $T$  este un operator  $H$ -hiponormalizabil și  $T$  este compact atunci  $T$  este în fapt  $H$ -normalizabil. Demonstrația acestui fapt rezultă din teorema de mai sus și din teorema corespunzătoare de la operatori hyponormali.

Este evident că are loc și :

**TEOREMA 6.3.6.** Dacă  $T$  este un operator  $H$ -hiponormalizabil și  $\lambda$  este un număr complex atunci  $T = T - \lambda I$  este un operator  $H$ -hiponormalizabil.

Teorema următoare dă informații privind spectrul unui operator  $H$ -normalizabil.

**TEOREMA 6.3.7.** Dacă  $T$  este  $H$ -normalizabil și compact atunci există  $\lambda \in \sigma_p(T)$  dacă  $HT \neq 0$ .

*Demonstrație.* Conform rezultatului obținut mai înainte operatorul  $PT$  este normal și compact pe spațiul  $(\mathfrak{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  și deci există  $\lambda$  astfel ca

$$|\lambda| = \|PT\|.$$

Din condiția de compacitate rezultă că are loc relația

$$\lambda \in \sigma_p(PT)$$

și deci există  $x$  astfel ca

$$PTx = \lambda x, \quad P\tilde{T}x = \bar{\lambda}x$$

de unde deducem că

$$HP\tilde{T}x = \bar{\lambda}Hx.$$

Însă  $T$  este  $H$ -normalizabil și  $H\tilde{T} = TH$  de unde rezultă că

$$T^*Hx = \bar{\lambda}Hx$$

și cum  $PTx \in \mathfrak{M}$  ne dă că  $\lambda x \in \mathfrak{M}$  adică  $Hx = y \neq 0$  și deci

$$T^*y = \bar{\lambda}y.$$

Rezultă că și

$$Ty = \lambda y$$

deoarece  $T$  este compact. Teorema este demonstrată.

#### § 4. OPERATORI SIMETRIZABILI PE SPAȚII BANACH. OPERATORI CVASINORMALIZABILI

Fie  $X$  un spațiu Banach și  $T$  un operator liniar și continuu pe  $X$ . Presupunem că există un produs scalar cu proprietățile (i) — (iv). Clasele de operatori pe care le vom studia vor fi introduse în următoarele definiții.

DEFINIȚIA 6.4.1. Un operator  $T$  se va numi simetrizabil dacă

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

$\langle, \rangle$  este produsul scalar,  $\|, \|$  norma derivată din acest produs scalar, iar  $|\cdot|$  este norma originală a spațiului Banach  $X$ .

DEFINIȚIA 6.4.2. Un operator  $T$  se va numi normalizabil dacă există  $T^*$  liniar și continuu pe  $(X, |\cdot|)$  astfel ca

$$\langle T^*Tx, y \rangle = \langle TT^*x, y \rangle$$

și se va numi hiponormalizabil dacă

$$\langle T^*Tx - TT^*x, x \rangle \geq 0$$

oricare ar fi  $x \in X$ .

O clasă care include clasele din definițiile 6.4.1 și 6.4.2 o putem introduce considerând analogul operatorilor de clasă ( $N$ ).

DEFINIȚIA 6.4.3. Operatorul  $T$  se va numi cvasinormalizabil dacă pentru orice  $x \in X$ ,  $\|x\| = 1$

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|.$$

Observația 6.4.4. Clasa operatorilor introdusă în definiția 6.4.3 prezintă două avantaje față de clasele considerate mai înainte și anume:

1. nu presupune existența unui operator cu proprietățile operatorului adjunct,

2. definit printr-o relație metrică este uneori mai ușor de verificat apartenența unui operator la această clasă și că această clasă este închisă la formarea puterilor (aceasta o vom demonstra mai târziu).

Vom demonstra acum că rezultatele cunoscute pentru operatori simetrizabili se pot extinde la clase mai generale și anume la unele clase conținute în cele introduse mai înainte.

TEOREMA 6.4.5. Dacă  $H$  este spațiul Hilbert care se obține completând pe  $X$  față de produsul scalar  $\langle, \rangle$  atunci dacă  $T$  este un operator cvasinormalizabil, rezultă că  $T$  este mărginit în  $H$ .

Demonstrație. Vom arăta că dacă  $T$  este cvasinormalizabil, atunci pentru orice  $x$ ,  $\|x\| = 1$  și orice întreg  $n$  avem relația

$$(*) \quad \|T^n x\| \geq \|Tx\|^n.$$

În adevăr, pentru  $n = 2$  afirmația este demonstrată. Să presupunem că relația este adevărată pentru toți întregii  $\leq m$  și să o demonstrăm pentru  $m + 1$ . Vom avea

$$\|T^{m+1}x\| = \left\| T^m \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\| \|Tx\| \geq \|T^2x\|^m \frac{1}{\|Tx\|^{m-1}} >$$

$$(\|Tx\|^2)^m \frac{1}{\|Tx\|^{m-1}} = \|Tx\|^{m+1}$$

și afirmația este demonstrată dacă  $Tx \neq 0$ . Dacă  $Tx = 0$  relația este evidentă. Deci conform inducției, (\*) este adevărată pentru orice  $n$ . Cum avem

$$\|Tx\|^n \leq \|T^n x\| \leq k |T^n x| \leq k |T|^n |x|$$

deci

$$\|T^n x\|^{1/n} \leq k^{1/n} |Tx|^{1/n} < k^{1/n} |T| |x|^{1/n}$$

care ne dă că (deoarece relația este adevărată pentru  $\|x\| = 1$ )

$$\|T\| \leq |T|$$

și teorema este demonstrată.

COROLARUL 6.4.6. Pentru orice  $x$  avem, dacă  $T$  este cvasinormalizabil

$$\|Tx\| \leq \gamma_T \|x\|$$

unde  $\gamma_T$  înseamnă raza spectrală a operatorului  $T$  definit pe spațiul Banach  $(X, |\cdot|)$ .

TEOREMA 6.4.7. Să presupunem că pentru orice număr complex  $\lambda$  operatorul  $T_\lambda = T - \lambda I$  este cvasinormalizabil. În acest caz spectrul operatorului  $T$  pe  $H$  este o submulțime a spectrului operatorului  $T$  pe spațiul Banach  $(X, |\cdot|)$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra mai întâi o lemă care prezintă interes și în sine.

LEMA 6.4.8. Dacă  $T$  este cvasinormalizabil și  $T^{-1}$  există ca operator pe  $(X, |\cdot|)$ ,  $T^{-1}$  este cvasinormalizabil.

*Demonstrație.* Fie  $x \in X$ ,  $\|x\| = 1$ . Există  $y \in X$  astfel ca  $x = T^2 y$ . Cum  $T$  este cvasinormalizabil avem

$$\begin{aligned} \|T^{-1}x\|^2 &= \|Ty\|^2 = \left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \|y\|^2 \leq \left\| T^2 \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \|y\|^2 = \\ &= \|x\| \|y\| = \|y\| = \|T^{-2}y\| \end{aligned}$$

și lema este astfel demonstrată.

Să trecem acum la demonstrația teoremei 6.4.7. Fie  $\lambda$  cu proprietatea că nu este în  $\sigma(T)$  și deci  $T_\lambda = T - \lambda I$  este cvasinormalizabil conform ipotezei și  $T_\lambda^{-1}$  există. Din lema rezultă că  $T_\lambda^{-1}$  este de asemenea cvasinormalizabil și este mărginit în norma hilbertiană. Cum însă  $(T - \lambda I)S = I$ , ( $S = T_\lambda^{-1}$ ), este un operator mărginit pe o mulțime densă și este egal cu identitatea, el va fi identitatea și pe spațiul completat. Teorema este astfel demonstrată.

Pentru teoremele care urmează vom considera o subclasă a operatorilor cvasinormalizabili și anume clasa operatorilor hiponormalizabili.

Are loc :

LEMA 6.4.9. Dacă  $T$  este un operator hiponormalizabil atunci au loc următoarele afirmații :

1. pentru orice  $\lambda$ ,  $T_\lambda = T - \lambda I$  este hiponormalizabil,
2. dacă  $\lambda$  are proprietatea că există  $x \in X$  astfel ca

$$Tx = \lambda x,$$

atunci avem și  $T^*x = \bar{\lambda}x$ ,

3. dacă  $T$  este compact atunci  $T$  este normalizabil.

*Demonstrație.* Prima afirmație se verifică imediat prin calcul, a doua rezultă astfel

$$\|T^*x - \bar{\lambda}x\|^2 = \langle T^*x - \bar{\lambda}x, T^*x - \bar{\lambda}x \rangle \leq \|(T - \lambda)x\|^2 = 0.$$

Dacă  $T$  este compact pe  $X$ , atunci din definiția produsului scalar rezultă că  $T$  este compact și pe  $H$ . Dar atunci avem un operator compact și hiponormal care, conform teoremei lui Andô, este un operator normal. Lema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 6.4.10.** *Dacă  $T$  este hiponormalizabil și  $\lambda$  aparține spectrului punctual al lui  $T$  pe  $X$ , atunci  $\lambda$  aparține spectrului punctual al lui  $T$  pe  $H$  și  $N(T - \lambda I)$  pe  $H$  și pe  $X$  sînt aceleași.*

*Demonstrație.* Fie deci  $\lambda$  în spectrul punctual al lui  $T$  pe spațiul  $X$ , adică  $\dim N(T - \lambda I) < \infty$  și este egală cu  $\dim X/(T - \lambda I)X$ . Vom remarca faptul că orice element din  $(T - \lambda I)X$  este ortogonal pe elementele din  $N(T - \lambda I)$ . În adevăr, avem că  $N(T - \lambda I)^\perp = N(T - \lambda I)$  și deci

$$\langle x, z \rangle = \langle x, (T - \lambda I)y \rangle = \langle (T^* - \bar{\lambda}I)x, y \rangle = 0$$

oricare ar fi  $x \in N(T - \lambda I)$  și afirmația este demonstrată. Cum însă  $\dim N(T - \lambda I) = \dim X/(T - \lambda I)X$  deducem că  $(T - \lambda I)X$  constă din elementele lui  $X$  care sînt ortogonale pe  $N(T - \lambda I)$ . Rezultă că  $T - \lambda I : (T - \lambda I)X \rightarrow (T - \lambda I)X$  este o aplicație surjectivă și injectivă, deci are un invers care conform teoremei graficului închis trebuie să fie mărginită și din cele demonstrate de noi, este mărginită și în norma hilbertiană. Fie  $S$  închiderea transformării  $T - \lambda I$  pe închiderea spațiului  $(T - \lambda I)X$  în  $H$ . Evident  $S(T - \lambda I)$  este identitatea pe o mulțime densă și deci  $T - \lambda I$  are un invers mărginit pe complementul ortogonal al lui  $N(T - \lambda I)$  în raport cu spațiul Hilbert  $H$ . Aceasta înseamnă că  $\lambda$  este în spectrul punctual al lui  $T$  operator pe  $H$ . Teorema este demonstrată.

Vom mai menționa că din teorema 6.4.1 rezultă imediat următorul rezultat pe care îl dăm în :

**TEOREMA 6.4.11.** *Dacă  $T$  este un operator cvasinormalizabil și pentru un întreg  $m$ , operatorul  $T^m$  este compact pe  $X$  atunci  $T$  este compact pe  $H$ .*

Teorema 6.4.11. admite o variantă independentă de structura operatorilor în următoarea formă :

**TEOREMA 6.4.12.** *Fie  $X, X'$  două spații Banach cu normele  $\|, \|$ ,  $\|, \|$ ,  $X$  dens în  $X'$ , iar cele două norme satisfac relația*

$$\|x\|' \leq \|x\| \cdot k,$$

unde  $k$  este o constantă pozitivă fixată, iar  $x$  arbitrar. Să presupunem că avem o transformare mărginită

$$T : X' \rightarrow X'$$

și că  $X$  este invariant pentru  $T$  și  $\lambda$  în spectrul punctual al lui  $T$  pe  $X$ , este în spectrul punctual al lui  $T$  pe  $X'$ . În acest caz  $N(T - \lambda I)$  este același pe  $X$  și  $X'$ .

*Demonstrație.* Fie  $N = N(T - \lambda I)$  pe  $X$  și  $N' = N(T - \lambda I)$  pe  $X'$  iar  $J, J'$  respectiv  $(T - \lambda I)X, (T - \lambda I)X'$ , și  $\lambda$  cu proprietatea

din enunț. În acest caz avem

$$n = \dim N = \dim X/J,$$

$$n' = \dim N' = \dim X'/J'.$$

Cum evident avem relația  $J \subset J'$  deducem că

$$\dim X'/J' = \dim X/J,$$

adică  $n' \leq n$ . În adevăr, fie  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  elemente din  $X'$ . Cum  $X$  este dens în  $X'$ , să luăm  $x'_1, \dots, x'_{n+1}$  elemente din  $X$  care aproximează elementele  $x_1, \dots, x_{n+1}$ . Cum  $\dim X/J = n$ , rezultă că există o combinație liniară

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^i x_k$$

care să fie în  $J$  și putem presupune fără a restringe generalitatea că coeficienții sînt în valoare absolută  $\leq 1$  și că cel mai mare este 1. Conform teoremei lui Weirstrass-Bolzano, putem presupune că șirurile

$$\alpha_1^i, \dots, \alpha_{n+1}^i$$

converg către  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  și cel mai mare este 1; dar

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$$

fiind limită de elemente în  $J$ , este în  $J$  și deci în  $J'$  (deoarece  $J \subset J'$  și  $J'$  este o mulțime închisă). În acest mod  $n' \leq n$ . Dar cum  $N \subset N'$  avem și  $n' \geq n$  de unde rezultă că  $n = n'$ . Teorema este demonstrată.

Vom da acum o proprietate a operatorilor cvasinormalizabili pe care nu o au operatorii hiponormalizabili și numai cei simetrizabili.

**TEOREMA 6.4.13.** *Dacă  $T$  este un operator cvasinormalizabil, atunci orice putere a sa este un operator cvasinormalizabil.*

*Demonstrație.* Fie  $T$  cvasinormalizabil și  $m$  un întreg arbitrar. Trebuie să demonstrăm relația

$$\|T^m x\|^2 \leq \|T^{2m} x\|$$

oricare ar fi  $x, \|x\| = 1$ .

Din faptul că operatorul  $T$  este cvasinormalizabil avem relația

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \leq \dots \leq \frac{\|T^{m+1}x\|}{\|T^m x\|} \leq \dots \leq \frac{\|T^{2m}x\|}{\|T^m x\|} \leq \dots \leq \frac{\|T^{2^m}x\|}{\|T^{2^{m-1}}x\|},$$

care ne dă că

$$\|T^m x\|^2 \leq \|T^{2m} x\| \|x\|$$

și teorema este demonstrată.

Vom da acum o condiție necesară și suficientă pentru ca un operator  $T$  să fie evasinormalizabil în cazul cînd există un operator  $T^* \in \mathcal{L}(X)$  astfel ca

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

Are loc :

**TEOREMA 6.4.14.** *Operatorul  $T$  este evasinormalizabil dacă și numai dacă pentru orice  $\lambda > 0$  avem*

$$T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geq 0.$$

*Demonstrație.* Cum avem pentru orice  $x$  relația

$$\begin{aligned} \|T^2x\| \|x\| &= \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2} [\lambda^{-1} \|T^2x\|^2 + \lambda \|x\|^2] = \\ &= \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} [\langle T^{*2}T^2x, x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle], \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$\|T^2x\| \|x\| = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{2\lambda} \langle (T^{*2}T^2 + \lambda^2)x, x \rangle \geq \langle T^*, Tx, x \rangle$$

care ne dă evident relația pe care vrem să o demonstrăm.

Cu ajutorul teoremei putem demonstra de asemenea lema 6.4.8. în ipoteza că există adjunct. În adevăr, să luăm  $x = T^{-2}y$  și obținem că

$$\langle y, y \rangle - 2\lambda \langle T^{-1}y, T^{-1}y \rangle + \lambda^2 \langle T^{-2}y, T^{-2}y \rangle \geq 0$$

care ne arată că  $T^{-1}$  este un operator evasinormalizabil.

**Observația 6.4.15.** O problemă importantă este și următoarea : dacă  $T$  este un operator evasinormalizabil și  $\lambda$  este un număr complex atunci operatorul  $T_\lambda = T - \lambda I$  este evasinormalizabil? Răspunsul ar fi interesant chiar atunci cînd presupunem că operatorul  $T$  admite un adjunct. Se poate remarca ușor că este suficient să considerăm numai numere  $\lambda$  care sînt reale.

## § 5. CÎTEVA APLICAȚII ALE OPERATORILOR SIMETRIZABILI ȘI CVASINORMALIZABILI

Vom da acum cîteva rezultate privind aplicațiile claselor de operatori pe care le-am considerat mai înainte la cîteva probleme de analiză.

## 6.5.1. FORMA PĂTRATICĂ A LUI HILBERT

D. Hilbert a considerat următoarea formă pătratică

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n+m} x_n x_m$$

care a fost generalizată de W. Magnus prin considerarea formei pătratice

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} x_n x_m, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

care se reduce la forma pătratică a lui Hilbert dacă  $\alpha = 0$ . Magnus a arătat că această formă pătratică este mărginită dacă  $\alpha < 1$  și pentru  $\alpha = 1$  este nemărginită. În cele ce urmează vom da o demonstrație pentru acest rezultat și apoi vom considera o formă pătratică care generalizează formele pătratice studiate de Hilbert și Magnus.

Să considerăm spațiu  $l^2$  al șirurilor  $x = (x_1, x_2, \dots)$  astfel ca  $\sum |x_i|^2 < \infty$ , cu produsul scalar obișnuit. Să definim, cu ajutorul formei pătratice, o aplicație pe  $l^2$  prin

$$x \rightarrow Tx = (y_1, y_2, \dots)$$

unde

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} x_m$$

care este evident simetrică (hermitiană) în raport cu produsul scalar. Vom arăta că există o normă pentru care această formă este mărginită. În adevăr, să considerăm norma

$$\|x\| = \sup_m |x_m| m^s,$$

unde  $s \in \left[ \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \right]$ . Cum pentru  $s > \frac{1}{2}$  această normă Banach

domină norma din  $l^2$ , rezultă că putem aplica teorema 6.4.5. care ne dă astfel teorema lui Magnus.

Cum avem

$$|y_n| n^s \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{|n|^s}{(nm)^{\alpha/2}} |x_m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} |x|$$

și de asemenea descompunem suma astfel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} |x| = \sum_{m=1}^n + \sum_{m=n+1}^{\infty}.$$

Vom avea

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} |x| = \sum_{m=1}^n \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{n^{s-\alpha/2}}{m^{s+\alpha/2}} |x| \leq \\ \leq \sum_{m=1}^n \frac{n^{s-\alpha/2}}{n^{1-\alpha}} \frac{1}{m^{s+\alpha/2}} = \frac{1}{n^{1-s-\alpha/2}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{s+\alpha/2}} = o \left( \left( 1 - s - \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} \right),$$

dacă  $s < 1 - \frac{\alpha}{2}$ , de unde deducem că

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} \leq k n^{s-\alpha/2+\alpha-1+1-s-\alpha/2} |x| \leq \tilde{k} |x|,$$

unde  $k$  și  $\tilde{k}$  sînt constante.

Să estimăm acum

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} |x| = n^{s-\alpha/2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{m^{s+\alpha/2}}$$

și cum

$$\frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} < \frac{1}{m^{1-\alpha}}$$

deducem că are loc relația

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(nm)^{\alpha/2}} \frac{n^s}{m^s} |x| \leq n^{s-\alpha/2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+s-\alpha/2}} |x| \leq \\ \leq k_1 n^{s-\alpha/2} \cdot n^{\alpha/2-s} |x| = k_1 |x|,$$

unde  $k_1$  este o constantă, dacă  $s \geq \alpha/2$ . Rezultă că cele două sume sînt mai mici decît o constantă înmulțită cu  $|x|$  și valoarea constantă fiind  $o(\max(s-\alpha/2^{-1}-1, s-\alpha/2^{-1}))$ , pentru  $s = \frac{1}{2}$  deducem că forma pătratică este mărginită de  $C(1-\alpha)^{-1}$ . Aplicînd teorema 6.4.5. deducem teorema lui Magnus.

În adevăr, să considerăm un șir de numere  $\{\alpha_n\}$  în progresie aritmetică cu proprietatea că  $\operatorname{Re} \alpha_n > 0$  și să considerăm forma pătratică

$$\sum_{n,m=1} \frac{1}{(\alpha_n + \bar{\alpha}_m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(\alpha_n \bar{\alpha}_m)^{\alpha/2}} x_n x_m.$$

Definim operatorul

$$x \rightarrow T x = (y_1, y_2, \dots)$$

prin

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n + \bar{\alpha}_m)^{1-\alpha}} \frac{1}{(\alpha_n \bar{\alpha}_m)^{1/2}} x_m$$

se arată că aceasta definește un operator pentru care putem să aplicăm teorema 6.4.1.

## § 6. O TEOREMĂ DE INTERPOLARE

Vom da acum o aplicație a tehnicii de la operatori cvasinormalizabili la teoria interpolării.

Fie  $X$  un spațiu Banach reflexiv cu norma  $|\cdot|$  și  $H$  un spațiu Hilbert cu produs scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  care ne dă o nouă normă însemnată prin  $\|\cdot\|$ . Să presupunem că următoarele condiții sînt îndeplinite :

1.  $X$  este dens în  $H$ ,
2. aplicația identică de la  $X$  în  $H$  este continuă. Cum putem defini și aplicația

$$i : H \rightarrow X^*$$

( $X^*$  este antidualul lui  $X$ ) prin

$$\langle i(y), x \rangle = \langle y, x \rangle, \quad x \in X,$$

aceasta este continuă și astfel putem identifica orice  $y \in H$  cu imaginea sa  $i(y) \in X^*$ , astfel ca în incluziunea

$$X \subset H \subset X^*$$

fiecare scufundare să fie continuă.

Teorema următoare a fost enunțată de J. Lions și J. Peetre în cadrul spațiilor Banach, dar s-a observat că demonstrația dată este adevărată numai pentru spații reflexive. Demonstrația pe care o dăm folosește teoria operatorilor cvasinormalizabili și a fost dată de J. Nieto.

**TEOREMA 6.6.1.** Fie  $T$  un operator liniar și mărginit pe  $X$  cu spațiul  $X$  invariant pentru  $T$ . În acest caz au loc relațiile :

1.  $T(H) \subset H$ ,
2. restricțiile operatorului  $T$  la  $X$  și  $H$  sînt mărginite și are loc relația

$$\|T\|_H \leq (\|T\|_X \|T\|_{X^*})^{1/2},$$

unde  $\|T\|_H$ ,  $\|T\|_X$ ,  $\|T\|_{X^*}$  înseamnă norma lui  $T$  pe spațiile  $H$ ,  $X$  și respectiv  $X^*$ .

Înainte de a trece la demonstrația teoremei vom face cîteva observații privind antidualul unui spațiu Banach.

Fie  $X$  un spațiu Banach și  $\varphi$  o formă pe  $X$ . Se spune că este antiliniară dacă

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\varphi(x) + \bar{\beta}\varphi(y)$$

oricare ar fi  $x, y \in X$  și  $\alpha, \beta$  numere complexe. Antidualul spațiului  $X$  pe care-l vom nota cu  $X^*$  este prin definiție mulțimea funcționalelor antiliniare și continue definite pe  $X$ . Dacă pentru orice  $\varphi \in X^*$  punem

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|,$$

atunci

$$\varphi \rightarrow \|\varphi\|$$

definește o normă pe  $X^*$  și  $X^*$ ,  $(\|\cdot\|)$  este un spațiu Banach.

Dacă  $X^*$  este antidualul lui  $X$  și  $X$  fiind reflexiv avem aplicația canonică

$$i: X \rightarrow X^{**}$$

definită prin

$$\gamma(x)(\varphi) = \varphi(x), \quad \varphi \in X^*$$

care este o izometrie și este o surjecție.

Dăm acum o observație simplă, care rezultă din teorema graficului închis:

**LEMA 6.6.2.** *Dacă  $X_1$  și  $X_2$  sînt două spații Banach, iar  $X_1 \subset X_2$  și aplicația de scufundare este continuă, iar  $T: X_2 \rightarrow X_2$ , un operator liniar și mărginit și dacă  $X_1$  este invariant pentru  $T$ , atunci restricția sa la  $X_1$  este un operator liniar și mărginit.*

Să trecem acum la demonstrația teoremei 6.6.1.

Fie  $T^*$  operatorul adjunct al operatorului  $T$ , care satisface relația

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

oricare ar fi  $y \in X^{**}$  și  $x \in X^*$ .

Operatorul  $T^*$  este un operator mărginit pe  $X^{**}$  și este cunoscut că

$$\|T^*\| = \|T\|_{X^*}.$$

Să considerăm operatorul

$$Q = \gamma^{-1}T\gamma$$

unde  $\gamma$  este aplicația considerată mai înainte. Cum  $\gamma$  este o izometrie rezultă că operatorul  $Q$  este mărginit și  $\|Q\| = \|T^*\| = \|T\|_{X^*}$ . Dar în acest caz operatorul  $A = QT_0$ ,  $T_0$  fiind restricția lui  $T$  la  $X$  este mărginit ca operator pe  $X$ . Din lema rezultă că este un operator mărginit și avem

$$\|A\| \leq \|Q\| \|T_0\| = \|T\|_{X^*} \|T\|_X.$$

Avem relația

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle T_0 x, T_0 y \rangle$$

oricare ar fi  $x, y$  din  $X$ . Din această relație rezultă că  $A$  este evisinormalizabil și cum

$$\|T_0 x\|_H^2 = \langle Ax, x \rangle$$

avem conform teoremei 6.4.5. și a corolarului 6.4.6. că

$$\|Tx\|_H \leq (\|T\|_{X^*} \|T\|_X)^{1/2} \|x\|,$$

oricare ar fi  $x \in X$ , relație care demonstrează că  $TH \subset H$ . Restricția lui  $T$  la subspațiul  $H$  este un operator mărginit cu

$$\|T\|_H \leq (\|T\|_{X^*})^{1/2} (\|T\|_X)^{1/2}.$$

Teorema este astfel demonstrată.

## § 7. UNELE OBSERVAȚII PRIVIND OPERATORII SIMETRIZABILI

Noțiunea de operator simetrizabil a fost introdusă în cazul operatorilor integrali, legați de teoria ecuațiilor integrale, de către J. Marty în 1910 și de atunci extinsă și studiată de către mulți matematicieni. Vom menționa că printre primele rezultate în această teorie se găsesc și contribuțiile unor matematicieni români printre care vom cita în mod special pe Tr. Lalescu, care a scris prima monografie privind ecuațiile integrale și în care sînt expuse rezultatele privind nucleele simetrizabile obținute pînă la acea dată de P. Sergescu și Th. Angheluță.

Contribuții foarte importante la teoria operatorilor simetrizabili a adus și A. Zaanen, iar W. T. Reid a studiat o clasă specială dar foarte importantă pentru aplicații. Aceste lucrări au fost urmate de o lucrare importantă a lui P. D. Lax în care se obțin rezultate foarte importante și în care se dau aplicații profunde la teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. De asemenea I. G. Gokhberg și M. K. Zambitzky au aplicat teoria operatorilor simetrizabili la teoria spațiilor cu două norme.

Rezultatele expuse de noi sînt, sub forma prezentată aici date de către Dieudonné, West, Murphy, Nieto, V. și I. Istrățescu și Gh. Constantin.

## § 8. UNELE PROBLEME PRIVIND OPERATORII SIMETRIZABILI

Vom menționa aici cîteva probleme strîns legate de materialul expus mai înainte, dintre care unele au fost puse în articolele citate, iar altele autorul crede că prezintă interes.

1. Problema lui J. Dieudonné. În [120] se pune problema dacă, fiind dat un operator  $T$  liniar și continuu, simetrizabil în raport cu un operator hermitic pozitiv,  $H > 0$ , există un subspațiu închis  $m \neq 0$ ,  $m \neq H$  invariant pentru  $T$ ?

2. Este posibil să se extindă noțiunile de operator simetrizabil, operator evasinormalizabil pentru cazul spațiilor local convexe? De asemenea este posibil să se construiască teoria pentru cazul elementelor într-o algebră Banach, mai întîi pentru cazul algebrelor cu involuție și apoi pentru cazul algebrelor arbitrare utilizînd noțiunea de element hermitic, element normal etc. ...?

3° Este posibil să se găsească o caracterizare a operatorilor  $T$  definiți pe spații Hilbert care sînt cu proprietatea că  $T$  și  $T^*$  sînt simetrizabili, normalizabili, evasinormalizabili?

## SPECTRUL WEYL AL UNUI OPERATOR

Este cunoscut că dacă  $A$  este un operator hermitic compact valorile proprii se schimbă foarte mult atunci când se consideră operatorul  $A_1 = A + B$ , unde  $B$  este un operator de același tip. H. Weyl într-o lucrare celebră a arătat că acest lucru nu se mai întâmplă în cazul operatorilor care sînt compacți.

Mai precis H. Weyl a demonstrat următorul rezultat pe care-l cităm după [397], ch. IX, § 134: dacă  $A$  este un operator hermitic mărginit și  $B$  este un operator hermitic compact, atunci mulțimea punctelor limită ale spectrului rămîne invariantă.

Mai tîrziu J. von Neumann a demonstrat și următorul rezultat: dacă  $A$  și  $A'$  sînt operatori hermitici care au aceleași puncte limită în spectru, atunci  $A'$  este unitar echivalent cu un operator  $A''$  astfel ca  $B = A - A''$  să fie un operator compact.

Scopul nostru este de a expune teoreme care extind rezultatele menționate ale lui Weyl și von Neumann la clase de operatori ce conțin clasa operatorilor hermitici în cazul spațiilor Hilbert pe de o parte cît și la clase de operatori definiți pe spații Banach pe de altă parte.

## § 1. PRELIMINARII. NOȚIUNI ȘI REZULTATE GENERALE

Fie  $X$  un spațiu Banach și  $T$  un operator liniar pe  $X$ .  
Definim următoarele numere:

$$\alpha(T) = \dim N(T),$$

$$\beta(T) = \dim N(T^*) = \dim X/R(T)$$

și reamintim că indexul operatorului  $T$  este prin definiție numărul

$$i(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Reamintim de asemenea că  $T$  este operator Fredholm dacă  $\alpha(T)$ ,  $\beta(T)$  sînt finite și  $R(T) = \{y, y = Tx, x \in X\}$  este o mulțime închisă. Dacă  $T$  este nemărginit definim  $\sigma(T)$  ca mulțimea numerelor complexe  $\lambda$  cu proprietățile următoare:

1.  $R(T - \lambda I)$  este dens în  $X$ ,
2. există  $S$  în  $\mathcal{L}(X)$  astfel ca  $S(T - \lambda I)x = Ix$ ,  $(T - \lambda I)Tx = y$ , oricare ar fi  $x \in D(T)$  domeniul pe care este definit  $T$  și oricare ar fi  $y \in R(T - \lambda I)$ .

Mulțimea  $\sigma(T)$  se numește spectru, iar  $\rho(T) = C_{\sigma(T)}$  se numește mulțime rezolventă.

Aie loc :

**TEOREMA 7.1.1.** *Dacă  $X$  este un spațiu Banach și  $T$  este închis<sup>1</sup>  $\lambda \in \sigma(T)$  dacă și numai dacă  $i(T - \lambda I) = 0$ ,  $R(T - \lambda I) = X$ .*

*Demonstrație.* Este evident că condiția pusă este suficientă. Să arătăm că este necesară. În adevăr, dacă  $\lambda \in \sigma(T)$  atunci pentru  $(T - \lambda I)$  există  $S$  astfel ca  $S(T - \lambda I)x = x$  oricare ar fi  $x \in D(T)$ . Deci, dacă  $(T - \lambda I)x = 0$  rezultă că  $x = 0$ . Apoi, dacă  $x \in X$  există  $x_n \in R(T - \lambda I)$  astfel ca  $x_n \rightarrow x$  și deci  $Sx_n \rightarrow Sx$ , deoarece  $S$  este mărginit. Însă  $(T - \lambda I)Sx_n = x_n \rightarrow x$  și cum  $T$  este închis deducem că  $Sx \in D(T)$  și  $(T - \lambda I)Sx = 0$ , adică  $x \in R(T - \lambda I)$  și deci  $R(T - \lambda I) = X$ .

Teorema este demonstrată.

Să notăm cu  $\Phi(X)$  mulțimea operatorilor Fredholm pe spațiul Banach  $X$ . Variația spectrului unui operator  $T$ ,  $\sigma(T)$  este strâns legată de mulțimea  $\Phi_T$  formată din numerele complexe  $\lambda$  cu proprietatea că  $T - \lambda I \in \Phi(X)$ .

Aie loc :

**TEOREMA 7.1.2.** *Mulțimea  $\Phi_T$  este deschisă și funcția este constantă pe orice componentă conexă a mulțimii  $\Phi_T$ .*

*Demonstrație.* Reamintim că operatorul  $T$  este de tip Fredholm dacă și numai dacă există operatorii  $S_1, K_1, K_2$ , cu  $K_i$  operatori compacți,  $i = 1, 2$  astfel ca

$$S_1 T = I - K_1,$$

$$T S_1 = I - K_2.$$

Fie  $T$  un operator de tip Fredholm. Atunci există  $\eta > 0$  astfel că dacă  $S \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\|S\| < \eta$ ,  $T + S$  este de tip Fredholm și

$$i(S + T) = i(T)$$

$$\alpha(T + S) \leq \alpha(T).$$

În adevăr, cum  $T$  este de tip Fredholm există  $S_1, K_1, K_2$  astfel ca

$$S_1 T = I - K_1,$$

$$T S_1 = I - K_2$$

și deci

$$S_1(T + S) = I - K_1 + S_1 S$$

$$(T + S)S_1 = I - K_2 + S S_1.$$

<sup>1</sup> Un operator  $T$  se spune închis dacă, oricare ar fi  $\{x_n\} \in D(T)$  cu proprietatea  $x_n \rightarrow x$  și  $T x_n \rightarrow y$  atunci, în mod necesar  $y = T x$ . Este evident că orice operator mărginit este închis.

Să luăm  $\eta = \|S_1\|^{-1}$ . În acest caz  $\|S_1 S\| \leq \|S_1\| \|S\| < 1$  și  $\|S_1 S\| < 1$ . Rezultă că operatorii  $I + S_1 S$  și  $I + S S_1$  au invers mărginit, de unde deducem că

$$(I + S_1 S)^{-1} S_1 (T + S) = I - (I + S_1 S)^{-1} K_1,$$

$$(S + T) S_1 (I + S S_1)^{-1} = I - K_2 (I + S S_1)^{-1}$$

și deci  $T + S$  este un operator de tip Fredholm. Afirmația este demonstrată deoarece egalitățile pentru index și  $\alpha$  rezultă direct din formulele de mai sus.

Să arătăm că  $\Phi_T$  este o mulțime deschisă. Fie  $\lambda_0 \in \Phi_T$  și deci operatorul  $T - \lambda_0$  este de tip Fredholm. Există conform teoremei de mai sus  $\eta > 0$  astfel că dacă  $|\mu| < \eta$  operatorul  $T - \lambda - \mu$  este de tip Fredholm și deci

$$i(T - \lambda_0 - \mu) = i(T - \lambda_0),$$

$$(T - \lambda_0 - \mu) \leq \alpha(T - \lambda_0).$$

Deci, pentru orice scalar  $\lambda$  astfel ca  $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ ,  $T - \lambda$  este de tip Fredholm și  $i(T - \lambda) = i(T - \lambda_0)$ , iar  $\alpha(T - \lambda) \leq \alpha(T - \lambda_0)$ . De aici rezultă în particular că  $\Phi_T \ni \lambda$  și deci  $\Phi_T$  este deschisă.

Să arătăm că indexul este constant pe fiecare componentă. Fie  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  două puncte arbitrare în  $\Phi_T$  care sînt în aceeași componentă convexă și deci există o curbă netedă  $C \subset \Phi_T$  care trece prin ele. Deci, pentru orice  $\lambda \in C$  există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $i(T - \lambda) = i(T - \mu)$  oricare ar fi  $\mu$ ,  $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ . Din teorema lui Borel-Lebesgue rezultă că există un număr finit  $\mu_1, \dots, \mu_n$  astfel ca cercurile respective să acopere pe  $C$  și cum se pot ordona într-un șir astfel ca cele alăturate să aibă intersecție nevidă, rezultă că  $i(T - \lambda_1) = i(T - \lambda_2)$ .

Teorema este demonstrată.

Pentru teorema următoare avem nevoie de următoarele definiții :

DEFINIȚIA 7.1.3. Un operator  $B$  se numește  $A$ -mărginit dacă

1.  $D(A) \subseteq D(B)$ ,
2.  $\overline{D(A)} = X$ ,
3.  $\|Bx\| \leq K\{\|x\| + \|Ax\|\}$ .

DEFINIȚIA 7.1.4. Operatorul  $B$  se numește  $A$ -compact dacă

1.  $D(A) \subseteq D(B)$ ,
2.  $\overline{D(A)} = X$ ,
3. dacă  $\{x_n\} \subset D(A)$  și  $\|Ax_n\| + \|x_n\| \leq k = \text{const.}$ , atunci șirul  $\{x_n\}$  admite un subsir convergent.

TEOREMA 7.1.5. Are loc  $\Phi_{T+K} = \Phi_T$  pentru orice operator  $K$ ,  $T$ -compact și

$$i(T + K - \lambda) = i(T - \lambda), \quad (\forall) \lambda \in \Phi_T.$$

*Demonstrație.* Rezultă din faptul că  $T + K$  este de tip Fredholm și relația dintre  $i(\cdot)$  este evidentă.

## § 2. SPECTRUL WEYL

Vom introduce acum noțiunea de spectru Weyl al unui operator.

**DEFINIȚIA 7.2.1.** Prin spectrul Weyl al unui operator  $T$  dens definit vom înțelege mulțimea notată cu  $\sigma_e(\cdot)$  sau  $\omega(\cdot)$

$$\sigma_e = \bigcap_K \sigma(T + K) = \omega(T),$$

unde  $K$  parcurge mulțimea operatorilor compacți.

Uneori  $\sigma_e$  se mai numește spectru esențial al operatorului  $T$ .

Următoarea teoremă dă caracterizarea spectrului Weyl al unui operator cu ajutorul operatorilor Fredholm.

**TEOREMA 7.2.2.** Numărul complex  $\lambda$  nu este în  $\sigma_e(T)$  dacă și numai dacă

1.  $\lambda \in \Phi_T$ ,
2.  $i(T - \lambda) = 0$ .

*Demonstrație.* Dacă  $\lambda \in \sigma_e(T)$  atunci există  $K$  compact astfel ca  $\lambda \in \rho(T + K)$  și deci  $\lambda \in \Phi_{T+K}$ ,  $i(T + K - \lambda) = 0$ , conform cu teorema precedentă. Să adăugăm operatorul  $-K$  la  $T + K$ , deducem că  $\lambda \in \Phi_T$  și  $i(T - \lambda) = 0$  tot conform cu teorema de mai înainte.

Să presupunem acum că  $\lambda \in \Phi_A$ ,  $i(T - \lambda) = 0$  și să arătăm că  $\lambda \in \sigma_e$ . Putem presupune fără a restringe generalitatea că  $\lambda = 0$ . Fie  $x_1, \dots, x_n$  o bază pentru  $N(T)$  și  $y'_1, \dots, y'_n$  o bază pentru  $R(T)^0$ , dualul lui  $R(T)$ . Există  $x'_1, \dots, x'_n$  și  $y_1, \dots, y_n$  astfel ca:

1.  $x'_j(x_k) = \delta_{jk}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,
2.  $y'_j(y_k) = \delta_{jk}$ ,  $1 \leq k \leq n$

și să punem  $F_x = \sum_{k=1}^n x'_k(x)y_k$  pentru  $x \in X$  care este un operator de rang finit și avem  $N(T) \cap N(F) = \{0\}$ , iar  $R(T) \cap R(F) = \{0\}$ . În adevăr,  $x \in N(T)$  atunci  $x = \sum_{i=1}^h \alpha_i x_i$  și deci  $x'_j(x) = \alpha_j$ ; dar cum dacă  $x \in N(F)$  avem  $x'_j(x) = 0$  și deci prima afirmație este adevărată. Analog se demonstrează și a doua relație.

Evident că  $F$  este compact, deci  $0 \in \Phi_{T+F}$  și  $i(T + F) = 0$ . Dacă  $x \in N(T + F)$  atunci  $Tx$  este în  $R(T) \cap R(F)$  și deci este nul. Dacă  $x$  este în  $N(A) \cap N(F)$  rezultă că  $x = 0$  și deci  $\alpha(T + F) = 0$  care ne arată că  $R(T + F) = X$  adică  $0 \in \rho(T + F)$  și teorema este demonstrată.

Din teoremele 7.1.5. și 7.1.2. rezultă și următorul rezultat pe care-l dăm sub forma de:

**TEOREMA 7.2.3.** Dacă  $S$  este  $T$ -compact atunci

$$\sigma_e(T + S) = \sigma_e(S).$$

*Observație.* Există o clasă de operatori care conține clasa operatorilor Fredholm și anume clasa operatorilor semi-Fredholm.

Vom reaminti numai definiția lor : un operator (nemărginit) închis  $A$  se va numi de tip semi-Fredholm dacă au loc următoarele afirmații :

1.  $D(A)$  este dens în  $X$ ,
2.  $R(A)$  este închis în  $X$ ,
3.  $\alpha(A) < \infty$ .

Vom reaminti și un fapt interesant care ne dă submulțimi ale spectrului Weyl : fie  $\mathcal{L}(X)$  algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $X$ , iar  $K$  idealul bilateral al operatorilor compacți pe  $X$ ,  $K \subset \mathcal{L}(X)$  și cum  $K$  este închis putem considera algebra cât  $\mathcal{C} = \mathcal{L}(X)/K$  numită și algebra lui Calkin a spațiului  $X$ . Pentru orice  $T \in \mathcal{L}(X)$  să notăm cu  $\hat{T}$  imaginea sa în  $\mathcal{C}$  și atunci  $\sigma(\hat{T})$  este o submulțime închisă și compactă din plan (nevidă chiar).

Evident că

$$\sigma(\hat{T}) \subset \sigma_e(T)$$

cînd  $T$  este în  $\mathcal{L}(X)$  și în cele ce urmează vom considera numai astfel de operatori.

În următorul exemplu determinăm spectrul Weyl al operatorului de translație.

Fie  $H$  un spațiu Hilbert separabil și  $\{e_i\}_0^\infty$  o bază a sa (ortonormală). Pentru orice  $i$  să definim

$$U(e_i) = e_{i+1}.$$

Cum  $\hat{U}$  nu are valori proprii așa după cum vom arăta mai departe

$$\sigma_e(U) = \sigma(U) = \{z, |z| \leq 1\}.$$

Însă  $\hat{U}$  este un operator unitar și deci  $\sigma(\hat{U}) \subseteq \{z, |z| = 1\}$ . Să arătăm că este exact  $\{z, |z| = 1\}$ . Fie  $\lambda, |\lambda| = 1$  astfel ca  $\hat{U} - \lambda I$  să fie invertibil și deci  $U - \lambda I$  este operator Fredholm. Cum

$$N(U - \lambda I) = N(U^* - \bar{\lambda} I) = \{0\}$$

deoarece  $U$  este hiponormal deducem că  $U - \lambda I$  are indexul zero și deci este invertibil; aceasta este o contradicție. Avem în acest mod un exemplu de operator pentru care  $\sigma(\hat{T}) \subset \sigma_e(T)$ , incluziunea fiind strictă. Din definiția spectrului Weyl al unui operator rezultă că are loc :

**TEOREMA 7.2.4.** Pentru orice operator  $T$

$$\sigma_e(T) = \overline{\sigma_e(T^*)} = \{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma_e(T^*)\}.$$

Fie  $T$  un operator și să notăm :

1.  $\pi_0(T)$  mulțimea valorilor proprii,
2.  $\pi_{0f}(T)$  mulțimea valorilor proprii de multiplicitate finită.
3.  $\pi_{0i}(T)$  mulțimea valorilor proprii de multiplicitate infinită,
4.  $\pi_{00}(T)$  mulțimea valorilor proprii izolate de multiplicitate finită.

TEOREMA 7.2.5. Pentru orice operator  $T$

$$\sigma(T) - \sigma_e(T) \subseteq \pi_0 f(T)$$

sau echivalent

$$\sigma(T) - \pi_0 f(T) \subset \sigma_e(T).$$

*Demonstrație.* Fie  $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_e(T)$  și deci  $S = T - \lambda I$  este ne-inversabil și Fredholm de index zero și deci  $N(T - \lambda I) \neq 0$ , de unde

$$0 \leq \dim N(T - \lambda I) < \infty.$$

Din aceasta rezultă următorul :

COROLAR 7.2.6. Dacă  $T$  este un operator arbitrar și  $K$  un operator compact

$$\sigma(T) - \pi_0 f(T) \subset \sigma(T + K),$$

sau echivalent

$$\sigma(T) - \sigma(T + K) \subset \pi_0 f(T).$$

*Demonstrație.* Rezultă din teorema de mai sus și definiția spectrului Weyl  $\sigma_e(T)$ .

Vom remarca faptul că din definiția spectrului Weyl rezultă :

TEOREMA 7.2.7. Dacă  $K$  este un operator compact atunci

$$\sigma_e(K) = \{0\}.$$

Vom considera acum cazul cînd  $X$  este un spațiu Hilbert.

Are loc :

TEOREMA 7.2.8. Dacă  $T$  este un operator normal și  $f$  este o funcție continuă cu valori complexe definită pe  $\sigma(T)$  atunci

$$\sigma_e(f(T)) = f(\overline{\sigma_e(T)}).$$

*Demonstrație.* Algebra Calkin este o algebră Banach cu involuție care este o  $B^*$ -algebră și dacă  $T$  este normal atunci  $\hat{T}$  este de asemenea normal. Am văzut că  $\sigma(\hat{T}) \subset \sigma(T)$  și din teoria operatorilor normali avem că

$$\sigma(f(\hat{T})) = f(\sigma(\hat{T}))$$

și cum pentru orice operator normal

$$\sigma_e(T) = \sigma(\hat{T})$$

teorema este demonstrată.

**TEOREMA 7.2.9.** *Dacă  $T$  este un operator arbitrar atunci pentru orice polinom  $p(\lambda)$  are loc relația*

$$\omega(p(T)) = \sigma_e(p(T)) \subset p(\sigma_e(T)) = p(\omega(T))$$

și incluziunea poate fi strictă.

*Demonstrație.* Evident, putem presupune că  $p$  este neconstant și fie  $\mu \in p(\omega(T))$ , iar

$$p(\lambda) - \mu = a(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

și deci

$$\mu(T) - \mu I = a(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n I).$$

Pentru fiecare  $j$ ,  $p(\lambda_j) \neq \mu \notin p(\omega(T))$  și deci  $\lambda_j \notin \omega(T)$  adică  $T - \lambda_j I$  are indexul zero oricare ar fi  $1 \leq j \leq n$ . Deci și  $p(T) - \mu$  va fi tot cu indexul zero și deci  $\mu$  nu este nici în  $\omega(p(T))$ .

Ultima afirmație o demonstrăm printr-un exemplu.

Fie pentru aceasta  $U$  translația pe un spațiu Hilbert  $H$  și să considerăm operatorul  $T = U \oplus (U^* + 2I)$  și  $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$ . În acest caz

$$1. 0 \in p(\omega(T)),$$

$$2. 0 \notin \omega(p(T)).$$

În adevăr,

$$p(T) = T = T(T - 2I) = [U \oplus (U + 2I)][(U - 2I) \oplus U^*].$$

Cum  $U$  este un operator Fredholm de index-1 și cum  $U^* + 2I$  și  $U - 2I$  sînt invertibili rezultă că  $T$  și  $T - 2I$  sînt de tip Fredholm de indici  $-1$  și  $+1$  respectiv. Deci  $p(T)$  este de index 0 și deci  $0 \in \omega(p(T))$  în timp ce  $0 = p(0) \in p(\sigma_e(T))$ .

*Observație.* Exemplul de mai sus arată că spectrul Weyl nu este legat de o structură de algebră, deoarece într-o algebră are loc teorema de „spectral mapping”.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente pentru „spectral mapping theorem”, pentru  $\sigma_e(T)$  în cazul polinoamelor.

**TEOREMA 7.2.10.** *Dacă are loc afirmația  $\pi_0 f(T) = \Phi$  sau  $\pi_0 f(T)^* = \Phi$  atunci pentru orice polinom  $p(\lambda)$  are loc relația*

$$p(\sigma_e(T)) = \sigma_e(p(T)).$$

*Demonstrație.* Este suficient să considerăm numai cazul  $\pi_0 f(T) = \Phi$ , după cum rezultă din teorema 7.2.3. Este evident că are loc relația  $\pi_0 f(p(T)) \subset p(\pi_0 f(T))$  și deci cum  $\pi_0 f(T) = \Phi$  rezultă că  $\pi_0 f(p(T)) = \Phi$ , de unde avem că

$$\sigma_e(p(T)) = \sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = p(\sigma_e(T)).$$

Teorema este demonstrată.

O teoremă utilă în studiul spectrului Weyl este și următoarea:  
**TEOREMA 7.2.11.** Fie  $T$  un operator, iar  $\delta \subset \pi_0(T)$  și  $T$  este redus de fiecare subspațiu  $N(T - \lambda I)$ ,  $\lambda \in \delta$ , iar  $M$  spațiul închis care conține pe  $N(T - \lambda I)$ ,  $\lambda \in \delta$ . În acest caz:

1.  $M$  reduce pe  $T$  și subspațiile  $N(T - \lambda I)$ ,  $\lambda \in \delta$  sînt două cîte două ortogonale,

2.  $T_1 = T|_M$  și  $T_2 = T|_{M^\perp}$  au proprietatea că  $T_1$  este normal și spectrul său coincide cu spectrul punctual  $\pi_0(T_1) = \delta$ .

$$3. \sigma(T_1) = \bar{\delta},$$

$$4. \pi_0(T_2) = \pi_0(T) - \delta,$$

$$5. \text{dacă } \lambda \in \pi_0(T_2) \text{ atunci } N(T - \lambda I) \subset M^\perp, N(T - \lambda I) = N(T_2 - \lambda I),$$

$$6. \sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2),$$

$$7. \sigma_e(T) = \sigma_e(T_1) \cup \sigma_e(T_2).$$

*Demonstrație.* Cum dacă  $N(T)$  reduce, atunci  $N(T) \subseteq N(T^*)$  și deci

$$N(T - \lambda I) \subset N(T^* - \bar{\lambda} I) \quad \lambda \in \delta$$

deducem că subspațiile sînt două cîte două ortogonale și primele trei afirmații sînt evidente. Fie  $\lambda \in \pi_0(T_1)$ , deci există  $y_0 \in M^\perp$  astfel ca  $(T - \lambda I)y_0 = 0$  și deci  $N(T - \lambda I)$  nu este în  $M$  și din definiția lui  $M$  rezultă că  $\lambda \notin \delta$ , adică  $\pi_0(T_2) \subset \pi_0(T) - \delta$ , ceea ce demonstrează afirmația 4.

Să luăm  $\lambda \in \pi_0(T) - \delta$  și să arătăm că  $N(T - \lambda I) \subset M^\perp$ . Fie deci  $x \in N(T - \lambda I)$ ,  $x = y + z$  cu  $y \in M$  și  $z \in M^\perp$ . În acest caz avem că  $\lambda x = \lambda y + \lambda z = Tx = Ty + Tz$  și cum  $M$  și  $M^\perp$  sînt invariante pentru  $T$  deducem că  $Ty = \lambda y$  și dacă  $y \neq 0$  aceasta ne dă că  $\lambda \in \pi_0(T_1) - \delta$  care este o contradicție și  $y = 0$ . Deci  $x = z \in M^\perp$  și afirmația 5 este demonstrată.

Afirmațiile 6 și 7 rezultă din descompunerea

$$T = T_1 \oplus T_2$$

cu  $T_1$  operator normal.

Teorema este demonstrată.

Vom observa că rezultatul fundamental obținut de H. Weyl poate fi formulat astfel: pentru orice operator hermitic  $T$  are loc relația

$$\sigma_e(T) = \sigma(T) - \pi_{00}(T).$$

Aceasta a sugerat lui L. Coburn următoarea definiție:

**DEFINIȚIA 7.2.12.** Se spune că pentru un operator  $T$  are loc teorema lui Weyl dacă are loc egalitatea

$$\sigma_e(T) = \sigma(T) - \pi_{00}(T).$$

O problemă importantă în teoria spectrului lui Weyl al unui operator este de a găsi clase de operatori pentru care teorema lui Weyl are loc.

Vom introduce mai multe clase de operatori care vor permite formularea unor condiții suficiente și uneori necesare pentru ca teorema lui Weyl să aibă loc pentru operatorii din clasa respectivă.

Am văzut la studiul operatorilor cu proprietatea  $G_1$  că orice punct din spectru care este izolat este o valoare proprie. Aceasta sugerează introducerea următoarei clase care conține clasa operatorilor cu proprietatea  $G_1$ .

**DEFINIȚIA 7.2.13.** Se spune că operatorul  $T$  este izoloid dacă orice punct din spectru care este izolat este valoare proprie a lui  $T$ .

**DEFINIȚIA 7.2.14.** Se spune că operatorul  $T$  satisface condiția  $(\alpha)$  dacă restricția sa la orice subspațiu invariant are proprietatea  $G_1$ .

**DEFINIȚIA 7.2.15.** Se spune că operatorul  $T$  satisface condiția  $(\alpha')$  dacă orice sumand direct al lui  $T$  satisface condiția  $G_1$ .

**DEFINIȚIA 7.2.16.** Se spune că operatorul  $T$  satisface condiția  $(\alpha'')$  dacă restricția sa la orice subspațiu invariant este un operator convexoid.

**DEFINIȚIA 7.2.17.** Se spune că operatorul  $T$  satisface condiția  $(\alpha''')$  dacă orice sumand direct al lui  $T$  este izoloid.

**DEFINIȚIA 7.2.18.** Se spune că operatorul  $T$  satisface condiția  $(\lambda)$  dacă

$$N(T - \lambda I) \cap N(T^* - \bar{\lambda} I)^n$$

nu se reduce la  $\{0\}$  pentru un anumit întreg  $n$  care poate depinde de  $\lambda$ ; în cazul spațiilor Banach această condiție se formulează astfel: condiția  $(\lambda)$  are loc dacă

$$N(T - \lambda I) = \{R(T - \lambda I)^n\}$$

nu se reduce la  $\{0\}$  pentru un anumit întreg  $n$  care poate depinde de  $\lambda$ .

Vom reaminti că dacă  $T$  este un operator pe un spațiu Banach atunci modulul minim al operatorului este numărul

$$r(T) = \inf\{\|Tx\|/d(x, N(T)), \quad x \in D_T, \quad x \notin N(T)\}$$

și pentru orice  $\lambda$  definim funcția

$$\lambda \rightarrow r(T - \lambda) = r(\lambda).$$

Pentru orice  $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$ ,  $\dim PX < \infty$ , unde  $P$  este idempotentul

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} -(\lambda - T)^{-1} d\lambda$$

cu  $\Gamma$  o curbă rectificabilă simplă închisă care conține pe  $\lambda_0$  în interior și nu conține alte puncte din  $\sigma(T)$ .

Pentru orice  $\lambda, \lambda_0$  să punem

$$\begin{aligned}\delta(\lambda, \lambda_0) &= \delta(N(T - \lambda), N(T - \lambda_0)) = \\ &= \sup\{d(x_\lambda, N(T - \lambda_0)), x_\lambda \in N(T - \lambda), \|x_\lambda\| = 1\}\end{aligned}$$

și numărul  $\delta(\lambda, \lambda_0)$  se va mai numi deschiderea între spațiile  $N(T - \lambda)$  și  $N(T - \lambda_0)$ ; se spune că  $T$  satisface condiția de subspațiu de deschidere în  $\lambda_0$ , dacă există  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  astfel ca

$$|\lambda_n - \lambda_0| = o(\delta(\lambda_n, \lambda_0))$$

sau

$$N(T - \lambda_n) = \{0\}.$$

Teorema ce urmează dă condiții necesare și suficiente pentru ca teorema lui Weyl să aibă loc pentru operatorul  $T$ .

**TEOREMA 7.2.19.** *Următoarele condiții sînt fiecare necesare și suficiente pentru ca teorema lui Weyl să aibă loc pentru operatorul  $T$ :*

$$1^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{i)} & \lambda \in \Delta_4^s(T) \text{ satisface } (\lambda), \\ \text{ii)} & \forall \lambda \in \pi_{00}(T) \text{ are proprietatea că } r(\lambda) > 0; \end{cases}$$

$$2^\circ \rightarrow \text{i)} r(\lambda) \text{ este discontinuă în orice punct } \lambda \in \Delta_4^s(T) \cup \pi_{00}(T);$$

$$3^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{i)} & \forall \lambda \in \Delta_4^s(T), \alpha(T - \lambda) < \infty, \\ \text{ii)} & \forall \lambda \in \pi_{00}(T), \beta(T - \lambda) < \infty, \end{cases}$$

$$4^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{i)} & \forall \lambda \in \Delta_4^s(T) \text{ satisface condiția de subspațiu de deschidere.} \\ \text{ii)} & \forall \lambda \in \pi_{00}(T) \text{ are multiplicitate algebrică finită;} \end{cases}$$

$$5^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{i)} & \Delta_4^s(T) \subset \partial \sigma(T), \\ \text{ii)} & \forall \lambda \in \pi_{00}(T) \text{ este pol al rezolventei operatorului } T, \end{cases}$$

unde  $\Delta_4 = \{\lambda, T - \lambda \text{ este de tip Fredholm, } i(T - \lambda) = 0\}$ , iar  $\Delta_4^s$  sînt acele puncte din  $\Delta_4$  care sînt valori proprii.

Înainte de a începe demonstrația teoremei vom observa că teorema lui Weyl are loc pentru operatorul  $T$  dacă și numai dacă  $\Delta_4^s = \pi_{00}(T)$  după cum rezultă din teorema de caracterizare a spectrului Weyl.

*Demonstrația teoremei 7.2.19.* 1°. Fie  $\lambda \in \Delta_4^S$  și în acest caz  $[N(T - \lambda)^*]^n = R((T - \lambda)^n)$ , deci condiția  $(\lambda)$  în versiunea spațiilor Banach și a spațiilor Hilbert coincide.

Cum  $\lambda_0 \in \Delta_4^S$  atunci pentru  $\lambda$  într-o vecinătate a lui  $\lambda_0$ , este tot în  $\Delta_4^S$  și  $\alpha(T - \lambda)$  este constant într-o vecinătate a lui  $\lambda_0$ , adică  $\alpha(T - \lambda) < \alpha(T - \lambda_0)$  dacă și numai dacă  $(\lambda_0)$  are loc după cum rezultă din teorema 7.1.2. Dacă orice  $\lambda \in \Delta_4^S$  are proprietatea  $(\lambda)$ , fie  $\lambda_1 \neq \lambda_0$  și situat în vecinătatea considerată mai sus a lui  $\lambda_0$ . Dacă  $\alpha(T - \lambda_1) \neq 0$  atunci pentru orice  $\lambda$  suficient de aproape de  $\lambda_1$  rezultă din  $(\lambda_1)$  că  $\alpha(T - \lambda) < \alpha(T - \lambda_1)$  și aceasta contrazice faptul că  $\alpha(T - \lambda)$  este constantă pe vecinătatea considerată.

Dacă teorema lui Weyl are loc atunci  $\Delta_4^S \subset \pi_{00}$  și în același mod ca mai sus deducem că  $(\lambda_0)$  are loc oricare ar fi  $\lambda_0 \in \Delta_4^S$ . Deci i) de la 1° are loc dacă și numai dacă  $\Delta_4^S \subset \pi_{00}$ .

Dacă  $r(\pi_{00}) > 0$  atunci  $i(T - \lambda_0) = i(T - \lambda) = 0$  pentru orice  $\lambda_0 \in \pi_{00}$  dacă  $\lambda$  este suficient de aproape de  $\lambda_0$ , de unde  $\pi_{00} \subset \Delta_4^S$ .

Cum  $r(\Delta_4^S) > 0$  și  $\pi_{00} \subset \Delta_4^S \Rightarrow r(\pi_{00}) > 0$  deducem că  $\pi_{00} \subset \Delta_4^S$  dacă și numai dacă ii) de la 1° are loc.

Deci 1° este demonstrată.

Să demonstrăm 2°. Să presupunem că  $r(\lambda)$  este discontinuă în orice punct din  $\Delta_4^S$  și să luăm  $\lambda_0 \in \Delta_4^S$ . Cum  $r(T - \lambda) > 0$  pentru  $\lambda$  suficient de aproape de  $\lambda_0$  deducem că  $\alpha(T - \lambda) < \alpha(T - \lambda_0)$  căci în caz contrar ar fi continuă și deci discontinuitatea funcției  $r$  în  $\lambda_0$  ne dă pentru valori  $\lambda$  aproape de  $\lambda_0$ , că  $\lambda$  este în  $\Delta_4^S$  și  $\alpha(T - \lambda) = 0$  ca mai sus, de unde  $\Delta_4^S \subset \pi_{00}$ . Să arătăm că  $\pi_{00} \subset \Delta_4^S$  dacă și numai dacă  $r$  este discontinuă pe  $\pi_{00}$ . Cum pentru  $\lambda_0 \in \pi_{00}$ ,  $r(\lambda) = \|(T - \lambda)^{-1}\|^{-1} \rightarrow 0$  pentru  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  care din discontinuitatea funcției  $r$  rezultă că este echivalentă cu  $r(\pi_{00}) > 0$ , deci conform cu 1°, ii) este echivalent cu relația  $\pi_{00} \subset \Delta_4^S$ . Analog  $\Delta_4^S \subset \pi_{00}$  ne dă că  $r(\lambda_0) > 0$  și  $r(T - \lambda) \rightarrow 0$  pentru  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in \Delta_4^S$ ; 2° este demonstrată. Celelalte afirmații se demonstrează similar. Pentru detalii a se vedea K. Gustafson [162], [166].

Din teoremă rezultă imediat următoarele:

1) Teorema lui Weyl are loc dacă operatorul  $T$  este hiponormal, Se verifică imediat că 3° este adevărată.

2) Teorema lui Weyl are loc pentru orice operator care are următoarele proprietăți:

α)  $T$  este redus de orice subspațiu de dimensiune finită,

β) pentru orice subspațiu  $M$  care reduce pe  $T$ ,  $T/M$  este izoloid, adică orice  $\lambda$  izolat din spectru este valoare proprie; se verifică că putem aplica 1°;

3) Teorema lui Weyl are loc dacă  $T^*$  este hiponormal deoarece

$$\sigma_e(T) = \overline{\sigma_e(T^*)}.$$

Rezultatul obținut de Weyl a fost formulat utilizînd noțiunea de limită.

Vom studia acum legătura între spectrul Weyl și punctele limită ale spectrului. Să presupunem pentru aceasta că avem un operator  $T$  care este redus de orice subspațiu de vectori proprii și fie  $\delta_0 = \pi_0(T)$ , iar operatorul  $T$  se poate scrie sub forma  $T = T_1 \oplus T_2$  unde  $T_1$  este restricția lui  $T$  la subspațiile proprii (la suma lor ortogonală). Evident că  $T_1$  este normal și :

$$1. \pi_0(T) = \pi_0(T_1), \sigma(T_1) = \overline{\pi_0(T)}, \pi_0(T_2) = \emptyset.$$

**DEFINIȚIA 7.2.20.** Fie  $T$  un operator care este redus de orice subspațiu de vectori proprii și să definim  $\tau(T)$  mulțimea acelor puncte  $\lambda$  din  $\sigma(T)$  cu următoarea proprietate:

$$1^\circ \lambda \in \sigma(T_2),$$

sau

$$2^\circ \lambda \in \pi'_0(T) \text{ este mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii } \pi_0(T),$$

ori

$$3^\circ \lambda \text{ este o valoare proprie cu multiplicitate infinită.}$$

Vom observa că  $\tau(T)$  este o mulțime închisă deoarece  $\tau(T) = \sigma(T_2) \cup \pi'_0(T) \cup \pi_{0,i}(T)$ , deoarece primele două mulțimi sînt închise, iar orice punct de acumulare al celei de a treia este în  $\pi'_0(T)$ .

**TEOREMA 7.2.21** *Mulțimea  $\tau(T)$  este nevidă.*

*Demonstrație.* Să presupunem că este vidă, și deci, în particular  $\sigma(T_2) = \emptyset$  adică  $M^\perp = \{0\}$ , deci  $M = H$ , de unde  $T = T_1$ . Cum  $\pi'_0(T) = \emptyset$  rezultă că  $\pi_0(T)$  este o mulțime finită și deci  $T_1$  este suma unor combinații de proiecții ortogonale care sînt finit-dimensionale și deci  $H$  este finit-dimensional, ceea ce noi nu am presupus.

**DEFINIȚIA 7.2.22.** Dacă  $T$  este un operator hermitic punctele din  $\tau(T)$  se numesc puncte limită.

Următoarea teoremă dă unele informații privind mulțimea  $\tau(T)$  pentru unele clase de operatori.

**TEOREMA 7.2.23.** *Dacă  $T$  este un operator care satisface următoarele proprietăți :*

$$1. \text{ are loc } (\alpha'''),$$

$$2. T \text{ este redus de orice subspațiu de vectori proprii, atunci}$$

$$\sigma(T) - \pi_{00}(T) = \tau(T) = \omega(T).$$

*Demonstrație.* Cum teorema lui Weyl are loc pentru  $T$ , este suficient să arătăm că

$$\sigma(T) - \tau(T) = \pi_{00}(T).$$

Fie  $\lambda \in \pi_{00}(T)$  și să arătăm că  $\lambda \notin \sigma(T_2) \cup \pi'_0(T) \cup \pi_{0,i}(T)$ . Evident că nu este în  $\pi_{0,i}(T)$  și  $\pi'_0(T)$ . Să arătăm că nu este nici în  $\sigma(T_2)$ . Cum  $\lambda$  este izolat în  $\sigma(T)$ , dacă ar fi în  $\sigma(T_2)$  ar fi izolat și în  $\sigma(T_2)$ , deci

ar fi valoare proprie pentru  $T_2$ . Cum  $(\alpha''')$  are loc, am deduce că  $\pi_0(T_2) \neq \emptyset$ . Deci o incluziune este demonstrată. Fie acum  $\lambda$  în  $\sigma(T)$  și nu în  $\tau(T)$ . Deci nu este în  $\sigma(T_2)$  și deci

$$\lambda \in \sigma(T_1) = \overline{\pi_0(T)} = \pi_0(T) \cup \pi'_0(T).$$

Deci în mod necesar este în  $\pi_0(T)$  și cum nu este în  $\pi_{0f}(T)$ , deducem că este de multiplicitate finită.

Rămâne să mai demonstrăm că este izolată. Dacă n-ar fi așa, atunci ar exista  $\lambda_n \in \sigma(T)$  astfel ca  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ,  $\lambda_n \neq \lambda$  și cum  $\lambda \in \pi'_0(T)$  deducem că pentru o infinitate de indici  $\lambda_n \in \sigma(T_2)$  care ne dă că  $\lambda \in \sigma(T_2)$  și aceasta este o contradicție. Teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 7.2.24. Fie  $T$  un operator care este redus de orice subspațiu de vectori proprii finit-dimensional și să punem

$$\tau'(T) = \pi_{0f}(T) \cup \sigma(T_2).$$

Are loc :

TEOREMA 7.2.25. *Mulțimea  $\tau'(T)$  este nevidă și închisă.*

*Demonstrație.* Faptul că este o mulțime închisă este evident. Să arătăm că este nevidă. Dacă ar fi așa atunci  $\sigma(T_2) = \emptyset$  și deci  $M = H$ ,  $T = T_1$  și  $\sigma(T) = \pi_{0f}(T)$ . Cum  $\pi_{0f}(T) = \emptyset$  deducem că  $\pi_{0f}(T)$  este o mulțime finită și atunci  $H$  este finit-dimensional, aceasta este o contradicție. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă este analogul teoremei 7.2.23. pentru  $\tau'(T)$ .

TEOREMA 7.2.26. *Dacă  $T$  este un operator ca în definiția 7.2.24. și are proprietatea  $(\alpha''')$  atunci*

$$\tau'(T) = \tau(T).$$

*Demonstrație.* Este suficient să demonstrăm că

$$\sigma(T) - \tau'(T) = \pi_{00}(T).$$

Fie deci  $\lambda \in \pi_{00}(T)$  și să presupunem că este în  $\tau'(T)$ . În acest caz cum  $\lambda \in \pi_{0f}(T)$  deducem că  $\lambda \in \sigma(T_2)$  și  $\lambda$  este izolat în  $\sigma(T_2)$ , de unde rezultă că este valoare proprie pentru  $T_2$ . Cum  $T$  are proprietatea  $(\alpha''')$  deducem că  $\lambda$  este o valoare proprie și am ajuns la o contradicție.

Fie acum  $\lambda \in \sigma(T)$  și nu este în  $\tau'(T)$ . Deci nu este în  $\sigma(T_2)$  și cum  $\sigma(T_2)$  este o mulțime închisă, există o mulțime deschisă  $U \ni \lambda$  astfel ca  $U \cap \sigma(T_2) = \emptyset$ .

În acest caz  $\lambda \in \sigma(T_1) = \pi_{0f}(T)$  și cum  $\lambda \notin \pi_{0f}(T)$  deducem că  $\lambda \in \pi_{0f}(T)$  și deci  $\lambda$  este izolat în  $\pi_{0f}(T)$ . Fie  $V$  o mulțime deschisă astfel ca  $V \cap \sigma(T_1) = \{\lambda\}$ . Deci  $W = U \cap V$  este o mulțime deschisă cu proprietățile :

1.  $W \ni \lambda$ ,
2.  $W \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$

și deci este izolat și în  $\sigma(T)$ . Cum  $\lambda \in \pi_{0f}(T)$  deducem că  $\lambda \in \pi_{00}(T)$ . Evident din cele de mai sus deducem rezultatul clasic al lui Weyl.

**TEOREMA 7.2.27.** *Dacă  $T$  este hermitic, iar  $K$  este compact și hermitic atunci*

$$\tau(T) = \tau(T + K).$$

Înainte de a da alte rezultate privind spectrul Weyl vom arăta că spectrul Weyl permite caracterizarea structurii unor clase de operatori.

**DEFINIȚIA 7.2.28.** Un operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  se spune că este polinomial compact dacă există un polinom  $p(\lambda)$  neidentic nul astfel ca  $p(T) = C$ , unde  $C$  este un operator compact.

**DEFINIȚIA 7.2.29.** Un operator  $T$  se spune că este real polinomial compact dacă există un polinom  $p(\lambda)$  astfel ca  $\operatorname{Re} p(T)$  să fie compact.

Vom da în cele ce urmează unele teoreme de structură ale operatorilor din aceste clase.

**TEOREMA 7.2.30.** *Dacă  $T$  este în  $\mathcal{L}(H)$  și are următoarele proprietăți:*

1. *este redus de orice subspațiu  $N(T - \lambda)$ ,  $\lambda \in \pi_{00}(T)$ ,*

2.  *$(\alpha''')$ ,*

3. *are loc teorema lui Weyl,*

*atunci  $T$  poate fi scris sub forma  $T = T_1 \oplus T_2$  unde  $T_1$  este normal și nu mai are spectru punctual,  $\sigma(T_2) \subset \sigma_e(T)$ , iar  $T_1 = T|_M$ ,  $T_2 = T|_{M^\perp}$  unde  $M$  este spațiul generat de spațiile  $N(T - \lambda)$ ,  $\lambda \in \pi_{00}(T)$ .*

*Demonstrație.* Fie  $\delta = \pi_{00}(T)$  și evident că  $T = T_1 \oplus T_2$ . Rămâne să arătăm că  $\sigma(T_2) \subseteq \sigma_e(T)$ . Să presupunem că avem  $\lambda \in \sigma(T_2)$  și care nu este în  $\sigma_e(T)$ .

În acest caz  $\lambda \in \pi_{00}(T)$  și deci  $\lambda$  este izolat în  $\sigma(T)$  de unde rezultă că  $N(T - \lambda) \subset M$  și cum  $(\alpha''')$  are loc, deducem că  $\lambda$  este valoare proprie pentru  $T_2$ , ceea ce nu se poate.

Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și următoarea :

**TEOREMA 7.2.31.** *Dacă  $T$  este în  $\mathcal{L}(H)$  și are una din proprietățile :*

1°  *$(\alpha''')$  are loc și orice subspațiu propriu finit-dimensional îl reduce.*

*sau*

2°  *$(\alpha''')$ ,  $(G_1)$  și teorema lui Weyl are loc, atunci concluziile teoremei 7.2.30. sînt adevărate.*

*Demonstrație.* Dacă 1° are loc atunci teorema lui Weyl are loc și putem aplica teorema 7.2.30. Dacă 2° are loc, din proprietatea  $G_1$  deducem că pentru orice  $\lambda \in \pi_{00}(T)$ ,  $N(T - \lambda) = N(T^* - \bar{\lambda})$  și deci putem aplica teorema 7.2.30.

În teoremele de structură care urmează vom avea nevoie de următoarea teoremă :

**TEOREMA 7.2.32.** *Condiția necesară și suficientă ca un operator normal  $T$  să fie compact este ca  $\sigma_e(T) = \{0\}$ .*

*Demonstrație.* Să notăm cu  $\hat{T}$  imaginea lui  $T$  în algebra Calkin  $\mathcal{C}$  și știm că  $\hat{T}$  este un operator normal.

Dacă  $\sigma(\hat{T}) = \sigma_e(T) = \{0\}$  atunci  $\hat{T}$  este operatorul zero dacă  $T$  este normal și deci în mod necesar  $T$  este compact. Dacă  $T$  este compact este evident că  $\hat{T}$  trebuie să fie zero. Teorema este demonstrată.

*Observație.* Teorema rămâne adevărată pentru orice operator cu proprietatea că  $T$  și  $\hat{T}$  sînt normaloizi.

Următoarea teoremă dă structura operatorilor normali polinomial compacti, utilizînd spectrul Weyl.

**TEOREMA 7.2.33.** *Fie  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operator normal atunci următoarele afirmații sînt echivalente :*

- 1°  $T$  este polinomial compact,
- 2° există o funcție continuă  $f$  cu valori complexe definită pe  $\sigma(T)$  astfel ca  $f(T)$  să fie compact și  $f$  să aibă cel mult un număr finit de zerouri pe  $\sigma(T)$ ,
- 3°  $\sigma_e(T)$  este o mulțime finită.

*Demonstrație.* Evident  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . Să arătăm că  $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . Cum  $T$  este normal și pentru orice  $f, f(\sigma_e(T)) = \sigma_e(f(T))$  deoarece  $\hat{T}$  este normal și  $\sigma_e(T) = \sigma(\hat{T})$ , deducem că  $\sigma_e(T)$  este o mulțime finită deoarece  $f$  are numai un număr finit de zerouri. Să demonstrăm că  $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ .

Fie  $p(\lambda)$  un polinom care se anulează pe mulțimea finită  $\sigma_e(T)$  și deci cum  $p(\sigma_e(T)) = \sigma_e(p(T))$  deducem că  $\sigma_e(p(T)) = \{0\}$  și deci  $p(T)$  trebuie să fie un operator compact. Teorema este astfel demonstrată.

*Observație.* Este ușor de văzut că un operator normal este polinomial compact dacă și numai dacă are forma

$$T = (K_1 + \lambda_1 I) \oplus (K_2 + \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus (K_n + \lambda_n I),$$

unde  $K_i$  sînt operatori normali și compacti, iar suma de mai sus este ortogonală.

Următoarea teoremă reprezintă o extensie a teoremei 7.2.33 de mai sus.

**TEOREMA 7.2.34.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  și are următoarele proprietăți :*

1. este redus de orice subspațiu de vectori proprii,
2.  $(\alpha''')$  are loc

*atunci  $T$  este polinomial compact dacă și numai dacă  $\sigma_e(T)$  este o mulțime finită.*

*Demonstrație.* Fie  $\delta_0 = \pi_0(T)$  și să punem  $T = T_1 \oplus T_2$  cu  $T_1$  operator normal și  $T_2$  un operator fără valori proprii. Dacă  $M$  este subspațiul generat de subspații de vectori proprii ale lui  $T$ , evident că  $T_1 = T/M$  și  $T_2 = T/M^\perp$ .

Fie  $T$  polinomial compact și să arătăm că în acest caz  $M^\perp = \{0\}$ . Dacă nu ar fi așa, fie  $p(\lambda)$  astfel ca  $p(T) = \text{compact}$ . În acest caz avem că  $p(T) = p(T_1) \oplus p(T_2)$  unde  $p(T_i)$ ,  $i = 1, 2$  sînt operatori compacti. Cum  $\pi_0(p(T)) = p(\pi_0(T))$  și  $p(\pi_0(T_2)) = \pi_0(p(T_2))$  deducem că  $p(T_2)$  este un operator compact fără valori proprii și deci  $\sigma(p(T_2)) = \{0\}$  care ne arată că  $\sigma(p(T_2)) = p(\sigma(T_2))$  este mulțimea  $\{0\}$  și deci  $\sigma(T_2)$  este finită. Din  $(\alpha''')$  deducem că orice  $\lambda \in \sigma(T_2)$  este o valoare pentru  $T_2$  și am obținut o contradicție. Deci  $M^\perp = \{0\}$  și operatorului normal  $p(T_1)$  îi putem aplica teorema de mai sus.

Fie acum  $\sigma_e(T)$  finită și să presupunem că  $M^\perp \neq \{0\}$ . Cum  $\sigma_e(T) = \sigma_e(T_1) \cup \sigma_e(T_2)$  deducem că  $\sigma_e(T_2)$  este finită. Dar atunci cum  $\sigma(T_2) - \sigma_e(T_2) \subset \pi_{\sigma_f}(T_2) \subset \pi_0(T_2) = \emptyset$ , deducem că  $\sigma_e(T_2) = \sigma(T_2)$  și  $(\alpha''')$  ne dă o contradicție. Teorema este demonstrată.

*Observație.* Dacă  $T$  satisface condițiile din teoremă, este evident că este normal. Din această teoremă rezultă următoarea :

**TEOREMA 7.2.35.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  are proprietatea  $(\alpha'')$  și este redus de orice subspațiu finit-dimensional, atunci  $T$  este polinomial compact dacă și numai dacă  $\sigma_e(T)$  este o mulțime finită.*

*Demonstrație.* Cum  $(\alpha'') \Rightarrow (\alpha''')$  teorema lui Weyl are loc pentru această clasă de operatori și deci din teorema 7.2.11 rezultă că putem scrie  $T = T_1 \oplus T_2$  cu  $T_1$  normal și  $\sigma(T_2) \subset \sigma_e(T)$ .

Dacă  $\sigma_e(T)$  este finită deducem că și  $\sigma(T_2)$  este finită și cum  $(\alpha'')$  este adevărată,  $T_2$  este normal și deci  $T = T_1 \oplus T_2$  este normal și putem aplica teorema 7.2.32.

Fie acum  $T$  polinomial compact și  $p(x)$  un polinom care are proprietatea că  $p(T)$  este un operator compact. Să punem  $\pi_{0f}(T) = \delta$  și să scriem  $T = T_1 \oplus T_2$  cu  $T_1$  normal și  $T_2$  fără valori proprii de multiplicitate finită. Cum  $p(T) = p(T_1) \oplus p(T_2)$  este compact deducem că și  $p(T_2)$  este compact și cum  $\pi_{0f}(T_2) = p(\pi_{0f}(T)) = \emptyset$  deducem că  $\sigma(p(T_2)) = \{0\}$ .  $\sigma(T_2)$  este o mulțime finită și cum  $T_2$  are proprietatea  $(\alpha'')$  rezultă că  $T_2$  este normal și deci  $T$  este normal; putem aplica teorema și astfel demonstrația este terminată.

**TEOREMA 7.2.36.** *Dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  are următoarele proprietăți :*

1°  $\sigma_e(T)$  este  $\{0\}$ ,

2° teorema lui Weyl are loc pentru  $T$ ,

3°  $(\alpha')$  sau  $(\alpha'')$  au loc,

*atunci  $T$  este compact și normal.*

*Demonstrație.* Cum  $\sigma(T) - \{0\} = \pi_{00}(T)$ , orice punct  $\lambda \in \sigma(T)$   $\lambda \neq 0$  este izolat și deci  $\sigma(T)$  are cel mult un punct de acumulare din  $(\alpha')$  sau  $(\alpha'')$  deducem că  $\sigma(T)$  are numai spectru punctual și deci este normal. Cum  $\lambda \neq 0$  sînt de multiplicitate finită, operatorul  $T$  este normal. Teorema este astfel demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat următoarele afirmații pe care le dăm în :

**TEOREMA 7.2.37.** *Dacă  $T$  este un operator astfel încît una din următoarele afirmații are loc :*

1° teorema lui Weyl are loc pentru  $T$  și de asemenea  $(\alpha')$  sau  $(\alpha'')$ ,

2°  $\sigma_e(T) = \{\lambda\}$ , teorema lui Weyl are loc pentru  $T$  și  $(\alpha')$  sau  $(\alpha'')$ ,

*atunci în cazul cînd 1° are loc,  $T$  este compact și normal, iar dacă 2° are loc,  $T - \lambda I$  este compact și normal.*

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema de mai sus.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor compacți în termeni de spectru Weyl.

**TEOREMA 7.2.38.** *Condiția necesară și suficientă ca operatorul  $K$  să fie compact este ca*

$$\sigma_e(T + K) = \sigma_e(T)$$

*oricare ar fi  $T \in \mathcal{L}(H)$ .*

*Demonstrație.* Evident condiția este necesară. Să arătăm că este și suficientă. Vom avea pentru  $T = 0$  că,  $\sigma_e(K) = 0$  și pentru  $K^*$  vom avea de asemenea  $\sigma_e(K^*) = \{0\}$ , și deci  $K + K^*$  este compact; de asemenea  $K = K^*$  este compact. Deducem că operatorul  $K$  este compact.

Teorema este demonstrată.

Vom prezenta acum câteva rezultate privind clasa de operatori considerată în definițiile 7.2.28 și 7.2.29.

Vom prezenta mai întâi câteva rezultate privind operatorii  $T \in \mathcal{L}(H)$  care au proprietatea că partea imaginară este compactă.

Fie deci  $T = A + iB$  cu  $A$  și  $B$  operatori hermitici, iar  $B$  este presupus compact. Are loc:

**TEOREMA 7.2.39.** *Dacă  $T$  este ca mai sus și  $\lambda_0$  are proprietatea că  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$ , iar  $\{x_n\}$  și  $\{y_n\}$  șiruri mărginite din  $H$  astfel ca*

$$(T - \lambda_0) x_n = y_n$$

și  $\{y_n\}$  este convergent, atunci  $\{x_n\}$  este o mulțime relativ compactă.

*Demonstrație.* Noi vom arăta mai mult că dacă  $\lambda_0$  nu este o valoare proprie,  $\{x_n\}$  este chiar convergent.

Cum  $A$  este hermitic și  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$  rezultă că  $(A - \lambda_0)^{-1}$  există. Deci

$$(T - \lambda_0) x_n = y_n$$

se poate scrie și sub forma

$$x_n = (A - \lambda_0)^{-1} y_n - (A - \lambda_0)^{-1} B x_n$$

și cum  $B$  este compact deducem că  $\{x_n\}$  admite un subsir convergent. Dacă șirul ar conține două subsiruri convergente către două limite diferite atunci

$$(T - \lambda_0) x_0 = (T - \lambda_0) \tilde{x}_0$$

și deci

$$(T - \lambda_0) (x_0 + \tilde{x}_0) = 0$$

care contrazice afirmația că  $\lambda_0$  nu este valoare proprie. Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 7.2.40.** *Dacă  $\lambda_0$  este cu proprietatea că  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$  atunci  $x_1 = (T - \lambda_0) H$  este un subspațiu închis.*

*Demonstrație.* Fie  $f \in H$  și  $H_f = \{g, (T - \lambda_0) g = f\}$ , deoarece  $H_f$  este o mulțime convexă și închisă există un singur element de normă minimă  $f'$ , în această mulțime. Să arătăm că există o constantă  $M$  astfel ca

$$\|f'\| \leq M \|f\|$$

oricare ar fi  $f \in H$ . În adevăr, dacă nu ar fi așa atunci ar exista  $\{f_n\}$  și  $\{f'_n\}$  astfel ca

$$\|f'_n\| \geq n \|f_n\|$$

și evident putem presupune că

$$(T - \lambda_0) \frac{f'_n}{\|f'_n\|} = \frac{f_n}{\|f_n\|} \rightarrow 0,$$

iar teorema de mai sus ne dă că există  $\frac{f'_{n_k}}{\|f'_{n_k}\|} \rightarrow f_0$  și deci

$$(T - \lambda_0) f_0 = 0.$$

În acest caz, pentru orice  $n$  avem

$$(T - \lambda_0) (f'_n - f_0) = f'_n,$$

$$\left\| \frac{f'_n}{\|f'_n\|} - f_0 \right\| \geq \frac{\|f'_n\|}{\|f'_n\|} = 1,$$

afirmație care nu este adevărată. Faptul că  $X_1$  este mulțime închisă rezultă imediat.

În adevăr, dacă  $f_n \in X_1$  și  $f_n \rightarrow f$ , deoarece avem

$$\|f'_n\| \leq \|f_n\| M,$$

deducem că șirul  $\{f'_n\}$  este mărginit și din teorema de mai sus, deducem că admite un subșir convergent,  $f'_{n_k} \rightarrow f_0$ . Evident că  $(T - \lambda_0) f_0 = f$ . Vom observa că dacă  $\lambda_0$  nu este valoare proprie pentru  $T$ , operatorul  $(T - \lambda_0)^{-1}$  există.

Următoarele teoreme dau unele informații privind natura spectrului operatorului  $T$ .

**TEOREMA 7.2.41.** *Dacă  $\{e_i\}_i^\infty$  este un sistem ortonormal și*

$$T e_k = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k,k-1} e_{k-1} + \alpha_{k,k} e_k$$

oricare ar fi  $k = 1, 2, 3, \dots$  atunci  $\lim \operatorname{Im} \lambda_k = 0$ .

*Demonstrație.* Vom avea

$$B e_k = \alpha_{k1} e_1 + \dots + \alpha_{kk-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k - A e_k$$

și deci pentru  $s < k$  vom obține

$$\begin{aligned} \|B e_k - B e_s\| &\geq |\langle B e_k - B e_s, e_k \rangle| = \\ &= |\lambda_k - \langle B e_k, e_k \rangle + \langle B e_s, e_k \rangle| \geq |\operatorname{Im} \{\lambda_k - \langle B e_k, e_k \rangle - \\ &\quad - \langle B e_s, e_k \rangle\}| = |\operatorname{Im} \lambda_k + \operatorname{Im} \langle B e_s, e_k \rangle| \geq \\ &\geq |\operatorname{Im} \lambda_k| - |\langle B e_s, e_k \rangle|. \end{aligned}$$

Dacă  $\operatorname{Im} \lambda_k \not\rightarrow 0$  atunci ar exista un subșir  $\{k_n\}$  astfel ca  $|\operatorname{Im} \lambda_{k_n}| \geq \varepsilon$  și cum  $B$  este compact am avea

$$\|B e_k - B e_s\| \geq \varepsilon - |\langle B e_s, e_k \rangle|$$

și aceasta contrazice faptul că  $\{B e_k\}$  conține un subșir convergent. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și:

**TEOREMA 7.2.42.** *Dacă  $\lambda_0$  nu este o valoare proprie pentru  $T$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$ , atunci*

$$(T - \lambda_0) H \neq H.$$

*Demonstrație.* Să presupunem că avem egalitate și deci există un șir  $\{f_n\}_1^\infty$  astfel ca:

1.  $(A - \lambda_0)f_1 = f_2$ ,
2.  $(A - \lambda_0)f_i = f_{i+1}$ ,  $i = 2, 3, \dots$

și  $\{f_n\}$  este un sistem liniar independent. Să notăm cu  $\{e_i\}_1^\infty$  șirul ortonormal obținut din acesta. Deci avem

$$e_k = \beta_{k1}f_1 + \dots + \beta_{kk}f_k$$

și deci

$$(A - \lambda_0)e_k = \beta_{k2}f_1 + \dots + \beta_{kk}f_k = \alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{kk-1}e_{k-1}$$

sau

$$Ae_k = \alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{kk-1}e_{k-1} + \lambda_0e_k$$

și în baza lemei  $\text{Im } \lambda_0 = 0$ . Această contradicție demonstrează teorema.

**TEOREMA 7.2.43.** *Orice punct  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im } \lambda_0 \neq 0$  este o valoare proprie.*

*Demonstrație.* Conform cu teorema de mai sus, este suficient să arătăm că  $(T - \lambda_0)H = H$ . Să presupunem că nu este așa. Deci  $(T - \lambda_0)H \neq H$  și cum  $X_1$  este o mulțime închisă, există  $x_0$  astfel ca  $(T^* - \lambda_0)x_0 = 0$ . Dar atunci  $T^*$  este un operator pentru care putem aplica teorema de mai sus, avem că  $(T^* - \lambda_0)H = H_1 \neq H$  și în baza teoremei de mai înainte  $H_1$  fiind închis, există  $f$  ortogonal la  $H_1$ , și deci  $(T - \lambda_0)f = 0$ , ceea ce contrazice ipoteza.

Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 7.2.44.** *Mulțimea punctelor din spectru cu proprietatea că  $\text{Im } \lambda_n \neq 0$  este finită sau numărabilă și punctele de acumulare se găsesc pe axa reală.*

*Demonstrație.* Die  $\varepsilon > 0$  și  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  un șir de puncte din  $\sigma(T)$  cu  $\text{Im } \lambda_i \neq 0$ ,  $|\text{Im } \lambda_i| \geq \varepsilon$ .  $Te_k = \lambda_k f_k$  oricare ar fi  $n$ .

Să considerăm șirul ortonormal corespunzător  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ . Cum avem

$$e_k = \beta_{k1}f_1 + \dots + \beta_{kk}f_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

deducem că

$$\begin{aligned} Te_k &= \beta_{k1}\lambda_1f_1 + \dots + \beta_{kk}\lambda_kf_k = \beta_{k1}(\lambda_1 - \lambda_k)f_1 + \beta_{k2}(\lambda_2 - \lambda_k)f_2 + \dots + \\ &+ \beta_{kk}(\lambda_k - \lambda_k)f_k + \lambda_k(\beta_{k1}f_1 + \dots + \beta_{kk}f_k) = \\ &= \alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{kk-1}e_{k-1} + \alpha_{kk}e_k \end{aligned}$$

și trebuie să avem  $\lim \text{Im } \lambda_k = 0$ , ceea ce este o contradicție și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 7.2.45.** *Dacă  $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ,  $\text{Im } \lambda_0 \neq 0$ , atunci  $H\lambda_0 = \{f, \text{ există } p \text{ astfel că } (T - \lambda_0)p = 0\}$  este un subspațiu de dimensiune finită.*

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este așa și fie  $\{f_n\}$  un șir de elemente liniar independente astfel ca

$$Tf_k = \beta_{k1}f_1 + \dots + \beta_{kk-1}f_{k-1} + \lambda_0f_k$$

și fie atunci

$$e_k = r_{k1}f_1 + \dots + r_{kk}f_k$$

șirul ortonormal corespunzător. În acest caz, după cum se vede ușor

$$Te_k = \alpha_{k1}e_1 + \dots + \alpha_{k,k-1}e_{k-1} + \lambda_0 e_k$$

de unde deducem că  $\lim \operatorname{Im} \lambda_0 = 0$ , această contradicție demonstrează teorema.

Vom demonstra mai întâi următoarea teoremă care reprezintă analogul teoremei 7.2.33.

**TEOREMA 7.2.46.** *Condiția necesară și suficientă ca operatorul normal  $T$  să fie cu parte imaginară compactă este ca  $\{\lambda, \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \lambda \in \sigma_e(T)\}$  să fie vidă.*

*Demonstrație.* Cum  $T$  este normal,  $\hat{T}$  este normal și dacă  $\operatorname{Im} T = \text{compact}$ , evident că  $\hat{T}$  este hermitic și deci  $\sigma_e(T) \subset \mathbb{R}$ . Să presupunem acum că  $T$  are proprietatea că  $\sigma_e(T) \subset \mathbb{R}$ . În acest caz,  $\sigma_e(\operatorname{Im}(T)) = 0$  care ne dă că  $\operatorname{Im} T$  este compactă conform cu teorema 7.2.38.

Din această teoremă, deducem ca și în cazul operatorilor polinomiali compacți, teoreme de structură.

**TEOREMA 7.2.47.** *Dacă  $T$  este un operator normal pe spațiul Hilbert  $H$ , atunci următoarele afirmații sînt echivalente :*

- 1) există  $p(\lambda)$  astfel ca  $\operatorname{Im} p(T) = \text{compact}$ ,
- 2)  $\{\lambda, \lambda \in \sigma_e(T), \operatorname{Im} \lambda \neq 0\}$  este finită.

În adevăr, fie  $T$  cu proprietatea că pentru un anume  $p(\lambda)$   $p(T)$  are proprietatea că  $\operatorname{Im} p(T) = \text{compact}$ . Cum  $\hat{T}$  este un operator normal și operatorul  $p(\hat{T})$  este normal.

Dar

$$\sigma_e(p(T)) = \sigma(p(\hat{T}))$$

și deci cum

$$\sigma(\operatorname{Im} p(\hat{T})) = \operatorname{Im} \sigma(p(\hat{T}))$$

deducem că

$$\operatorname{Im} \sigma_e(p(\hat{T})) = 0 = \operatorname{Im} p(\sigma_e(T)).$$

Punctele din spectru cu  $\operatorname{Im} \neq 0$  sînt astfel în număr finit.

Deci  $1 \Rightarrow 2$ . Să arătăm că  $2 \Rightarrow 1$ . Fie deci  $p$  un polinom astfel ca  $\operatorname{Re} p(\lambda) = 0$  oricare ar fi  $\lambda \in \sigma_e(T)$  cu  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  și să formăm operatorul  $p(T)$  care este normal. Cum avem

$$\sigma_e(p(T)) = \sigma(p(\hat{T})) = p(\sigma(\hat{T}))$$

și

$$\sigma(\operatorname{Re} p(\hat{T})) = \operatorname{Re} \sigma(p(\hat{T})) = \operatorname{Re} p(\sigma(\hat{T}))$$

deducem că  $\operatorname{Re} (p(\hat{T}))$  are spectrul Weyl egal cu  $\{0\}$  și deci  $\operatorname{Re} p(T)$  este compact. Deci teorema este demonstrată.

Vom remarca și faptul că teoremele 7.2.34 — 7.2.38 admit o variantă în acest cadru și cum demonstrația nu diferă esențial, noi nu vom da aceste variante.

O problemă interesantă ar fi să se caracterizeze operatorii cu parte imaginară compactă în termeni de spectru Weyl. În acest sens avem:

**TEOREMA 7.2.48.** *Dacă  $T$  este un operator astfel ca*

$$\operatorname{Im} \sigma_e(T + S) = \operatorname{Im} \sigma_e(S)$$

*oricare ar fi  $S$ , atunci în mod necesar  $\operatorname{Im} T = \text{compact}$ .*

*Demonstrație.* Pentru  $S = 0$  avem

$$\operatorname{Im} \sigma_e(T) = 0$$

și pentru  $S = -T^*$  deducem că

$$\operatorname{Im} \sigma_e(T - T^*) = -\operatorname{Im} \sigma_e(T^*) = 0$$

și deci  $T - T^*$  este un operator compact.

Teorema este astfel demonstrată.

### § 3. TEOREMA LUI VON NEUMANN

Vom încheia acest capitol cu unele informații privind structura operatorilor normali în legătură cu spectrul Weyl.

John von Neumann a demonstrat că dacă  $A$  și  $B$  sînt doi operatori hermitici și mărginiți care au același spectru Weyl, iar spațiul Hilbert pe care sînt definiți este separabil, atunci există în mod necesar un operator unitar  $U$  astfel ca  $B - UAU^*$  să fie un operator compact. Gustafson și Weidmann au arătat că, în general, teorema nu este adevărată dacă  $A$  și  $B$  sînt operatori arbitrari pe  $H$ . S. K. Berberian a pus problema dacă teorema este adevărată pentru operatori normali. Răspunsul la această problemă este afirmativ și a fost găsit independent de către W. Sikonja și I. D. Berg.

Vom menționa că pare interesantă problema următoare: dacă  $A$  și  $B$  sînt elemente hermitiene sau mai general elemente normale, în algebra  $\mathcal{E}(\mathfrak{X})$  a operatorilor liniari și mărginiți pe un spațiu Banach separabil, atunci există o versiune a teoremei lui von Neumann? Rezultatul va fi interesant chiar în cazul elementelor hermitice.

De asemenea ar fi interesant de văzut dacă teorema lui von Neumann este adevărată pentru cazul elementelor într-o algebră von Neumann cu spectrul Weyl așa cum este definit în lucrarea autorului menționată mai înainte.

## NORME SCHWARZ

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $\|\cdot\|$  norma naturală pe  $\mathcal{L}(H)$ , algebra Banach a operatorilor liniari și mărginiți pe  $H$ , atunci este ușor de văzut, deoarece  $\{z, |z| \leq 1\}$  este o mulțime spectrală pentru orice operator contractiv, că dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  are proprietatea  $\|T\| \leq 1$  și  $f$  este o funcție analitică în interiorul cercului unitate și mărginită de 1 cu  $f(0) = 0$ , atunci  $\|f(T)\| \leq \|T\|$ .

Apare astfel o problemă interesantă, de a vedea dacă există și alte norme pe  $\mathcal{L}(H)$ , echivalente cu norma  $\|\cdot\|$  și care să posede această proprietate.

Prin definiție o normă cu proprietatea de mai sus se spune că este o normă Schwarz.

## § 1. NORME SCHWARZ PE SPAȚII HILBERT

Vom arăta în primul rând că condiția  $f(0) = 0$  nu poate fi omisă în formulările de mai sus.

Fie  $\alpha \in \{z, |z| < 1\}$  și să considerăm funcția

$$\varphi_\alpha(Z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

care transformă interiorul cercului  $\{z, |z| \leq 1\}$  în interior și frontiera tot în frontieră după cum se poate remarca ușor. Este cunoscut că pe  $\mathcal{L}(H)$  putem considera și norma

$$T \rightarrow \omega(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\} = \|T\|_1$$

unde  $W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$ . Are loc

**TEOREMA 8.1.1.** *Avem  $\|\varphi_\alpha(T)\|_1 \leq 1, \forall \alpha, |\alpha| < 1$  dacă și numai dacă  $\|T\|_2 = \|T\| \leq 1$ .*

*Demonstrație.* Cum este evident că  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$  condiția pusă este evident suficientă. Să arătăm că este necesară.

Cum avem

$$|\langle (T - \alpha)x, (1 - \bar{\alpha}T)x \rangle| \leq \|(1 - \bar{\alpha}Tx)\|_2^2 = \|(1 - \bar{\alpha}Tx)\|^2$$

oricare ar fi  $x \in H$  și  $|\alpha| < 1$ . De aici rezultă că

$$\lambda(\|x\|^2 + \|Tx\|^2) + (\lambda^2 + 1)|\langle Tx, x \rangle| \leq \|x\|^2 + 2\lambda|\langle Tx, x \rangle| + \lambda^2\|Tx\|^2,$$

dacă  $x \in H$  și  $\lambda \in (0, 1)$ . Deci

$$0 \leq (\lambda - 1)[\lambda(\|Tx\|^2 - |\langle Tx, x \rangle|) - (\|x\|^2 - |\langle Tx, x \rangle|)]$$

de unde rezultă că expresia din paranteză trebuie să fie  $\leq 0$ , deci

$$\lambda(\|Tx\|^2 - |\langle Tx, x \rangle|) - (\|x\|^2 - |\langle Tx, x \rangle|) \leq 0$$

și pentru  $\lambda \rightarrow 1$  obținem că

$$\|Tx\|^2 \leq \|x\|^2$$

adică  $\|T\|_2 = \|T\| \leq 1$ . Teorema este demonstrată.

Vom mai demonstra acum două teoreme privind clasa de operatori contractii și clasa de operatori contractii numerice (adică operatori cu proprietatea că  $\omega(T) \leq 1 \Leftrightarrow W(T) \subset \{z, |z| \leq 1\}$ ).

**TEOREMA 8.1.2.** *T este contracție dacă și numai dacă:*

1.  $\sigma(T) \subset \{z, |z| \leq 1\}$ ,
2.  $\operatorname{Re}(1 + zT)(1 - zT)^{-1} \geq 0, \quad \forall z, |z| < 1$ .

**TEOREMA 8.1.3.** *T este contracție numerică dacă și numai dacă:*

1.  $\sigma(T) \subset \{z, |z| \leq 1\}$ ,
2.  $\operatorname{Re}(1 - zT)^{-1} \geq 0 \quad \forall z, |z| < 1$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra mai înainte teorema 8.1.2. Fie deci  $T$  contracție și în acest caz pentru  $z, |z| < 1$  operatorul  $1 - zT$  este invertibil. Vom avea, pentru  $y = (I - zT)x, x \in H$  relația

$$\langle (I + zT)(I - zT)^{-1}y, y \rangle = \langle (I + zT)x, (I - zT)x \rangle,$$

de unde

$$\operatorname{Re} \langle (I + zT)(I - zT)^{-1}y, y \rangle = \|x\|^2 - |z|^2\|Tx\|^2$$

și necesitatea este demonstrată. De aici rezultă imediat că cele două condiții puse sînt și suficiente, deoarece putem lua  $z \rightarrow 1$ .

*Demonstrația teoremei 8.1.3.* se face astfel: faptul că raza numerică a operatorului  $T$  este  $\leq 1$  este echivalentă cu faptul că pentru orice  $x \in H, \|x\| = 1$  are loc relația

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq 1.$$

Cum raza spectrală este  $\leq 1$  deducem că pentru orice  $z, |z| < 1$  operatorul  $1 - zT$  este invertibil. Vom observa că  $\omega(T) \leq 1$  este echivalentă

cu relația  $\operatorname{Re} \langle (1 - zT)x, x \rangle \geq 0$  și să arătăm că este echivalentă cu  $\operatorname{Re}(1 - zT)^{-1} \geq 1$ . Fie  $B = (1 - zT)$  și deci

$$\langle Bx, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Bx, BB^{-1}x \rangle = \langle B^{-1}Bx, Bx \rangle = \langle B^{-1}y, y \rangle$$

adică  $\operatorname{Re} \langle Bx, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} B^{-1} \geq 0$  și afirmația teoremei este demonstrată deoarece afirmația privind spectrele este evidentă.

Vom observa că avem de a face cu expresii de forma  $1 + c \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n$  și condițiile puse în teoreme se referă la  $\operatorname{Re} \left( 1 + c \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n \right)$ . Aceasta sugerează următoarea definiție:

**DEFINIȚIA 8.1.4.** Pentru  $c > 0$  vom nota cu  $S_c$  clasa operatorilor din  $\mathcal{L}(H)$  cu următoarele proprietăți:

$$1. \sigma(T) \subseteq \{z, |z| \leq 1\},$$

$$2. \operatorname{Re} \left( 1 + c \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n \right) \geq 0, \forall z, |z| < 1.$$

Este evident că pentru  $c = 1$  obținem clasa contractiilor, iar pentru  $c = 2$  obținem clasa contractiilor numerice.

Vom da acum o proprietate a operatorilor din clasa  $S_c$ ; pentru aceasta vom avea nevoie de următoarea teoremă a lui Herglotz<sup>1</sup> pe care o dăm sub forma teoremei următoare:

**TEOREMA 8.1.5.** Orice funcție analitică  $f$  în  $\{z, |z| < 1\}$  cu proprietatea că  $\operatorname{Re} f \geq 0$  poate fi reprezentată sub forma

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dF(\theta),$$

unde  $\beta$  este un număr real și  $F$  este o funcție crescătoare.

*Demonstrație.* Cum orice funcție analitică în  $\{z, |z| < 1\}$  are forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} u(r e^{i\theta}) d\theta + i\beta,$$

unde  $u$  este partea reală, dacă punem

$$F_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta u(r e^{it}) dt,$$

atunci,

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} dF(\theta).$$

<sup>1</sup> A se vedea Appendix, II.

Cum  $u$  este o parte reală a unei funcții analitice și deci este armonică, de unde

$$F_r(\theta) \leq F_r(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} u(0)$$

și deci familia de funcții  $\{F_r\}$  este uniform mărginită și cu variație uniform mărginită, rezultă conform teoremei lui Helly, că putem extrage un subsir convergent către o funcție crescătoare  $F$  (convergența are loc în toate punctele de continuitate). Cum

$$\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \rightarrow \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

uniform pentru  $r \rightarrow 1$  cu  $z$  fixat în cercul unitate. Deducem că

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dF(\theta)$$

și teorema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei teoreme putem demonstra :

**TEOREMA 8.1.6.** Dacă  $S \in S_r(c > 0)$  atunci  $f(T) \in S_c$  pentru orice  $f$  rațională cu poli în afara lui  $D$  și cu proprietatea  $f(0) = 0$ .

*Demonstrație.* Dacă  $T \in S_c$  și  $f \in R(D)$ , atunci

$$f_x(z) = \|x\|^2 + c \sum_{n=1}^{\infty} z^n \langle T^n x, x \rangle$$

este cu parte reală pozitivă și conform formulei de mai înainte putem scrie

$$f_x(x) = \int \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} dF_x(\theta),$$

unde  $F_x(\theta)$  este o funcție crescătoare pozitivă pe  $[0, 2\pi]$  și  $z, |z| < 1$ . Deducem că are loc relația

$$c \langle T^n x, x \rangle = 2 \int e^{in\theta} dF_x(\theta),$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ . Dacă  $p(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$  este un polinom, vom obține

$$c \langle p(T) x, x \rangle = 2 \int p(e^{i\theta}) dF_x(\theta),$$

de unde rezultă că dacă  $p$  are proprietatea  $\|p\| \leq 1$  atunci  $\|p(T)^n\|$  este mărginit și deci

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( 1 + c \sum_1^\infty z^n p(T)^n x \right), x \right\rangle = \\ & = \|x\|^2 + 2 \sum_1^\infty z^n \int p(e^{i\theta})^n dF_x(\theta) = \int \frac{1 + zp(e^{i\theta})}{1 - zp(e^{i\theta})} dF_x(\theta). \end{aligned}$$

Cum funcția de sub integrală are partea reală pozitivă deducem că  $p(T) \in S_c$ . Dacă  $f$  este arbitrară în  $R(D)$ ,  $f(0) = 0$ , atunci cum poate fi aproximată uniform pe cercuri cu rază  $1 + \varepsilon$  de polinoame teorema rezultă din cele demonstrate mai sus.

Următoarea teoremă dă alte proprietăți ale clasei de operatori  $S_c$ .

**TEOREMA 8.1.7.** *Die  $c > 0$ , atunci au loc următoarele afirmații:*

- 1°.  $S_c^* = S_c$ ,
- 2°.  $S_{c'} \not\subset S_c$ , dacă  $c < c'$ ,  $S_c \subset S_{c'}$ ,
- 3°.  $S_c$  este convexă dacă și numai dacă  $c \geq 1$ ,
- 4°. dacă  $c \geq 1$ ,  $T \in S_c$ , dacă și numai dacă are loc relația

$$(c-1) \|Tx\|^2 + |2-c| \langle Tx, x \rangle \leq \|x\|^2.$$

*Demonstrație.* Vom remarca faptul că  $T \in S_c$  dacă și numai dacă oricare ar fi  $z$ ,  $|z| < 1$ , avem

$$\operatorname{Re} \langle (1 - zT)^{-1} x, x \rangle \geq (1 - c^{-1}) \|x\|^2$$

și de aici primele două afirmații rezultă imediat.

Dacă  $c \geq 1$  atunci  $R \in S_c$  este echivalentă cu

$$(*) \quad \operatorname{Re} \langle y, (1 - zT)y \rangle \geq \frac{c-1}{c} \|(1 - zT)y\|^2,$$

oricare ar fi  $y \in H$  și  $z$ ,  $|z| < 1$ . Cum pentru orice  $y$ ,  $T_1$  și  $T_2$ , avem

$$\frac{1}{4} \|T_1 y + T_2 y\|^2 \leq \frac{1}{2} \{\|T_1 y\|^2 + \|T_2 y\|^2\}$$

deducem că  $S_c$  este o mulțime convexă pentru  $c \geq 1$ . De asemenea ultima afirmație rezultă imediat din (\*).

Pentru a termina demonstrația trebuie să arătăm că  $S_c \subset S_{c'}$  cu incluziune strictă și că, dacă  $c < 1$ ,  $S_c$  nu este convexă.

Fie operatorul cu matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  care este nilpotent și cu norma  $\|A\|_2 = 1/2$ ,  $A^2 = 0$ . Deci,  $SA \subset S_c$  dacă și numai dacă

$$0 \leq \operatorname{Re} \left( 1 + c \sum_1^\infty z^n S^n A^n \right) = \operatorname{Re}(1 + cz SA).$$

Cum pentru  $|z| < 1$ , spectrul operatorului  $\operatorname{Re}(1 + czsA)$  este format din punctele

$$1 \pm 1/2 |c s|$$

deducem că  $sA \in S_c$  dacă și numai dacă  $|s| \leq 2$ . Deducem că dacă  $c > 0$ ,  $\frac{2}{c} A \in S_c$ . De asemenea dacă  $c' > c$ , atunci  $\frac{2}{c} A \in S_{c'}$  și deci  $S_c \neq S_{c'}$ . Dacă  $c > 0$  și  $S_c$  este convexă, atunci  $S_c$  trebuie să conțină operatorul

$$\frac{1}{2} \left( \frac{2}{c} A + \frac{2}{c} A^* \right) = \frac{2}{c} \operatorname{Re} A$$

și cum  $\frac{2}{c} \operatorname{Re} A$  are spectrul  $\{-1/c, 1/c\}$ , deducem că  $1/c \leq 1$  de unde  $c \geq 1$ . Teorema este demonstrată.

Din proprietățile claselor  $S_c$ ,  $c \geq 1$  rezultă următoarea teoremă importantă:

#### TEOREMA 8.1.8. Funcția

$$T \rightarrow \|T\|_c = \inf \{ \lambda, \lambda > 0, T \in \lambda S_c \}$$

este o normă pe  $\mathcal{L}(H)$  pentru fiecare  $c \geq 1$  și această normă este echivalentă cu norma  $\|\cdot\|_2$ , fiecare normă este o normă Schwarz.

TEOREMA 8.1.9. Fie  $c \geq 1$  și norma  $\|\cdot\|_c$ . În acest caz au loc afirmațiile următoare:

1.  $\|T\|_c = \|T^*\|_c$ ,
2.  $\|T\|_c \leq \|T\|_{c'}$  dacă  $c \leq c'$ ,
3. dacă  $c < 2$ ,  $\|I\|_c = 1$  și  $\|\cdot\|_c$  nu este o normă de algebră pe  $\mathcal{L}(H)$ ,
4.  $2\|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_c \leq (c + |2 - c|)\|\cdot\|_2$  și pentru  $1 \leq c \leq 2$  aceste inegalități sînt exacte,
5. dacă  $\|\varphi_\alpha(T)\|_c \leq 1$ ;  $\forall \alpha, |\alpha| < 1$  atunci  $\|T\|_2 \leq 1$ ,
6.  $\|T\|_c \leq 1$ ,  $\|T^{-1}\|_c \leq 1$  rezultă că  $T$  este un operator unitar.

*Demonstrație.* Primele două afirmații sînt consecințe evidente ale teoremei 8.1.7. Dacă  $c \geq 1$ , atunci  $\|I\|_c = \frac{1}{2}(c + |2 - c|)$  și deci  $I \in S_c$  dacă și numai dacă  $1 \leq c \leq 2$ . Afirmația 3 rezultă dintr-o teoremă pe care o vom demonstra mai jos privind minimalitatea normei  $\|\cdot\|_2$  pe  $\mathcal{L}(H)$ . Dacă  $\|T\|_c = 1$  atunci  $\left(1 + \frac{1}{n}\right) T \in S_c$  și deci din teorema 8.1.7 deducem că există un șir de elemente  $\{x_n\}$ ,  $\|x_n\| = 1$ , astfel ca

$$\begin{aligned} & (c-1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \|Tx_n\|^2 + |2-c| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|Tx_n\| \geq \\ & \geq (c-1) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|Tx_n\|^2 + |2-c| \left(1 + \frac{1}{n}\right) |\langle Tx_n, x_n \rangle| > 1, \end{aligned}$$

care ne dă că

$$\|T\|_2 = \|T\| \geq 2(c + |2 - c|).$$

Afirmația 5 rezultă din cazul  $c = 1$  și teorema 8.1.1.

Afirmația 6 rezultă din:

TEOREMA 8.1.10. Dacă  $T \in \mathcal{L}(H)$  și

$$\omega(T) \leq 1, \quad \omega(T^{-1}) \leq 1,$$

atunci  $T$  este unitar (Am notat  $\omega(T) = \|T\|_1 = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}$ ).

*Demonstrație.* Evident că  $\sigma(T) \subset \{z, |z| < 1\}$  și  $\sigma(T^{-1}) \subset \{z, |z| \leq 1\}$ , de unde rezultă că  $\sigma(T) \subseteq \{z, |z| = 1\}$ . Teorema este acum o consecință a teoremei de caracterizare a operatorilor unitari dată de Donoghue (teorema 3.1.12 cap. 3).

J. P. Williams, care a introdus noțiunea de normă Schwarz pe  $\mathcal{L}(H)$  a pus problema dacă nu există și alte norme Schwarz în afară de cele introduse mai sus cu ajutorul claselor  $S_c$ .

În cele ce urmează vom introduce noi clase de norme Schwarz pe  $\mathcal{L}(H)$  și care sînt legate de următoarele noțiuni: 1) algebra Calkin  $\mathcal{C}$  și 2) extensia noțiunii de dilatare unitară dată de H. Langer.

Fie deci  $A = \mathcal{L}(H)/K(H)$  algebra Calkin și să luăm două norme Schwarz, una  $\alpha(\cdot)$  pe algebra  $\mathcal{L}(H)$  și alta  $\beta$  pe algebra  $A$  și să definim o normă pe  $\mathcal{L}(H)$  prin

$$\|T\|_{\alpha, \beta} = \alpha(T) + \beta(\hat{T}),$$

unde  $\hat{T}$  înseamnă imaginea operatorului  $T$  în algebra  $A$ . Este evident că  $\|T\|_{\alpha, \beta}$  este o normă pe  $\mathcal{L}(H)$  echivalentă cu norma inițială. Importanța acestor norme este dată de:

TEOREMA 8.1.11. Pentru orice  $\alpha, \beta$  norma  $\|T\|_{\alpha, \beta}$  este o normă Schwarz.

*Demonstrație.* Fie  $T \in \mathcal{L}(H)$  și  $\|T\|_{\alpha, \beta} < 1$ , iar  $f \in R(D)$ ,  $f(0) = 0$ . Cum  $\alpha, \beta$  sînt norme Schwarz rezultă că

$$\alpha(f(T)) < \alpha(T), \quad \beta(f(\hat{T})) < \beta(\hat{T})$$

deoarece  $\alpha(T) < 1$  și  $\beta(\hat{T}) < 1$ , de unde rezultă că

$$\|f(T)\|_{\alpha, \beta} < \|T\|_{\alpha, \beta}$$

și teorema este demonstrată.

Vom observa, deoarece  $\beta(T) = 0$  dacă și numai dacă  $T$  este compact, că în acest mod obținem norme Schwarz diferite de normele  $S_c$ .

Vom da acum o altă metodă de a construi norme Schwarz sugerate de generalizarea noțiunii de dilatare unitară: fie  $A$  un operator hermitic

pozitiv  $0 \leq mI \leq A \leq MI$  și să notăm cu  $C_A$  mulțimea operatorilor  $T \in \mathcal{L}(H)$  care admit reprezentarea

$$QT^nQ = P, U^n \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

unde  $Q = A^{-1/2}$ ,  $U$  este un operator pe un spațiu Hilbert  $H_1 \supset H$ .

Aceasta sugerează introducerea unei clase mai generală decât clasa  $S_c$  în definiția următoare:

**DEFINIȚIA 8.1.12.** Dacă  $Q$  este un operator hermitic  $0 < mI \leq Q \leq MI$  vom nota cu  $S_Q$  mulțimea operatorilor  $T \in \mathcal{L}(H)$  astfel ca

$$1. \sigma(T) \subset \{z, |z| \leq 1\},$$

$$2. \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_1^\infty Q^{1/2} T^n Q^{1/2} z^n \right) \geq 0$$

oricare ar fi  $\{z, |z| < 1\}$ .

Vom remarca faptul că pentru  $Q = c^{1/2} I$ ,  $c > 0$  vom obține clasa  $S_c$  considerată mai sus.

Vom demonstra că are loc analogul teoremei 8.1.6 pentru această clasă de operatori.

**TEOREMA 8.1.13.** Dacă  $T \in S_Q$  și fie  $f \in R(D)$  cu  $f(0) = 0$  atunci  $f(T) \in S_Q$ .

*Demonstrație.* Dacă  $T \in S_Q$  atunci există  $F_z(t)$  definită pe  $[0, 2\pi]$  și crescătoare astfel ca

$$\|x\|^2 + \sum_1^\infty z^n \langle Q^{1/2} T^n Q^{1/2} x, x \rangle = \int \frac{1+z e^{i\theta}}{1-z e^{i\theta}} dF_z(\theta)$$

dacă  $|z| < 1$ . Demonstrația continuă exact ca la teorema 8.1.6. și de aceea nu o dăm.

Următoarele teoreme dau noi proprietăți ale operatorilor din clasa  $S_Q$ .

**TEOREMA 8.1.14.**  $T \in S_Q$  dacă și numai dacă:

$$1. \sigma(T) \subset \bar{D},$$

$$2. \operatorname{Re} \langle Q^{1/2}(1-zT)^{-1}Q^{1/2}x, x \rangle - \langle Qx, x \rangle + \|x\|^2 \geq 0$$

*Demonstrație.* În adevăr, condiția

$$\operatorname{Re} \left( 1 + \sum_1^\infty Q^{1/2} T^n Q^{1/2} z^n \right) \geq 0$$

mai poate fi scrisă în modul următor:

$$\operatorname{Re} \left\langle \left( 1 + \sum_1^\infty (Q^{1/2} T^n Q^{1/2} z^n) \right) x, x \right\rangle = \operatorname{Re} [\langle Q^{1/2}(1-zT)^{-1}Q^{1/2} - Q + I \rangle x, x],$$

care este afirmația pe care vrem s-o demonstrăm.

TEOREMA 8.1.15.  $T \in S_Q$ ,  $Q \geq I$ , dacă și numai dacă :

1.  $\sigma(T) \subset \bar{D}$ ,
2.  $\operatorname{Re} \langle Q^{1/2}(1 - zT) Q^{1/2}x, x \rangle \geq \|Q^{1/2}x\|^2 - \|x\|^2 = \langle (Q - I)x, x \rangle$ .

*Demonstrație.* Este evident că această relație este transcrierea condiției din definiția,  $T \in S_Q$ , și ținându-se seama că  $Q \geq I$ .

Din aceste teoreme rezultă :

TEOREMA 8.1.16. Dacă  $Q$  este un operator hermitic strict pozitiv atunci :

1.  $S_Q^* = S_Q$ ,
2.  $Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow S_{Q_2} \in S_{Q_1}$ ,
3.  $Q \geq I$ ,  $S_Q$  este convexă.

*Demonstrația* se face aproape la fel ca în cazul claselor  $S_Q$  și de aceea o vom omite.

Exact ca și în cazul clasei  $S_Q$  are loc :

TEOREMA 8.1.17. Dacă  $Q$  este un operator hermitic  $Q \geq I$ , atunci

$$T \rightarrow \|T\|_Q = \inf \{ \lambda, T \in \lambda S_Q \}$$

definește o normă Schwarz pe algebra  $\mathcal{L}(H)$ .

## § 2. EXTENSIA LA SPAȚII BANACH

Vom face acum câteva observații privind posibilitatea de a extinde aceste concepte și rezultate la un cadru mai general.

Mai întâi se pune problema de a extinde la cazul spațiilor Banach. Fie  $X$  un spațiu Banach, iar  $[,]$  un semiprodus scalar, adică o aplicație a spațiului  $X \times X$  în corpul numerelor complexe cu următoarele proprietăți :

1.  $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$ ,
2.  $[\lambda x, \mu y] = \lambda \bar{\mu} [x, y]$ ,
3.  $|[x, y]|^2 \leq \|x\| \|y\|$ ,
4.  $[x, x] = \|x\|^2$

și în acest caz definiția clasei  $S_Q$  poate fi dată în modul următor :  $T \in S_Q$  unde  $Q$  este un operator astfel ca  $Q$  și  $Q^{1/2}$  sint elemente hermitice cu spectrul în  $R_+$ , dacă

$$\operatorname{Re} \left[ \left( I + \sum_1^\infty Q^{1/2} T^n Q^{1/2} z^n \right) x, x \right] \geq 0.$$

Reamintim că elementul  $H \in \mathcal{L}(X)$  se numește hermitic dacă pentru orice număr real  $\alpha$ ,  $\|e^{i\alpha H}\| = 1$ .

Este clar că teorema 8.1.13 (respectiv 8.1.6) are loc pentru această clasă de operatori.

Înainte de a da un răspuns la problema extinderii rezultatelor la spații Banach vom face câteva observații.

Să considerăm  $X$  un spațiu Banach complex cu două dimensiuni și cu norma

$$\|(x_1, x_2)\| = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad p > 1$$

și vom arăta că există operatori pe  $X$  astfel ca  $\operatorname{Re} T \geq 0$  și  $\operatorname{Re} T^{-1} \not\geq 0$ . În adevăr, să considerăm pe  $X$  semiprodusul scalar

$$[x, y] = x_1 |y_1|^{p-2} + x_2 |y_2|^{p-2},$$

unde

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \quad \text{și} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Fie  $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$  și să găsim condițiile în care  $\operatorname{Re} T \geq 0$ . Este ușor de văzut că aceste condiții sînt :

1.  $\operatorname{Re} a \geq 0, \quad \operatorname{Re} b \geq 0,$
2.  $|c| \leq (p \operatorname{Re} a)^{1/p} (q \operatorname{Re} b)^{1/q}$

cu  $1/p + 1/q = 1$ . Dar  $\operatorname{Re} T^{-1} \geq 0$  dacă și numai dacă

$$|c/ab| \geq (p \operatorname{Re} 1/a)^{1/p} (\operatorname{Re} q 1/b)^{1/q}$$

și dacă  $\operatorname{Re} T \geq 0$  atunci  $\operatorname{Re} T^{-1} \geq 0$  dacă și numai dacă

$$|c| \leq |a|^{1-2/p} |b|^{1-2/q} (p \operatorname{Re} a)^{1/p} (q \operatorname{Re} b)^{1/q},$$

de unde deducem că  $\operatorname{Re} T \geq 0 \not\Rightarrow \operatorname{Re} T^{-1} \geq 0$  cum se întîmplă cînd norma este de tip Hilbertian (satisfacă identitatea paralelogramului).

Putem demonstra :

**TEOREMA 8.2.1.** *Fie  $X$  un spațiu Banach cu două dimensiuni și pentru orice  $x = (x_1, x_2)$   $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ , atunci norma indusă pe  $\mathcal{L}(X)$  de această normă nu este normă Schwarz.*

*Demonstrație.* Fie  $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$  un operator pe  $X$  și norma sa este

$$\|T\| = \max \{|a| + |c|, |b|\}.$$

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$  este o contracție pe  $X$ .

Să luăm

$$\varphi_\alpha = z \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1,$$

și să calculăm  $\|\varphi_\alpha(T)\|$ .

Vom avea

$$\|\varphi_\alpha(T)\| = a \left| \frac{\alpha + a}{1 + \bar{\alpha}a} \right| + (1-a) \left| \frac{1 + \alpha + \alpha(1 + \bar{\alpha})}{(1 + \bar{\alpha})(1 + \alpha)} \right|$$

și deci  $\|\varphi_\alpha(T)\| \leq 1$ , pentru  $\alpha$  real, ne dă

$$a|\alpha + a| + (1-a)(1+a) \leq 1 + \alpha a|$$

care nu este adevărată pentru  $\alpha = -\frac{1}{2(a+1)}$ .

Teorema este demonstrată.

Vom mai menționa și următorul rezultat: fie  $X$  spațiul Banach din teorema de mai sus și

$$\eta(x) = \begin{cases} (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} x_2) & \text{dacă } x_1 x_2 \neq 0, \\ (1, \operatorname{sgn} x_2) & \text{dacă } x_1 = 0 \\ (\operatorname{sgn} x_1, 1) & \text{dacă } x_2 = 0, \end{cases}$$

dacă  $\|x\| = 1$  și cu ajutorul funcției  $\eta(x)$  se poate defini un semiprodus scalar pe  $X$  și norma

$$\|T\|_1 = \sup \{ |\langle T x, \eta(x) \rangle|, \|x\| < 1 \},$$

unde  $[x, \eta(x)]$  este semiprodusul scalar definit mai sus. Aceasta este o normă echivalentă cu cea inițială și nu este normă Schwarz.

Vom menționa în încheiere că problema normelor Schwarz pe algebre cu involuții care sînt și  $B^*$ -algebre (sau  $C^*$ -algebre) nu a fost considerată<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> V. I. Istrățescu, Schwarz Norms over  $C^*$ -algebras. (va apare).

# VECTORI ANALITICI ȘI CVASIANALITICI PENTRU UNELE CLASE DE OPERATORI

Este cunoscută importanța funcțiilor analitice. O problemă interesantă a fost și aceea de a găsi un mod de a extinde această noțiune într-un cadru abstract. Una din observațiile care permite să remarcăm un mod posibil de a face această extensie este legată de operatorul  $A = \frac{d}{dx}$ , definit în spațiul funcțiilor continue și mărginite pe  $[0, \infty]$  și clasa de funcții analitice, sau mai general, de clasa funcțiilor cvasianalitice studiate de Denjoy și Carleman.

Fie  $[a, b]$  un interval și  $f$  o funcție indefinit derivabilă (de clasă  $C^\infty$ ); Pringsheim a arătat că orice funcție  $f$  indefinit derivabilă este analitică pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă au loc relațiile

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right| \leq k^n n!,$$

oricare ar fi  $x \in [a, b]$ , iar  $k$  este o constantă (care depinde de funcție).

Fie acum  $I$  un interval și  $\{M_n\}$  un șir de numere pozitive, prin  $C(\{M_n\})$  vom înțelege clasa funcțiilor indefinit derivabile astfel ca

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right| \leq k^n M_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

oricare ar fi  $x \in I$  și  $k$  este o constantă care depinde de  $f$ . Evident, că pentru  $M_n = n!$ , avem clasa funcțiilor analitice. O proprietate fundamentală a funcțiilor analitice este și următoarea: dacă  $f$  și derivatele sale se anulează într-un punct din  $I$ , atunci  $f \equiv 0$ . O problemă pusă de Hadamard în 1912 a fost următoarea: care sînt condițiile pe care trebuie să le satisfacă  $\{M_n\}$ , astfel că dacă  $f \in C(\{M_n\})$  și se anulează împreună cu toate derivatele sale într-un punct din  $I$ , atunci în mod necesar  $f \equiv 0$ ?

Clasa funcțiilor cu proprietatea enunțată în problema lui Hadamard se numește clasă de funcții cvasianalitice.

Rezultate fundamentale privind clasele de funcții cvasianalitice au fost obținute de Denjoy, Carleman, Ostrovski, Bang etc.

Vom menționa că problema cvasianalității a fost generalizată în modul următor: să presupunem că avem clasa  $C(\{M_n\})$  și se pune pro-

blema condițiilor necesare și suficiente pe care trebuie să le satisfacă șirul  $\{M_n\}$  astfel ca următoarea proprietate să aibă loc

$$(\exists) \quad a \in I, |f^{(n)}(a)| = \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=a} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

atunci  $f \equiv 0$ . Evident că problema evasianalității corespunde alegerii  $v_n = n$ , oricare ar fi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Menționăm că problema cerută este interesantă când intervalul este  $[0, \infty)$  sau  $(-\infty, \infty)$ .

Pentru motivarea unor definiții care vor interveni în cazul operatorilor, vom reaminti următorul rezultat, cunoscut sub numele de teorema lui Denjoy-Carleman: dacă  $\beta_n = \inf_{k \geq n} M_k^{1/k}$ , atunci  $\sum \frac{1}{\beta_n} = \infty$  este condiția necesară și suficientă ca  $C(\{M_n\})$  să fie evasianalitică.

## § 1. VECTORI ANALITICI ȘI CVASIANALITICI PENTRU OPERATORI PE SPAȚII HILBERT ȘI SPAȚII BANACH

Die  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach și  $T$  un operator liniar cu domeniul de definiție  $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}_T$ . Un element  $x \in \mathfrak{D}_T$  este analitic pentru operatorul  $T$  dacă există  $t > 0$  astfel ca

$$\sum_0^\infty \frac{\|T^n x\|}{n!} t^n < \infty.$$

Vom remarca faptul că pentru  $T$  mărginit, orice element  $x \in \mathfrak{X}$  este analitic și deci acest caz nu este interesant. În cele ce urmează vom presupune că  $T$  este un operator nemărginit pe  $\mathfrak{X}$ .

Să presupunem că  $x$  este un vector analitic pentru operatorul  $T$ ; în acest caz există  $k > 0$ , o constantă, astfel ca

$$\|T^n x\| \leq k^n n!$$

oricare ar fi întregul  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Deducem de aici că are loc relația

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} \geq \sum_0^\infty \frac{1}{k^n} = \infty,$$

deoarece  $n! < n^n$  oricare ar fi întregul  $n$ .

Un element  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  se va numi evasianalitic dacă

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} = \infty.$$

Din observația de mai sus se deduce că orice vector analitic este de asemenea și vector cvasianalitic.

O clasă mai generală de elemente poate fi introdusă în modul următor: fie  $p$  un întreg și  $x \in \bigcap \mathfrak{D}_{T^n}$ ; se spune că  $x$  este un vector  $p$ -analitic dacă

$$\sum_0^{\infty} \|T^n x\| \frac{t^n}{(pn)!} < \infty$$

pentru un anumit  $t > 0$ .

Această noțiune pentru cazul  $p = 2$  a fost introdusă de B. Simon sub numele de vectori semianalitici.

O clasă de elemente mai generală decât clasa elementelor cvasianalitice poate fi introdusă în modul următor: un element  $x \in \bigcap \mathfrak{D}_{T^n}$  se spune că este  $p$ -cvasianalitic dacă

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{\|T^n x\|^{1/np}} = \infty.$$

Este evident că orice vector  $p$ -analitic este  $p$ -cvasianalitic. Vom observa că noțiunea de  $p$ -cvasianaliticitate pentru cazul  $p = 2$  a fost considerată de asemenea de B. Simon sub numele de vector Stieltjes.

## § 2. ELEMENTE ANALITICE ÎN ALGEBRE BANACH COMUTATIVE

În studiile sale privind funcțiile policalorice, M. Nicolescu a fost condus la o interesantă noțiune de analiticitate. Vom prezenta acum noțiunea de elemente analitice într-o algebră Banach comutativă cu element unitate. Să notăm această algebră cu  $\mathcal{A}$  și elementul unitate cu 1. Fie  $D: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}$  o aplicație liniară surjectivă a unei subalgebre  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ . Vom nota cu  $t$  o soluție a ecuației  $Dx = 1$  și care va fi fixă în cele ce urmează.

Un element  $x$  se va numi analitic în raport cu  $D$  dacă există șirul de elemente  $\{a_n(x)\}$  astfel ca

$$x = \sum_n t^n a_n(x).$$

Este natural să se pună problema definirii elementelor „continue” care să reprezinte analogul funcțiilor continue. Acest lucru se face astfel: un element  $x$  se va numi polinom dacă există un întreg  $n$  astfel ca  $D^n x = 0$  și dacă  $n$  este cel mai mic întreg cu această proprietate, atunci  $n - 1$  se va numi gradul său. Un element  $x$  se va numi continuu dacă există un șir de polinoame care converge către  $x$ .

Pentru orice  $x \in \mathcal{A}_1$  să punem

$$D_1(x) = D(tx) - xD(t) - tD(x)$$

și să numim operatorul  $D$  de tip parabolic, dacă pentru orice  $x D_1(x) \neq 0$ . Dacă operatorul  $D$  este de tip parabolic atunci prin analogie cu funcțiile evasianalitice se pot introduce elemente evasianalitice în raport cu  $D$ : un element  $x$  este evasianalitic dacă

$$\|D^n x\| \leq k^n n! M_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

unde  $\{M_n\}$  satisface condiția că dacă  $\beta_n = \inf_{k \geq n} M_k^{1/k}$ , atunci  $\sum \frac{1}{\beta_n} = \infty$ .

Menționăm că în [358] este schițată o teorie a distribuțiilor în raport cu operatorul  $D$ .

### §3. APLICAȚII LA TEORIA OPERATORILOR AUTOADJUNCTI

Vom reaminti pe scurt noțiunea de operator autoadjunct. Fie  $H$  un spațiu Hilbert. Se spune că operatorul  $T: \mathfrak{D}_T \rightarrow H$  este hermitian dacă au loc relațiile:

$$1. \overline{\mathfrak{D}_T} = H,$$

$$2. \text{oricare ar fi } x, y \in \mathfrak{D}_T, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Dacă  $\mathfrak{D}_T = H$  avem noțiunea obișnuită de operator hermitian. Noțiunea de operator autoadjunct se introduce astfel: un operator  $T: \mathfrak{D}_T \rightarrow H$  se spune că este autoadjunct dacă:

$$1. \overline{\mathfrak{D}_T} = H,$$

$$2. T^* = T,$$

unde  $T^*$  este adjunctul operatorului  $T$ .

Are loc următoarea proprietate: orice operator hermitian este închis. În adevăr, fie  $x_n \rightarrow \tilde{x}$  și  $Tx_n \rightarrow \tilde{y}$ . Cum avem, pentru orice  $x \in \mathfrak{D}_T$

$$\lim \langle Tx, x_n \rangle = \lim \langle x, Tx_n \rangle,$$

adică

$$\langle x, T\tilde{x} \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle$$

și deci  $T\tilde{x} = \tilde{y}$ .

În lucrarea sa [352] E. Nelson a demonstrat o teoremă privind legătura între noțiunea de operator autoadjunct și cea de vector analitic. Această teoremă a fost extinsă de A. E. Nussbaum considerând vectori cuasianalitici. În cazul când se consideră vectori Stieltjes un rezultat asemănător a fost obținut de către Nussbaum și independent de Masson și McClary.

Unele rezultate privind vectorii analitici pentru unele clase de operatori care conțin clasa operatorilor hermitici au fost date în [109].

Cazul unor semigrupuri a fost considerat de Hasegawa și este interesant de menționat că demonstrațiile date apelează direct la rezultate privind funcțiile evasianalitice.

Un operator hermitic se numește semimărginit inferior dacă

$$m(T) = \inf \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

are proprietatea că  $m(T) > -\infty$ .

Are loc :

**TEOREMA 9.3.1.** Fie  $T$  un operator hermitic semimărginit închis definit pe un spațiu Hilbert  $H$ . În acest caz  $T$  este autoadjunct dacă și numai dacă există o mulțime totală de vectori Stieltjes pentru operatorul  $T$ .

*Demonstrație.* Să arătăm că condiția pusă este necesară. Cum  $T$  este presupus autoadjunct, fie  $\{E(\sigma)\}$  măsura spectrală corespunzătoare și pentru orice  $c > 0$  să punem  $E = E((-c, c))$ . Oricare ar fi  $x$  în  $RE$ , rangul operatorului  $E$ , avem

$$\|T^n x\|^2 = \int_{-c}^c \lambda^{2n} d\|E(\lambda)x\|^2 \leq c^{2n} \|x\|^2$$

și deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} = \infty.$$

Cum mulțimea elementelor  $x$ , de forma de mai sus, este densă în  $H$  deoarece  $E \rightarrow I$  (convergența tare), necesitatea este complet demonstrată.

Să arătăm acum că condiția pusă este suficientă. Vom remarca faptul că putem presupune, fără a restringe generalitatea că următoarea proprietate are loc : oricare ar fi  $x \in \mathfrak{D}_T$   $\langle Tx, x \rangle \geq c \|x\|^2$  cu  $c > 0$ .

În adevăr, cum pentru orice  $n$  avem relația

$$\|T^n x\| = \|(-T)^n x\|,$$

putem presupune că  $\langle Tx, x \rangle \geq c \|x\|^2$ . Să arătăm că putem lua  $c > 0$ . În adevăr, trebuie să arătăm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|(T+a)^n x\|^{1/n}} = \infty$$

unde  $a$  este real. În adevăr fie  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$   $\|x\| = 1$  și cum

$$\begin{aligned} \|(T+a)^n x\| &\leq \left\| \sum_{k=0}^n C^k a^{n-k} T^k x \right\| \leq \sum_{k=0}^n C^k |a|^{n-k} \|T^k x\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n C^k |a|^{n-k} \|T^n x\| \leq (\|T^n x\|^{1/n} + |a|)^n \leq \\ &\leq \|T^n x\| (1 + |a| \|T^n x\|)^n \leq \|T^n x\| \left(1 + \frac{|a|}{\|Tx\|}\right)^n, \end{aligned}$$

deoarece şirul  $\{\|T^n x\|^{1/n}\}$  este monoton crescător<sup>1</sup>, deducem că

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} = \infty \Leftrightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{\|(T+a)^n x\|^{1/n}} = \infty.$$

Cum  $a$  este arbitrar avem evident şi implicaţia în sens invers. Să presupunem acum că mulţimea elementelor  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  cu proprietatea că  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} = \infty$  este densă în  $H$ . Să punem pentru  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  că

$$\mu_n(x) = \langle T^n x, x \rangle.$$

Cum pentru şirul  $\{\mu_n(x)\}$  avem relaţia

$$\sum_{i,j} a_i \bar{a}_j \mu_{i+j}(x) \geq 0$$

oricare ar fi sistemul de numere  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , este cunoscut că, în acest caz, există o măsură Radon mărginită şi pozitivă  $\mu_x$  pe semiaxa pozitivă, astfel ca

$$(*) \quad \mu_n(x) = \int_0^{\infty} t^n d\mu_x(t)$$

şi care este unică dacă  $\sum \mu_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ , care în cazul nostru revine la următoarea

$$\mu_n(x) = \langle S^n x, x \rangle \leq \|S^n x\| \|x\|$$

şi din condiţia pusă asupra lui  $x$  obţinem că  $\sum \mu_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ . Deci există măsura Radon  $\mu_x$  unică cu proprietatea din (\*).

Cum  $T$  este semimărginit, există o prelungire autoadjunctă a sa (a se vedea appendix) pe care o notăm cu  $\tilde{T}$  şi fie  $\tilde{E}(\sigma)$  măsura spectrală corespunzătoare.

În acest caz avem

$$\langle T^n x, x \rangle = \langle \tilde{T}^n x, x \rangle = \int_0^{\infty} \lambda^n d\|\tilde{E}(\lambda) x\|^2,$$

oricare ar fi  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  şi  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$ ; de asemenea  $\mu_x(\sigma) = \|E(\sigma) x\|$ .

Să presupunem că  $T \neq \tilde{T}$ . Fie  $\{\tilde{E}_1(\sigma)\}$  măsura spectrală corespunzătoare unei prelungiri diferite de  $\tilde{T}$ .

În acest caz avem că  $\mu_x(\sigma) = \|\tilde{E}_1(\sigma) x\|$  oricare ar fi  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  şi oricare ar fi mulţimea boreliană  $\sigma \subset [0, \infty)$ . Deci  $\|\tilde{E}(\sigma) x\| = \|\tilde{E}_1(\sigma) x\|$ ,

<sup>1</sup> Un rezultat mai general va fi dat în teorema 9.4.3.

de unde deducem că  $\tilde{E}(\sigma)x = \tilde{E}_1(\sigma)x$  și cum pentru  $\sigma \in (-\infty, 0)$ , avem că  $\tilde{E}(\sigma) = \tilde{E}_1(\sigma) = 0$ , rezultă că  $\tilde{T} = \tilde{T}_1$  și această contradicție arată că  $\tilde{T} = \tilde{T}$ . Vom observa că, în demonstrație, a intervenit esențial faptul că mai exista o prelungire autoadjunctă. Pentru alte amănunte privind aceste fapte a se vedea appendixul.

Din această teoremă rezultă și :

**TEOREMA 9.3.2.** *Un operator hermitic, închis  $T$  este autoadjunct dacă și numai dacă mulțimea vectorilor cvasianalitici este densă în  $H$ .*

*Demonstrație.* Cum  $T$  este închis să arătăm că și  $T^2$  este închis. Fie deci  $x_n \in \mathfrak{D}_T$ ,  $x_n \rightarrow x$  și  $Tx_n \rightarrow y$ . În acest caz avem

$$\langle T(x_n - x_n), T(x_n - x_n) \rangle = \langle T^2(x_n - x_n), x_n - x_n \rangle \rightarrow 0$$

și cum  $T$  este închis rezultă că  $Tx_n \rightarrow Tx$ . Dar atunci  $T^2x_n \rightarrow T^2x$  și cum  $T$  este închis, rezultă că  $T^2x = y$ .

Fie  $x \in \mathfrak{D}_{T^2}$  și cum șirul  $\{\|T^n x\|^{1/n}\}$  este monoton, rezultă că dacă  $\|x\| = 1$ , avem

$$\sum \|T^n x\|^{1/n} = \infty \Leftrightarrow \sum \|T^{2n} x\|^{\frac{1}{2n}} = \infty.$$

Cum  $T$  este autoadjunct,  $T^2$  este pozitiv și autoadjunct, are mulțimea vectorilor cvasianalitici densă.

Să presupunem acum că  $T$  are mulțimea vectorilor cvasianalitici densă și cum  $T^2$  este închis, pozitiv definit și hermitian, iar din observația de mai sus rezultă că are o mulțime densă de vectori Stieltjes. Deci, conform teoremei 9.3.1, este autoadjunct. Să arătăm că de aici rezultă că și  $T$  este autoadjunct. În adevăr, avem

$$T^*T \supset T^2$$

și deci sînt autoadjuncți, de unde rezultă că  $T^*T = T^2$ . Similar  $TT^* = T^2$  adică  $T$  este normal și hermitian, deci este autoadjunct.

Teorema este demonstrată.

#### § 4. VECTORI ANALITICI ȘI CVASIANALITICI PENTRU UNELE CLASE DE OPERATORI

Vom considera acum [109] clasă mai largă de operatori pentru care unele proprietăți ale vectorilor analitici sau cvasianalitici pentru operatori hermitici se păstrează.

**DEFINIȚIA 9.4.1.** Un operator  $T$  se numește de clasă (N) dacă :

1.  $\mathfrak{D}_T$  este dens în  $H$ ,
2. oricare ar fi  $x \in \mathfrak{D}_T \cap \mathfrak{D}_{T^2}$  avem

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\| \|x\|.$$

Vom remarca faptul că orice operator hermitic este de clasă (N) și mai general orice operator  $T: \mathfrak{D}_T \rightarrow H$  cu  $\mathfrak{D}_T$  dens și  $T^*T - TT^* \geq 0$  este de clasă (N) după cum se poate verifica ușor.

Are loc :

TEOREMA 9.4.2. Dacă  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  și  $T$  este de clasă (N) șirul  $\{\|T^n x\|^{1/n}\}$  este monoton.

Vom arăta că pentru orice  $n$  are loc relația

$$\|T^n x\|^2 \leq \|T^{n-1} x\| \|T^{n+1} x\|.$$

În adevăr

$$\|T^{n+1} x\| = \left\| T^2 \frac{T^{n-1} x}{\|T^{n-1} x\|} \right\| \|T^{n-1} x\| \geq \|T^n x\|^2 \|T^{n-1} x\|^{-1},$$

care coincide cu relația pe care vrem s-o demonstrăm. Dacă punem  $a_n = \|T^n x\|$ , atunci relația de mai sus se scrie

$$a_n^2 \leq a_{n-1} a_{n+1}.$$

Un rezultat clasic, cunoscut sub numele de teorema lui Mac Laurin afirmă că șirul  $\{a_n^{1/n}\}$  este monoton crescător.

Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă următoarea teoremă privind elementele cvasianalitice, pentru operatori de clasă (N).

TEOREMA 9.4.3. Un vector  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  este vector cvasianalitic pentru operatorul de clasă (N) dacă și numai dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{2^n} x\|^{1/2^n}} = \infty.$$

*Demonstrație.* Evident, condiția este suficientă. Să arătăm că este și necesară. Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{2^n} x\|^{1/2^n}} = \infty$  atunci cum, pentru orice  $k = 2n - 1$  avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{2^n-1} x\|^{1/2^n-1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{2^n} x\|^{1/2^n}}$$

rezultă imediat că  $x$  nu este vector cvasianalitic. Contradicția obținută demonstrează teorema.

Următoarele teoreme dau unele rezultate privind legătura dintre vectorii cvasianalitici pentru perechi de operatori.

TEOREMA 9.4.4. Dacă  $T$  este un operator de clasă (N) și  $x$  un vector cvasianalitic pentru  $T$ , iar  $A, A^*$  doi operatori astfel că unul este adjunct pentru celălalt și următoarele proprietăți sînt adevărate :

1.  $Ax \in \mathfrak{D}_{T^n}$
2.  $TA = AT \quad n = 1, 2, 3, \dots,$
3.  $T^2$  este hermitic.

În acest caz  $Ax$  este vectorul cvasianalitic pentru  $T$ .

*Demonstrație.* Cum  $T$  este de clasă  $(N)$  avem relația

$$\|T^n Ax\|^2 \leq \|T^{2n} Ax\| \|Ax\|$$

și deci

$$\|T^n Ax\|^2 \leq \|Ax\| \langle T^{2n} Ax, T^{2n} Ax \rangle^{1/2} \leq \|Ax\| (\|T^{4n} x\| \|A^* Ax\|)^{1/2},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n Ax\|^{1/n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{4n} x\|^{1/4n}} \frac{1}{\|A^* Ax\|^{1/4n}}$$

și pentru a arăta că  $Ax$  este vector cvasianalitic pentru  $T$  va fi suficient să arătăm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^{4n} x\|^{1/4n}} = \infty.$$

Însă, acest fapt rezulta imediat din teorema 9.4.2; pentru orice  $p$  întreg avem relația

$$\frac{1}{\|T^n x\|^{1/n}} \geq \frac{1}{\|T^{np} x\|^{1/n p}}.$$

Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 9.4.5.** Fie  $T$  un operator de clasă  $(N)$  și  $x$  un vector cvasianalitic sau Stieltjes pentru  $T$ , iar  $p(\lambda)$  un polinom arbitrar. Atunci  $p(T)x$  este un vector cvasianalitic sau Stieltjes pentru  $T$ .

*Demonstrație.* Ideea demonstrației este aceeași ca la demonstrația teoremei 9.4.4.

Evident,  $p(T)x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  și vom presupune, fără a restrânge generalitatea că  $p(T)x \neq 0$ . În acest caz avem

$$\|T^n p(T)x\|^2 = \left\| T^n \frac{p(T)x}{\|p(T)x\|} \right\|^2 \|p(T)x\|^2 \leq \|T^{2n} p(T)x\| \|p(T)x\|$$

și pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că

$$\sum \|T^n x\|^{-\frac{1}{2n}} = \infty,$$

ceea ce este cunoscut. Teorema este demonstrată.

### § 5. RELAȚII ÎNTRE DIFERITE CLASE DE VECTORI

Fie

$$\mathfrak{D}_{p,a} = \{x, x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}, x \text{ este vector } p\text{-analitic}\},$$

$$\mathfrak{D}_{p,sa} = \{x, x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}, x \text{ este vector } p\text{-semianalitic}\},$$

$$\mathfrak{D}_{p,qa} = \{x, x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}, \sum \frac{1}{\|T^n x\|^{1/pn}} = \infty\}.$$

Are loc :

TEOREMA 9.5.1. *Avem următoarele incluziuni :*

$$\mathfrak{D}_{p,a} \subset \mathfrak{D}_{p,sa},$$

$$\mathfrak{D}_{p,a} \subset \mathfrak{D}_{p,qa},$$

$$\mathfrak{D}_{p,sa} \subset \mathfrak{D}_{p,qa},$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat din definiție.

TEOREMA 9.5.2. *Dacă  $p < q$ , atunci*

$$\mathfrak{D}_{p,a} \subset \mathfrak{D}_{q,a}.$$

*Demonstrație.* Clar din definiție.

TEOREMA 9.5.3. *Dacă  $p < r$ , atunci*

$$\mathfrak{D}_{p,qa} \subset \mathfrak{D}_{r,qa}.$$

*Demonstrație.* Vom observa mai întâi că are loc următoarea teoremă simplă : dacă  $\sum |a_n|$  este o serie divergentă atunci pentru orice  $\alpha \in (0,1)$  seria  $\sum |a_n|^\alpha$  este divergentă.

Din această teoremă care are o demonstrație simplă, și din acest motiv o vom omite, rezultă aproape imediat teorema 9.5.3. În adevăr

$$\sum \frac{1}{\|T^n x\|^{1/nr}} = \sum \left( \frac{1}{\|T^n x\|^{1/np}} \right)^{p/r}$$

cu  $p/r \in (0,1)$ . Teorema este demonstrată.

### § 6. OPERATORI AUTOADJUNCȚI ȘI VECTORI P-SEMIANALITICI ȘI VECTORI P-CVASIANALITICI

Am văzut mai înainte că orice operator hermitic care are o mulțime densă de vectori Stieltjes (2-cvasianalitici) este autoadjunct.

Următoarea teoremă reprezintă o extensie a acestui rezultat la cazul vectorilor  $p$ -cvasianalitici introduși de noi mai sus. De asemenea, așa cum a observat și B. Simon în cazul vectorilor 2-cvasianalitici, există o legătură cu operatorul diferențial  $\left(\frac{d^p}{dx^p} - 1\right)$  pe spațiul  $L^2[0, 2\pi]$ .

**TEOREMA 9.6.1.** *Un operator hermitic închis este autoadjunct dacă și numai dacă mulțimea vectorilor săi  $p$ -cvasianalitici este densă.*

*Demonstrație.* Să presupunem că  $S$  este autoadjunct și fie  $\{E(\sigma)\}$  măsura sa spectrală, iar pentru orice  $c > 0$  să punem  $E_c = E(-c, c)$  și  $x \in RE_c$ , avem

$$\|T^n x\|^p = \left(\int_{-c}^c \lambda^{2n} d\|E(\lambda)x\|\right)^p \leq C^{2np} \|x\|^p$$

și deci

$$\sum \frac{1}{\|T^n x\|^{1/np}} \geq \sum \frac{1}{c^{2p} \|x\|^{1/2}} = \infty.$$

Necesitatea este demonstrată deoarece  $E$  converge tare către  $I$ .

Să arătăm că este și suficientă. Vom avea nevoie de câteva fapte privind problema momentelor. Dacă  $T$  este un operator hermitic și  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$ , atunci șirul de numere  $\mu_n(x)$ , unde  $\mu_n(x) = \langle T^n x, x \rangle$  este de tip pozitiv așa după cum a fost arătat în §3, ori, în acest caz există măsura  $\mu_x$  astfel că

$$\mu_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\mu_x(\lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se spune că elementul  $x$  este vector de unicitate pentru  $T$  dacă măsura  $\mu_x$  de mai sus este unică. Următoarea teoremă arată legătura dintre proprietatea de a fi autoadjunct și mulțimea vectorilor de unicitate.

**TEOREMA 9.6.2.** *Un operator hermitic  $T$  este autoadjunct dacă și numai dacă mulțimea vectorilor de unicitate  $\mathfrak{D}_0$  este densă (ca spațiu liniar) în spațiul Hilbert  $H$ .*

*Demonstrație.* Cum orice vector analitic este vector de unicitate condiția pusă este necesară. Să arătăm că este și suficientă.

Pentru demonstrație vom folosi o teoremă celebră datorită lui Naimark și care se enunță astfel: operatorul  $T$  admite o extensie  $\tilde{T}: H_1 \rightarrow H_1$  astfel ca  $\tilde{T}$  să fie autoadjunct și  $H_1 \supset H$  cu  $\tilde{T}x = Tx$  oricare ar fi  $x \in \mathfrak{D}_T$ . Această extensie este minimală în sensul că dacă  $\{\tilde{E}(\sigma)\}$  este măsura spectrală pentru  $T$  mulțimea  $\{\tilde{E}(\sigma)x\}$  este densă în  $H_1$ .

Fie acum  $x \in \cap \mathfrak{D}_{T^n}$  și deci

$$\langle T^n x, x \rangle = \langle \tilde{T}^n x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\|\tilde{E}(\lambda)x\|^2.$$

Dacă  $x \in \mathfrak{D}_0$ , polinoamele sînt dense în spațiul  $L_2(R, \mu_x)$  cu  $\mu_x(T) = \|E(\sigma)x\|$  și fie pentru orice mulțime boreliană  $\sigma \subset R$ ,  $\chi_\sigma$  funcția sa caracteristică, iar  $\{p_n\}$  un șir de polinoame care converge către  $\lambda^k \chi_\sigma(\lambda)$  în  $L_2$ . În acest caz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_n(\lambda) - \lambda^k \chi_\sigma(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \|p_n(T)x - E(\sigma)T^k x\|^2$$

și deci  $p_n(T)x \rightarrow E(\sigma)T^k x$ , convergența fiind în  $H_1$ . Cum însă  $p_n(T)x \in H$  rezultă că și  $E(\sigma)T^k x \in H$ . De aici rezultă că pentru orice mulțime boreliană  $\sigma$ ,  $E(\sigma)\mathfrak{D}_0 \subset H$ . Însă  $\mathfrak{D}_0$  este dens în  $H$  și deci  $H_1 = H$ , de unde rezultă că  $\tilde{T}$  este extensia autoadjunctă a lui  $T$  în  $H$ . Să arătăm că avem  $\tilde{T} = T$ . Presupunem că nu este așa și fie  $T_1$  o altă extensie autoadjunctă a lui  $T$  care este diferită de  $\tilde{T}$ , iar  $\{\tilde{E}_1(\sigma)\}$  măsura sa spectrală asociată. Fie  $x \in \mathfrak{D}_0$  și atunci avem  $\mu_x(\sigma) = \|\tilde{E}_1(\sigma)x\|^2$ . Să arătăm că pentru orice  $k$

$$\tilde{E}_1(\sigma)T^k x = E(\sigma)T^k x,$$

fapt care se obține astfel: fie  $p_n(\lambda)$  un șir de polinoame care converge către  $\lambda^k \chi_\sigma(\lambda)$  în  $L_2$ , avem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |p_n(\lambda) - \lambda^k \chi_\sigma(\lambda)|^2 d\|\tilde{E}_1(\lambda)x\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |p_n(\lambda) - \lambda^k \chi_\sigma(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \\ &= \|p_n(T_1)x - E_1(\sigma)\tilde{T}_1^k x\|^2 = \|p_n(\tilde{T})x - E_1(\sigma)\tilde{T}^k x\|^2 = \|p_n(\tilde{T})x - \\ &\quad - E_1(\sigma)T^k x\|^2 = \|p_n(T) - E(\sigma)T^k x\|^2 \end{aligned}$$

și de aici rezultă relația cerută. Cum  $\mathfrak{D}_0$  este dens în  $H$  rezultă că relația are loc pentru orice  $x \in H$  cu  $E(\sigma) = E_1(\sigma)$  și deci  $T = \tilde{T}$ . Teorema este astfel demonstrată.

**TEOREMA 9.6.3.** Dacă  $\{\mu_n\}_0^\infty$  este un șir de numere cu proprietățile următoare:

1.  $\sum \mu_n^{-\frac{1}{np}} = \infty$ ,
2. există măsurile  $\mu_1, \mu_2$  pe  $(-M, \infty)$ ,  $M > 0$  astfel ca

$$\int_{-M}^{\infty} \lambda^n d\mu_1(\lambda) = \int_{-M}^{\infty} \lambda^n d\mu_2(\lambda) \quad n=0,1,2,3,\dots$$

atunci  $\mu_1 = \mu_2$ .

Pentru a demonstra această teoremă avem nevoie de o teoremă a lui Carleman: dacă  $g$  este analitică într-un domeniu  $\{z, \arg z \leq \frac{\pi}{2}, |z| \geq r_0\}$  și  $|g(z)| \leq a_n |z|^{-np}$  cu  $\sum |a_n|^{-n} = \infty$ , atunci în mod necesar  $g \equiv 0$ . De fapt avem nevoie numai de următorul corolar: fie  $g(z)$  analitică în  $\{z, \operatorname{Im} z \geq 0, |g(z)| \leq |a_n| |z|^{-np}, 0,1,2,\dots\}$ , atunci  $g \equiv 0$ .

Pentru a demonstra teorema 9.6.3. să punem

$$f_i(z) = z^p \int_{-M}^{\infty} d\mu_i(\lambda) \frac{1}{z^p - \lambda}; \quad i = 1, 2$$

care sînt funcții analitice în afară de  $\{z, z^p \in (-M, \infty)\}$  și pentru a arăta că  $\mu_1 = \mu_2$  va fi suficient să arătăm că  $f_1 \equiv f_2$ .

Să punem

$$g_i^N(z) = f_i(z) - \sum_0^{N-1} a_n z^{-pn} = z^{-pN+p} \int_{-M}^{\infty} \frac{d\mu_i(\lambda)}{z^p - \lambda}$$

și dacă  $|\lambda - z^p| > M$  obținem

$$\begin{aligned} |g_i(z)| &\leq |z|^{-pN+p} \int_{-M}^{\infty} \frac{|\lambda|^N}{|\lambda - z^p|^p} d\mu_i(\lambda) \leq \\ &\leq \frac{1}{M} |z|^{-pN+p} \left( \int_{-M}^{\infty} |\lambda|^N d\mu_i + 2 \int_{-M}^0 N^N d\mu_i \right) \leq \frac{1}{2} |z|^{-pN+p} b_n = \\ &= \frac{1}{2} |z|^{-pN+p} (a_N + 2M^N a_0 + M^{-2}). \end{aligned}$$

Dacă avem  $|a_n| \leq 2M^n a_0$  pentru o infinitate de  $n$  și în acest caz deducem că

$$|b_n|^{-\frac{1}{np}} \geq (M/4a_0)^{1/np} M^{-\frac{1}{p}}$$

pentru o infinitate de întregi, deci  $\sum b_n^{-\frac{1}{np}} = \infty$ .

Dacă avem  $|a_n| \geq 2M^n a_0$  pentru  $n \geq N$ , deducem că

$$|b_n|^{-\frac{1}{np}} > (1/2 M)^{-\frac{1}{np}} |a_n|^{-\frac{1}{np}},$$

care ne dă că  $\sum b_n^{-\frac{1}{np}} = \infty$ .

Deducem relația

$$|z|^{-p} |f_1(z) - f_2(z)| \leq |z|^{-pn} |b_n|$$

care ne dă că  $z^p f_1(z) \equiv z^p f_2(z)$  și deci  $f_1 \equiv f_2$ .

*Demonstrația* teoremei 9.6.1. se face astfel: dacă  $x$  este un vector  $p$ -cvasianalitic, atunci este vector de unicitate. Cum mulțimea acestor vectori este densă, rezultă că  $T$  este autoadjunct.

Vom remarca faptul că noțiunea de vector  $p$ -cvasianalitic este legată de proprietățile operatorului diferențial  $\frac{d^p}{dx^p} - 1$  în spațiul  $L^2[0, 2\pi]$ .

*Observație.* Calculele făcute mai sus cu  $a_n$  și  $b_n$  sînt un caz particular al unei observații cu caracter mai general: dacă  $\{M_n\}$  este un șir de numere nenegative, iar pentru un întreg  $p$  avem  $\sum M_n^{-np} = \infty$  și  $0 \leq K_n \leq a M_n + b^n$  cu  $a, b > 0$ , atunci  $\sum K_n^{-\frac{1}{np}} = \infty$ .

Demonstrația se face astfel: putem presupune că  $a = 1$  și fie  $E = \{n, M_n < b^n\}$ . Dacă  $E$  este finită atunci pentru  $n$  suficient de mare avem că  $M_n > b^n$  și deci  $K_n \leq 2M_n$  care ne dă  $\sum K_n^{-\frac{1}{np}} = \infty$ . Dacă  $E$  nu este finită atunci avem  $K_n \leq 2b^n$  pentru o infinitate de întregi. Deci  $\sum K_n^{-\frac{1}{np}} \geq \sum (bn)^{-\frac{1}{np}} = \infty$  și afirmația este demonstrată.

## § 7. CLASE DE VECTORI PENTRU OPERATORI DISIPATIVI ȘI SEMIGRUPURI

Vom reaminti pe scurt noțiunea de semiprodus scalar. Fie  $\mathfrak{X}$  un spațiu Banach complex și  $[,]$  o aplicație a spațiului  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}$  în corpul numerelor complexe avînd următoarele proprietăți:

$$[x_1 + x_2, z] = [x_1, z] + [x_2, z],$$

$$[\lambda x, y] = \lambda [x, y],$$

$$[x, x] = \|x\|^2,$$

$$|[x, y]|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Este ușor de văzut că pe orice spațiu Banach există un semiprodus scalar care se poate construi, de exemplu astfel: pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$  există o funcțională liniară de normă  $\|x\|$  cu proprietatea  $f(x) = \|x\|^2$ .

Punem

$$[x, y] = f_y(x)$$

și este evident că sînt satisfăcute proprietățile de mai sus.

Un operator  $T$  se dispune disipativ dacă pentru orice  $x \in \mathfrak{D}_T$  avem

$$\operatorname{Re}[Tx, x] \leq 0.$$

Vom reaminti acum noțiunea de semigrup de clasă ( $C_0$ ): un semigrup se spune de clasă ( $C_0$ ) dacă pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$ .

Este cunoscut că dacă  $A$  este generatorul infinitezimal, atunci există  $M$  și  $\omega$  astfel ca  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ,  $t \geq 0$ .

Următoarea teoremă arată legătura între semigrupuri de clasă  $(C_0)$  și vectorii pentru generatorul infinitesimal.

**TEOREMA 9.7.1.** *Dacă  $A$  este un operator închis pe un spațiu Banach  $\mathfrak{X}$ , care are o extensie  $\tilde{A}$  generînd un semigrup de clasă  $(C_0)$  și  $A$  posedă o mulțime densă de vectori cvasianalitici, atunci  $A = \tilde{A}$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $\lambda > \omega$  operatorul  $\lambda - \tilde{A}$  este surjectiv și există  $k$  astfel ca  $\|(\lambda - \tilde{A})x\| \geq k\|x\|$  deoarece este extensia operatorului  $\lambda - A$ , va avea rangul închis, deoarece  $A$  este un operator închis.

De aici rezultă că  $\lambda - A = \lambda - \tilde{A}$ , dacă vom arăta că  $\lambda - \tilde{A}$  are rangul dens.

Fie  $\varphi \in \mathfrak{X}$  care anulează rangul operatorului  $\lambda - A$  și deci pentru orice  $x \in \mathfrak{X}$  avem

$$\langle Ax, \varphi \rangle = \lambda \langle x, \varphi \rangle$$

și să presupunem că  $x$  este vector cvasianalitic. Rezultă astfel că funcția  $f_x(t) = \langle T_t x, \varphi \rangle$  este de clasă  $C^\infty$  pe  $R_+$  și cum  $f_x(t) = \langle T_t A^n x, \varphi \rangle$  deducem că

$$f^{(n)}(0+) = \langle A^n x, \varphi \rangle = \lambda^n \langle x, \varphi \rangle.$$

Să definim funcția

$$g(t) = \begin{cases} f_x(t) - e^{\lambda t} \langle x, \varphi \rangle & t \leq 0, \\ 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

Vom avea

$$g^{(n)}(t) = \langle T(t) A^{(n)} x, \varphi \rangle - \lambda^n e^{\lambda t} \langle x, \varphi \rangle$$

și cum  $\{T_{(t)}\}$  este mărginit pe orice interval compact din  $R_+$  rezultă că

$$K_n = \sup_{0 \leq t \leq T} |g^{(n)}(t)| \leq C (\|A^n x\| + \lambda^n),$$

unde  $C$  este independent de  $n$ . Din observația de la punctul precedent deducem că  $\sum K_n \frac{1}{n} = \infty$  și deci  $g$  este cvasianalitică pe orice interval compact. Cum se anulează pe  $R_+$  rezultă că  $g = 0$ . Deci

$$\langle T(t)x, \varphi \rangle = e^{\lambda t} \langle x, \varphi \rangle,$$

oricare ar fi  $x$  cvasianalitic și cum mulțimea vectorilor cvasianalitici este densă, rezultă că relația are loc oricare ar fi  $x \in \mathfrak{X}$ .

Avem în acest caz

$$T^*(t) = e^{\lambda t},$$

dacă  $\varphi$  este diferită de zero, deducem că  $\|T^*(t)\| = \|T_t\| < e^{\lambda t}$ , care reprezintă o contradicție dacă  $\lambda > \omega$ . Teorema este astfel demonstrată.

Se poate arăta că are loc o teoremă privind operatori care comută. Vom avea nevoie de următoarea :

**DEFINIȚIA 9.7.2.** Un element  $x \in \mathfrak{X}$  se spune că este element cvasianalitic pentru familia  $T_1, T_2, \dots, T_n$  de operatori care comută

$$1. x \in \bigcap_{n_i} \mathfrak{D} T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_n^{n_n},$$

2. există constantele  $L_k$  astfel ca

$$\|T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n} x\| \leq C^{k+1} L_k^{\alpha_1} + \dots + \alpha_n = k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

și

$$\int_0^\infty \log \left( \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{t}{L_k} \right)^k \frac{dt}{1+t^2} \right) = \infty$$

$$\left( \text{sau echivalent } \sum \frac{1}{L_k} = \infty \right),$$

Clasa vectorilor analitici corespunde cazului cînd  $L_k = k$  și  $L_0 = 1$ . Se poate demonstra că are loc :

**TEOREMA 9.7.3.** Fie  $A$  și  $B$  doi operatori disipativi și închiși care comută. Dacă mulțimea  $\{A^l B^k x, x \text{ este cvasianalitic pentru } A \text{ și } B\}$  este densă în  $\mathfrak{X}$ , atunci  $A$  și  $B$  generează semigrupuri de contracții.

## § 8. ELEMENTE ANALITICE ȘI CVASIANALITICE ÎN ALGEBRE BANACH COMUTATIVE

O extensie naturală a noțiunii de funcție analitică și de funcție cvasianalitică diferită într-un anumit sens de cea propusă de prof. M. Nicolescu se poate face astfel : fie  $\mathfrak{A}_0$  algebră Banach cu element unitate 1 și presupusă comutativă, iar  $\mathfrak{A}_1$  o subalgebră densă în  $\mathfrak{A}_0$  astfel ca  $1 \in \mathfrak{A}_1$ . Să presupunem că avem o derivare pe  $\mathfrak{A}_1$  adică o operație  $d : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_0$  astfel că

$$d(xy) = x dy + y dx.$$

Prin  $\Delta^k$  vom nota domeniul lui  $d$  adică mulțimea elementelor  $x \in \mathfrak{A}_1$  pentru care există  $dx, d^1 x, \dots, d^k x$  ( $d^k x = d(d^{k-1} x)$ ). Un element  $x \in \mathfrak{A}_1$  se va numi de clasă  $C^\infty$  dacă  $x \in \bigcap \Delta^k$ . Este ușor de văzut că  $\Delta^k$  este o algebră Banach cu norma

$$\|x\|_k = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \|d^i x\|.$$

Este evident acum modul cum se pot introduce elementele analitice, cvasianalitice și mai general cele  $p$ -analitice și  $p$ -cvasianalitice. De asemenea se pot considera elemente întregi, analogul funcțiilor întregi, elemente întregi de ordin finit ș.a.m.d.

## § 9. ELEMENTE ANALITICE CVASIANALITICE ÎN SPAȚII GELFAND-KOSTIUCENKO

Vom reaminti mai întâi noțiunea de spațiu Gelfand-Kostiucenko. Să presupunem că avem un spațiu liniar  $\Phi$  în care există familia numerabilă de produse scalare  $\langle, \rangle_n$  și, astfel ca, pentru  $m$  există  $n$  cu proprietatea că în spațiile care se obțin prin completare față de produsele scalare  $\langle, \rangle_n, \langle, \rangle_m$ , respectiv aplicația de scufundare  $T_m^n: \Phi_n \rightarrow \Phi_m$  are forma

$$T_m^n \varphi = \sum \lambda_i \langle \varphi, \varphi_i \rangle \psi_i,$$

cu  $\varphi_i \in \Phi_n, \psi_i \in \Phi_m$ , două sisteme ortonormale, iar  $\lambda_i \geq 0$  cu  $\sum \lambda_i < \infty$ . Se mai spune că  $\Phi$  este un spațiu nuclear.

Să presupunem acum că mai există un produs scalar  $\langle, \rangle$  cu proprietatea de a fi continuu pe  $\Phi$ , ceea ce înseamnă că există o constantă  $M$  și un întreg  $n_0$  astfel ca

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \langle \varphi, \varphi \rangle_{n_0}^{1/2} \langle \psi, \psi \rangle_{n_0}^{1/2}.$$

Fie  $H$  completatul spațiului  $\Phi$  în raport cu distanța indusă de produsul scalar  $\langle, \rangle$  și fie  $T: \Phi \rightarrow H$  și vom identifica  $\Phi$  cu mulțimea  $T\Phi$  ( $T$  este operatorul de scufundare). Fie  $\Phi'$  spațiul conjugat al spațiului  $\Phi$  și  $H'$  spațiul conjugat al spațiului  $H$ .

Operatorul  $T$  are un conjugat  $T'$ , astfel ca

$$(T' h')(\varphi) = h'(T \varphi)$$

oricare ar fi  $h' \in H'$  și  $\varphi \in \Phi$ . Cum însă orice  $h' \in H'$  se scrie sub forma

$$h'(h) = \langle h, h_1 \rangle$$

cu  $h_1 \in H$ , atunci  $T'$  îl putem considera ca operator de la spațiul  $H$  la  $\Phi'$ . Se verifică ușor că este antiliniar.

**DEFINIȚIA 9.9.1.** Prin spațiu Gelfand-Kostiucenko vom înțelege tripletul  $(\Phi, H, \Phi')$  construit mai sus.

**DEFINIȚIA 9.9.2.** Operatorul  $A: \Phi \rightarrow \Phi$  se spune că este unitar dacă

$$\langle A \varphi, A \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$$

unde  $\langle, \rangle$  este produsul scalar atașat tripletului  $\{\Phi, H, \Phi'\}$ .

**DEFINIȚIA 9.9.3.** Operatorul  $A: \Phi \rightarrow \Phi$  se numește hermitic dacă închiderea sa în raport cu produsul scalar  $\langle, \rangle$  este un operator hermitic.

**DEFINIȚIA 9.9.4.** Operatorul  $A: \Phi \rightarrow \Phi$  se numește autoadjunct dacă închiderea sa este un operator autoadjunct (față de produsul scalar  $\langle, \rangle$ ).

Apare astfel problema extinderii rezultatelor de la cazul spațiilor Hilbert la spațiul Gelfand-Kostiucenko. Aici, poate ar fi interesant de studiat cazul vectorilor proprii generalizați, care sînt analitici, evasianalitici etc.

## § 10. VECTORI ANALITICI ȘI CVASIANALITICI PENTRU OPERATORI SIMETRIZABILI

Este cunoscut că o clasă importantă de operatori este aceea a operatorilor simetrizabili. Menționăm că această clasă are aplicații importante în teoria ecuațiilor integrale. Putem introduce, în mod natural, clasa corespunzătoare operatorilor autoadjuncți. Apare astfel problema extinderii rezultatelor de la operatorii hermitici la această clasă nouă de operatori.

## § 11. PRELUNGIREA FRIEDERICHS

Existența unei prelungiri autoadjuncte pentru operatori hermitici semimărginiți inferior a fost conjecturată de către von Neumann, care a demonstrat o afirmație mai slabă a teoremei demonstrată independent de către M. H. Stone și K. Friedrichs: orice operator hermitic semimărginit inferior cu marginea inferioară  $m$  admite o prelungire autoadjunctă semimărginită cu aceeași margine inferioară.

În cele ce urmează vom da demonstrația lui Friedrichs care se mai numește și prelungirea prin închidere. Vom presupune, fără a restringe generalitatea că  $T$  este un operator hermitic cu proprietatea că  $\langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2$ , oricare ar fi  $x \in \mathfrak{D}_T$ . Pe spațiul  $\mathfrak{D}_T$  să definim un produs scalar cu proprietatea

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle Tx, y \rangle$$

oricare ar fi  $x, y \in \mathfrak{D}_T$ . Evident că

$$[x] = \langle\langle x, x \rangle\rangle^{1/2}$$

este o normă și  $[x] \geq \|x\|$  oricare ar fi  $x \in \mathfrak{D}_T$ . În general,  $\mathfrak{D}_T$  nu este un spațiu Hilbert; completatul este un spațiu Hilbert pe care-l vom nota cu  $H_0$ . Vom mai remarcă și faptul, important pentru cele ce urmează, că  $\mathfrak{D}_T$  poate fi identificat cu un subspațiu particular al lui  $H_0$  și de asemenea că elementele spațiului  $H_0$  pot fi identificate cu un subspațiu al spațiului  $H$ . Într-adevăr, cum avem relația  $[x] \geq \|x\|$ ,  $x \in \mathfrak{D}_T$  rezultă că un șir care este Cauchy în metrica indusă de,  $[,]$  este un șir Cauchy în spațiul  $H$  și deci oricărui element  $h_0 \in H_0$  îi corespunde un element  $h$  din  $H$ ; pentru orice  $h_0 \in \mathfrak{D}_T$ ,  $h = h_0$ .

Să arătăm că  $H_0$  poate fi identificat cu un subspațiu al lui  $H$ . Pentru aceasta este suficient să arătăm că  $g = 0$  implică  $g_0 = 0$ . În adevăr relația

$$\langle\langle f, g_0 \rangle\rangle = \langle Tf, g \rangle$$

care ne dă că  $g = 0$  implică  $\langle f, g_0 \rangle = 0$  oricare ar fi  $f \in \mathfrak{D}_T$ ,  $\mathfrak{D}_T$  fiind dens ne dă că  $g_0 = 0$ , afirmația făcută este demonstrată.

Vom mai observa că relația  $[x]' \geq \|x\|$  se prelungește prin continuitate la toate elementele din  $H_0$  (această relație fiind valabilă numai pentru elemente din  $\mathfrak{D}_T$ . Fie acum un element  $h \in H$  fix și să punem

$$L(f) = \langle f, h \rangle$$

și dacă  $f \in H_0$ , avem că

$$|L(f)| \leq \|f\| \|h\| \leq [f] \|h\|,$$

de unde deducem că  $L(f)$  este mărginită pe spațiul Hilbert  $H_0$ , iar norma sa nu depășește pe  $\|h\|$ . Conform teoremei lui Riesz de reprezentare, rezultă că există  $g \in H_0$  astfel ca

$$L(f) = \langle\langle f, g \rangle\rangle$$

și cu proprietatea că  $[g] = \|L_h\| \leq \|h\|$ .  
Vom defini aplicația

$$B : H \rightarrow H_0$$

prin  $Bh = g$ . Evident  $B$  este liniară și  $\|B\| \leq 1$ . Cum, prin definiție

$$\langle f, h \rangle = \langle\langle f, Bh \rangle\rangle$$

să luăm în această relație  $f = Bh'$ , unde  $h'$  este arbitrar în  $H$ .  
Vom avea

$$\langle Bh', h \rangle = \langle\langle Bh', Bh \rangle\rangle = \langle\langle \overline{Bh}, Bh' \rangle\rangle = \langle \overline{Bh}, h' \rangle = \langle h', Bh \rangle.$$

Cum

$$\langle Bh, h \rangle = \langle\langle Bh, Bh \rangle\rangle = \langle Bh, Bh \rangle \geq 0,$$

rezultă că  $B$  este un operator hermitic pozitiv și mărginit (deoarece este definit pe tot spațiul). Rezultă că  $B$  este autoadjunct și să punem  $A = B^{-1}$ . Din ultima relație deducem că dacă  $g = Bh$ , avem

$$\langle g, Ag \rangle \geq \langle g, g \rangle$$

care arată că marginea inferioară pentru  $A$  este 1. Avem și relația

$$\langle f, Ag \rangle = \langle\langle f, g \rangle\rangle$$

oricare ar fi  $f \in H_0$  și  $g \in \mathfrak{D}_T$ . Să arătăm că  $\mathfrak{D}_A$  este dens în  $H_0$ . În adevăr, dacă nu ar fi așa ar rezulta că există  $f_0 \neq 0$  astfel ca

$$\langle\langle f_0, g \rangle\rangle = \langle f_0, Ag \rangle = 0$$

oricare ar fi  $g \in \mathfrak{D}_A$  și cum rangul lui  $A$  este  $H$ , rezultă că  $f_0 = 0$ . Să arătăm acum că  $A$  este o prelungere autoadjunctă a operatorului hermitic  $T$ .

Fie pentru aceasta  $x, y$  elemente arbitrare din  $\mathfrak{D}_T$  și din

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, BTy \rangle$$

sau

$$\langle x, Ty \rangle = [x, y].$$

cum  $\mathfrak{D}_T$  este dens în  $H_0$  cu metrica  $[,]$ , rezultă că

$$[x, BTy] = [x, y].$$

este posibilă dacă și numai dacă  $BTy = y$ . Deci  $y \in \mathfrak{D}_A$  și  $Ay = Ty$ , de unde rezultă că  $A$  prelungește pe  $T$ , iar teorema de prelungere este demonstrată.

*Observație.* Teoria prelungerilor autoadjuncte este dată în detaliu în articolul lui M. G. Krein [30] tradus și în limba română în culegerea de articole „Analiza funcțională și ecuații diferențiale” Editura Tehnică, 1959.

## TEOREME DE MAXIMUM PENTRU FUNCȚII OLOMORFE VECTORIALE

### § 1. FUNCȚII SUBARMONICE

În cele ce urmează vom expune câteva noțiuni și rezultate legate de funcțiile subarmonice, necesare pentru stabilirea rezultatelor privind teoreme de maxim pentru funcții vectoriale.

O expunere completă a teoriei funcțiilor subarmonice este dată, de exemplu, în T. Radô [400].

Fie  $D$  un domeniu în planul complex și  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție pe care o vom scrie  $u(x, y) = u(z)$ , unde  $z = x + iy$ . Se spune că funcția  $u$  este subarmonică în  $D$  dacă următoarele afirmații sînt adevărate:

1.  $-\infty < u(z) < \infty \quad \forall z \in D$ ,
2.  $u$  este superior semicontinuă<sup>1</sup> în  $D$ ,
3. pentru orice  $a \in D$  există  $r > 0$  astfel ca

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

O funcție  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care  $-u$  este subarmonică, se spune că este superarmonică.

Are loc următoarea:

**TEOREMA 10.1.1.** *Dacă  $\{u_n\}$  este un șir monoton descrescător de funcții subarmonice atunci  $u(z) = \lim u_n(z)$  există și este subarmonică.*

*Demonstrație.* În adevăr, dacă  $f$  este o funcție inferior semicontinuă și  $K$  un compact atunci cum

$$M = \sup_{x \in K} f(x)$$

<sup>1</sup> O funcție  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  se spune superior semicontinuă în punctul  $x_0 \in D$  dacă  $\limsup_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0)$ ;  $f$  se spune superior semicontinuă în  $D$  dacă este semicontinuă în

fiecare punct din  $D$ . Se poate arăta că  $f$  este superior semicontinuă în  $D$  dacă și numai dacă pentru orice număr real  $r$   $\{x, x \in D, f(x) < r\}$  este o mulțime deschisă.

există  $\{x_n\} \subset K$  astfel ca  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  și deci putem extrage un subșir convergent,  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , vom avea

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x) \geq \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M \geq f(x_0).$$

Să luăm un cerc  $S(a, r) \subset D$  și din  $u_n(z) \geq u_{n+1}(z)$  deducem că  $\lim u_n(z)$  există. Cum avem

$$\begin{aligned} u(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(a + re^{i\theta}) d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

teorema este demonstrată. (În relațiile de mai sus am aplicat teorema lui B. Levi pentru a obține proprietatea 3) a funcțiilor subarmonice).

**TEOREMA 10.1.2.** *Funcția subarmonică  $u$  în domeniul  $D$  (o presupunem neconstantă) nu își poate atinge maximul în interiorul domeniului  $D$ .*

*Demonstrație.* Fie  $z_0$  un punct din interiorul lui  $D$  astfel ca

$$f(z_0) = \sup_{z \in D} |f(z)|$$

și să punem

$$D_{z_0} = \{z, f(z) = f(z_0)\}$$

care, evident este o mulțime închisă și cum  $D$  este deschisă, rezultă că  $D - D_{z_0}$  este deschisă. Să arătăm că avem  $D_{z_0} = D$ ; în adevăr, în caz contrar, fie  $C$  o componentă conexă a mulțimii  $D - D_{z_0}$  și cum  $D$  este un domeniu rezultă că  $\partial C \cap D_{z_0} \neq \emptyset$  ( $\partial C$  este frontiera mulțimii  $C$ ). Să luăm  $a_0 \in D_{z_0} \cap \partial C$  și fie  $r > 0$  astfel ca  $\partial(S(a_0, r)) \cap C \neq \emptyset$ .

Există  $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$  astfel ca

$$t \rightarrow a_0 + re^{it}$$

să ducă intervalul  $[t_1, t_2]$  într-o mulțime din  $C$ . Dacă  $z \in C$ , avem că,  $f(z) < f(a_0) = f(z_0)$  și deci există  $\varepsilon > 0$  astfel că dacă  $t \in [t_1, t_2]$  să avem

$$f(t) < f(a_0) - \varepsilon.$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} f(a_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} f(a_0 + re^{i\theta}) d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{t_2}^{2\pi} f(a_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq f(a_0)t_1 + \frac{1}{2\pi} (f(a_0) - \varepsilon)(t_2 - t_1) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} (f(a_0)(2\pi - t_2)) = f(a_0) - \varepsilon \left( \frac{t_2 - t_1}{2\pi} \right) < f(a_0) \end{aligned}$$

care contrazice definiția funcțiilor subarmonice. Teorema este demonstrată.

De asemenea are loc următoarea :

TEOREMA 10.1.3. Dacă  $\{u_n\}$  este un șir de funcții subarmonice care sînt local uniform mărginite superior în domeniul  $D$ , atunci

$$u(z) = \lim_{z' \rightarrow z} \sup_n u_n(z'),$$

$$v(z) = \lim_{z_1 \rightarrow z} \lim_n u_n(z')$$

sînt funcții subarmonice.

*Demonstrație.* Să arătăm că proprietatea are loc pentru  $u(z)$ . Evident că  $u(z) < \infty$  și aplicînd teorema lui B. Levi, avem

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_{z' \rightarrow z} \sup_n u_n(z') \leq \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_n u_n(z' + re^{i\theta}) d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{z' \rightarrow z} \sup_n u_n(z' + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

În mod similar se procedează cu funcția  $v(z)$ .

Dacă  $x: D \rightarrow R$  este o funcție subarmonică și  $z_0 \in D$ , iar  $r_0 > 0$  numărul

$$J(r_0, z_0, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0 + r_0 e^{i\theta}) d\theta$$

se mai numește și media funcției subarmonice  $u$ ; se poate arăta că  $r_0 \rightarrow \infty$   $J(r_0, z_0, u)$  este crescătoare și convexă în raport cu  $\ln r_0$ .

De asemenea, se poate arăta că orice funcție subarmonică  $u: D \rightarrow R$  cu proprietatea că  $u(z) \neq -\infty$ , este local integrabilă în  $D$ .

În adevăr, funcția  $u$  este integrabilă pe orice subdomeniu  $D_1 \subset D$ . Să arătăm că integrala nu poate fi  $-\infty$ . Dacă nu ar fi așa deducem că există  $z_0 \in D_1 \subset D$  și  $r_0 > 0$  astfel ca

$$(*) \quad \iint_{S(z_0, r_0)} u(z) dx dy = -\infty$$

unde  $r_0$  este astfel ales ca  $S(z_0, 3r_0) \subset D$ .

Cum  $u$  este subarmonică, avem

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

și să calculăm

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} u(z_0) r dr &= \frac{1}{2} u(z_0) r_0^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{S(z_0, r_0)} u(z) dx dy = -\infty\end{aligned}$$

adică  $u(z_0) = -\infty$ .

Fie  $z' \in S(z_0, r_0)$  și cum  $S(z_0, 2r_0) \subset S(z_0, 3r_0)$  din (\*) rezultă că integrala funcției  $u(z)$  pe  $S(z', r_0)$  este de asemenea  $-\infty$  și deci în virtutea celor de mai sus  $u(z') = -\infty$ , adică  $u(z) = -\infty$  în  $S(z_0, r_0)$ , adică  $u(z) = -\infty$  în  $G$  și avem o contradicție. Afirmația este astfel demonstrată.

**TEOREMA 10.1.4.** Dacă  $u$  este o funcție subarmonică în  $D$  și  $v$  este o funcție superior semicontinuuă în  $D$  cu proprietatea că

$$D - \{z, u(z) = v(z)\}$$

este de măsură nulă (măsură Lebesgue), atunci când  $v < \infty$  avem relația  $u(z) \leq v(z)$  oricare ar fi  $z \in D$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este așa. Deci există  $z_0 \in D$  astfel ca  $v(z_0) < u(z_0)$  cu  $z_0 \in D$ . Însă  $v$  este superior semicontinuuă în punctul  $z_0$  și deci există  $\delta > 0$  astfel că dacă  $|z - z_0| < \delta$ , să avem relația

$$v(z) < u(z_0).$$

Însă  $u$  este subarmonică și deci

$$v(z) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Dacă  $z = z_0 + re^{i\theta}$ , atunci

$$\int_0^\delta \int_0^{2\pi} v(z) r dr d\theta = \iint_{S(z_0, \delta)} v dx dy < \int_{S(z_0, \delta)} u(z) dx dy$$

care este o contradicție.

Următoarele teoreme dau un mod de construcție a unor funcții subarmonice.

**TEOREMA 10.1.5.** Dacă  $u \geq 0$  este o funcție subarmonică în  $D$  atunci pentru orice  $p \geq 0$  funcția  $z \rightarrow u^p(z)$  este subarmonică.

*Demonstrație.* În adevăr, conform inegalității lui Hölder obținem

$$u^p(z_0) \leq \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right]^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^p(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

și proprietatea funcției  $u^p$  pentru a fi subarmonică, sînt evidente.

TEOREMA 10.1.6. Dacă  $u : D \rightarrow R$  este subarmonică atunci funcția

$$e^u : D \rightarrow R$$

este de asemenea o funcție subarmonică.

Să demonstrăm mai întîi următoarea inegalitate: pentru orice funcție  $g \in L^1(X, dm)$  unde  $m$  este o măsură de masă totală 1 (o probabilitate), are loc relația

$$\int e^g dm \geq e^{\int g dm}.$$

Să presupunem mai întîi că are loc relația  $\int g dm = 0$  și deci acum avem inegalitatea evidentă

$$e^g \geq 1 + g,$$

deducem prin integrarea în raport cu măsura  $m$  că

$$\int e^g dm \geq 1.$$

Dacă  $g$  nu satisface relația auxiliară, evident că  $g_1 = g - \int g dm$  are această proprietate și deci

$$\int e^{g_1} dm \geq 1$$

care este exact inegalitatea pe care dorim s-o demonstrăm.

În cazul nostru măsura este  $\frac{1}{2\pi} d\theta$  și vom avea

$$e^{u(z_0)} \leq e^{\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}} \leq \int_0^{2\pi} e^{u(z_0 + re^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Celelalte proprietăți se verifică imediat și  $e^u$  este o funcție subarmonică. Are loc de asemenea și următoarea afirmație pe care o dăm sub forma de :

COROLAR 10.1.7. Dacă  $f : D \rightarrow C$  este o funcție olomorfă, atunci următoarele funcții sînt subarmonice :

- 1)  $|f(z)|^p = e^{p \ln |f(z)|},$
- 2)  $\ln^+ |f(z)| = \max \{0, \ln |f(z)|\}.$

Din teorema de mai sus, rezultă că este suficient să arătăm că  $\ln |f(z)|$  este subarmonică. Dacă  $\ln |f(z)| = -\infty$ , atunci afirmația este trivială; dacă nu este așa, cum  $\ln |f(z)| = \operatorname{Re} \ln z > -\infty$  este o funcție armonică într-o vecinătate a punctului  $z$  și deci este subarmonică.

Următoarea teoremă de aproximare este necesară în stabilirea unei condiții de subarmonicitate.

**TEOREMA 10.1.8.** *Condiția necesară și suficientă ca  $u : D \rightarrow R$  să fie subarmonică este ca să existe un șir descrescător de funcții subarmonice  $\{u_n\}$  de clasă  $C^\infty(G_n)$  unde  $G_n \subset G_{n+1}$ .*

*Demonstrație.* Condiția este suficientă după cum rezultă din teorema 10.1.1. Să arătăm că este necesară. Dacă  $u(z) = -\infty$  atunci șirul  $\{u_n\}$  este  $u_n(z) = -n$ . Dacă  $u(z) \neq -\infty$  atunci este local integrabilă și să considerăm o funcție

$$\omega : [0, 1] \rightarrow R; \quad \omega(t) = 0 \text{ dacă } t \geq 1$$

astfel ca

$$2\pi \int_0^1 \omega(\rho) d\rho = 1.$$

Să definim șirul de funcții  $u_n(z)$  astfel

$$\begin{aligned} u_n(z) &= \iint u\left(z + \frac{z'}{n}\right) \omega(|z|) dx' dy' = \iint \omega(z') \omega(n|z - z'|) n^2 dx' dy' = \\ &= \int_0^1 r \omega(r) \left[ \int_0^{2\pi} u\left(z + \frac{re^{i\theta}}{n}\right) d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^1 J\left(\frac{r}{n}, z, u\right) r \omega(r) dr \end{aligned}$$

cu  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Rezultă că funcțiile  $u_n(z)$  sînt subarmonice și de clasă  $C^\infty(G_n)$  unde  $G_n = \{z, \Delta_G(z) > 1/n, z \in G\}$ , care evident satisface și relațiile:

$$1. \quad G_n \subset G_{n+1},$$

$$2. \quad \bigcup G_n = G$$

( $\Delta_{G(z)}$  înseamnă distanța de la punctul  $z$  la mulțimea  $G$ ). Să arătăm că  $\{u_n\}$  este un șir descrescător și tinde către  $u(z)$  în fiecare punct din  $G$ .

Fie  $z \in G$  și  $\rho > 0$  astfel ca  $S(z, \rho) \subset G$  și fie  $N$  astfel ca  $S(z, \rho) \subset G_n$ , dacă  $n \geq N$ . Cum funcția  $J(r/n, z, u)$  este monoton descrescătoare în raport cu  $n$  și din relația stabilită mai sus rezultă că  $\{u_n\}$  este un șir monoton dacă  $n \geq N$ . Să arătăm acum că are loc convergența cerută. Vom avea pentru  $\varepsilon > 0$  un  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel că dacă  $|z - z'| < \delta$  să avem  $u(z') < u(z) + \varepsilon$  și din relațiile de mai sus deducem că

$$u_n(z) < u(z) + \varepsilon$$

și cum avem și relația

$$u(z) \leq u_n(z)$$

deducem că are loc convergența amintită.

În teorema care urmează vom avea nevoie de noțiunea de distribuție pe care o presupunem cunoscută.

**TEOREMA 10.1.9.** *Dacă  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție subarmonică și nu este identic  $-\infty$ , atunci are loc relația*

$$(*) \quad 4 \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta u(z) \geq 0$$

și invers dacă  $u \in D^*(G)$  este o distribuție care satisface relația (\*) atunci  $u$  este măsurabilă și există o singură funcție subarmonică în  $G$  care coincide cu  $u$  aproape peste tot.

**Demonstrație.** Relația (\*) înseamnă că pentru orice  $\varphi \geq 0$  indefinit derivabilă și cu suport compact, avem

$$\iint u \Delta \varphi \, dx \, dy \geq 0.$$

Cum  $u$  nu este identic  $-\infty$ , este local integrabilă și deci are sens integrala

$$\langle u, \varphi \rangle = \iint u \varphi \, dx \, dy$$

deci  $u$  definește o distribuție. Faptul că  $u$  este subarmonică se scrie și sub forma

$$(\mu_r - \delta) \otimes u \geq 0,$$

unde

$$\langle \mu_r, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r e^{i\theta}) \, d\theta.$$

Cum pentru  $r \rightarrow 0^+$ , avem

$$\frac{\mu_r - \delta}{r^2} \rightarrow \frac{1}{4} \Delta \delta$$

rezultă că pentru fiecare  $\varphi$  indefinit derivabilă și cu suport compact, există relația

$$\left\langle \frac{\mu_r - \delta}{r^2}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r e^{i\theta}) \, d\theta - \varphi(0) \right] = \frac{1}{4} \Delta \varphi(0).$$

Cum produsul de convoluție este continuu deducem că

$$0 \leq \frac{\mu_r - \delta}{r^2} \otimes u \rightarrow \frac{1}{4} \Delta \delta \otimes u = \frac{1}{4} \Delta u$$

și necesitatea condiției este demonstrată.

Să arătăm acum și cealaltă afirmație. Fie  $u$  o distribuție care are proprietatea (\*) oricare ar fi  $z \in G$  și în acest caz este cunoscut că există o măsură  $\mu$  astfel ca  $\Delta u = \mu$  și fie  $E(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z|$  soluția fundamentală a acestei ecuații (în distribuții) adică  $\Delta E = \delta$ . Fie  $G' \subset G$  și  $\mu_{G'}$  restricția măsurii  $\mu$  la  $G'$  și atunci are loc descompunerea lui F. Riesz

$$u = E \otimes \mu_{G'} + u_{G'}$$

unde  $u_{G'}$  este o funcție armonică în  $G'$ . Funcția

$$z' \rightarrow \iint_{G'} |\ln |z - z'|| \, dx \, dy$$

este continuă în  $G'$  și măsura  $\mu_{G'}$  definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul funcțiilor continue pe  $\bar{G}'$ , de unde rezultă că

$$\iint_{G'} \left[ \iint_{G'} |\ln |z - z'|| \, dx \, dy \right] d\mu(z')$$

este finită. Din teorema lui Fubini rezultă că există și este finită integrala

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{G'} \ln |z - z'| \, d\mu(z') = E \otimes \mu_G$$

ce este de asemenea o funcție sumabilă. Din reprezentarea lui Riesz dată mai sus rezultă că  $u$  este local integrabilă și aproape pentru orice  $z \in G'$ , avem

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{G'} \ln |z - z'| \, d\mu(z') + u_{G'}(z) = h(z).$$

Pentru a demonstra afirmația va fi suficient să demonstrăm că membrul drept al acestei egalități reprezintă o funcție subarmonică. Să luăm funcțiile

$$\psi_n = \ln(|z - z'| + 1/n)$$

și în acest mod șirul  $\{\psi_n\}$  este monotom descrescător și converge evident către  $\ln |z - z'|$  de unde, conform teoremei lui B. Levi, rezultă,

$$h(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) + u_{G'}(z)$$

unde

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G'} \ln(|z - z'| + 1/n) \, d\mu(z')$$

Cum funcțiile  $u_n$  sînt continue,  $\mu \geq 0$  și

$$\ln(|z| + \varepsilon) = \sup_{|\xi| \leq \varepsilon} \ln|z + \xi|$$

este subarmonică, rezultă că  $u_n$  sînt funcții subarmonice și formează un șir descrescător, și deci limita definește o funcție subarmonică. Cum  $u_G$  este armonică, afirmația că  $u$  este subarmonică este demonstrată. Din teorema de unicitate 10.1.4. rezultă afirmația teoremei.

Următoarea teoremă dă încă un criteriu de subarmonicitate :

**TEOREMA 10.1.10.** *Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția  $u : D \rightarrow R$  să aibă proprietatea că  $\ln u(z)$  să fie subarmonică este ca funcția*

$$u(z)|e^{az}| : D \rightarrow R$$

să fie subarmonică în  $G$  oricare ar fi numărul complex  $a$ .

Înainte de a începe demonstrația vom reaminti că orice funcție  $u : D \rightarrow R$  cu proprietatea că  $\ln u(z)$  este o funcție subarmonică și funcție logaritmic subarmonică. Este evident că dacă  $u$  este logaritmic subarmonică atunci este funcție subarmonică.

*Demonstrație.* Condiția pusă este necesară deoarece funcția

$$z \rightarrow \ln u(z) + \operatorname{Re}(az)$$

este subarmonică, oricare ar fi numărul complex  $a$  și deci funcția  $u|e^{az}|$  va fi subarmonică.

Să arătăm acum că este și suficientă. Funcția  $z \rightarrow \ln u(z) < +\infty$  este superior semicontinuă în  $G$ , sau în punctele unde  $u(z_0) = 0$ ,  $u(z)$  este continuă, de unde

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} u(z) = u(z_0) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z).$$

Să definim pentru orice întreg  $n$

$$u_n(z) = \iint u(z + z'/n) \omega(|z'|) dx' dy' + 1/n,$$

unde  $\omega$  este funcția considerată de noi mai înainte, care reprezintă funcția subarmonică indefinit derivabilă și pozitivă pe domeniile  $G_n$  care au fost considerate mai înainte.

Vom avea

$$u_n(z)|e^{az}| = \iint u(z + z'/n) e^{a(z+z'/n)} \omega(|z'|) e^{-\operatorname{Re}(az'/n)} dx' dy' + (1/n) |e^{az}|$$

care sînt funcții subarmonice în  $G_n$  respectiv, oricare ar fi  $n$ .

Dar

$$\Delta(u_n|e^{az}|) = |e^{az}| \left[ \Delta u_n + 2b \frac{\partial u_n}{\partial x} - 2c \frac{\partial u_n}{\partial y} + (b^2 + c^2)u_n \right] \geq 0$$

unde  $a = b + ic$ . Cum  $u_n \geq 1/n$ , luând limita după  $b$  și  $c$  rezultă că

$$u_n \Delta u_n - \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \geq 0$$

și cum

$$\Delta \ln u_n = \frac{1}{u_n^2} \left[ u_n \Delta u_n - \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right]$$

deducem că  $\Delta \ln u_n \geq 0$  în  $G_n$ , deci  $\ln u_n$  este o funcție subarmonică în  $G_n$ . Dar cum  $u_n \rightarrow u$  monoton și  $\ln u_n \rightarrow \ln u$  va tinde tot monoton, de unde rezultă că  $\ln u$  este o funcție armonică.

Teorema este astfel demonstrată.

Vom încheia acest paragraf cu câteva observații privind extinderea noțiunii de funcție subarmonică la mai multe dimensiuni și chiar la spații infinit-dimensionale.

Fie  $G$  un domeniu în spațiul  $C^n$ , iar pentru orice  $z_0, a \in G$  să considerăm mulțimea deschisă

$$G_{z_0, a} = \{\lambda, z_0 + \lambda a \in G\}.$$

O funcție  $u : G \rightarrow R$  se va numi plurisubarmonică în  $G$ , dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

1.  $u$  este superior semicontinuă în  $G$ ,
2. pentru orice  $z_0$  și  $a$ , restricția la  $G_{z_0, a}$  este o funcție subarmonică în raport cu  $\lambda$ .

Este evident că definiția de mai sus are sens în orice spațiu vectorial peste corpul numerelor complexe.

Pentru detalii în legătură cu funcțiile plurisubarmonice a se vedea [534] și [535].

## § 2. TEOREME DE MAXIM PENTRU NORME

Să presupunem că  $f : D \rightarrow X$  este o funcție olomorfă definită pe  $D$ , unde  $D$  este un domeniu plan, iar  $X$  este un spațiu Banach complex, adică o funcție pentru care ar fi  $x^* \in X^*$  funcția

$$z \rightarrow x^*(f(z))$$

este olomorfă. Atunci cînd  $X$  este planul complex, se cunosc teoreme importante de maxim. Problema care se pune este de a extinde aceste teoreme la funcții de tipul considerat mai sus.

Următoarea teoremă este binecunoscută :

TEOREMA 10.2.1. Dacă  $f : D \rightarrow X$  este olomorfă atunci funcția

$$\|f\| : D \rightarrow \|f(z)\|$$

este subarmonică.

*Demonstrație.* Fie  $z_0 \in D$  și  $r > 0$  astfel ca cercul  $\{z, \|z - z_0\| < r\}$  să fie în  $D$ . Din teorema lui Cauchy rezultă că

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

și deci

$$\|f(z_0)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(z_0 + r e^{i\theta})\| d\theta.$$

Cum  $\|f\|$  este continuă rezultă că  $\|f\|$  este subarmonică în  $D$ .

De asemenea are loc următoarea :

**TEOREMA 10.2.2.** Dacă  $f: D \rightarrow X$  este olomorfă, atunci  $\ln \|f(z)\|$  este o funcție subarmonică în  $D$ .

*Demonstrație.* Evident, funcția

$$z \rightarrow e^{az} f(z)$$

cu  $a$  număr complex este o funcție olomorfă și deci  $|e^{az}| \|f(z)\|$  este o funcție subarmonică, ceea ce înseamnă că  $\ln \|f(z)\|$  este o funcție subarmonică. Teorema este demonstrată.

Din teorema de mai sus rezultă și :

**TEOREMA 10.2.3.** Dacă  $f: D \rightarrow X$  este o funcție olomorfă atunci următoarele funcții :

$$1) z \rightarrow \|f\|^p, p > 0$$

2)  $\varphi(\|f\|)$  unde  $\varphi$  este o funcție convexă și crescătoare sînt funcții subarmonice.

Este cunoscut că dacă  $f$  este o funcție olomorfă cu valori complexe atunci dacă modulul său are un maxim local în domeniul respectiv, funcția este în mod necesar o constantă.

Această afirmație de importanță fundamentală în teoria funcțiilor olomorfe complexe nu se mai păstrează în cadrul general al funcțiilor olomorfe cu valori în spații Banach, după cum rezultă din următorul exemplu :

Fie  $C \times C$  normat, cu norma

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

Să definim funcția  $f(z)$  pe  $C$  cu valori în  $C \times C$  prin

$$f(z) = (1, z)$$

care evident nu este constantă. De asemenea este clar că are loc și relația

$$\|f(z)\| = 1 \quad |z| < 1$$

ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Pentru a studia cînd sînt prezente fenomene analoage cu cazul clasic avem nevoie de următoarea :

**DEFINIȚIA 10.2.4.** Pentru spațiul Banach  $X$  (complex) se spune că are loc principiul de maxim tare dacă pentru orice funcție olomorfă  $f: D \rightarrow X$ ,

unde  $D$  este un domeniu plan,  $\|f(\xi)\| = \text{const.}$ ,  $\xi \in D$  are loc dacă și numai dacă  $f(\xi) = \text{const.}$

De asemenea, de o importanță fundamentală este și următoarea noțiune, care extinde noțiunea, foarte cunoscută de punct extrem.

**DEFINIȚIA 10.2.5.** Fie  $K$  o mulțime convexă și  $x$  un punct din  $K$ . Se spune că punctul  $x$  este un punct extrem complex dacă din  $\Delta(x, y) \subset K$ , pentru un  $y \in X$ , rezultă  $y = \theta$  (elementul zero al spațiului Banach complex  $X$ ),

Prin  $\Delta(x, y)$  am notat mulțimea

$$\{u, u \in X, u = x + \xi y, \xi \in \mathbb{C}; |\xi| \leq 1\}.$$

Are loc :

**TEOREMA 10.2.6.** Dacă  $x$  este punct extrem pentru mulțimea convexă  $K$  atunci este și punct extrem complex.

*Demonstrație.* Să presupunem că nu este punct extrem complex și deci există  $y_0 \neq \theta$  în  $X$  astfel ca  $\Delta(x, y_0) \subset K$  și deci  $x_0 + \xi y_0 \in K$  cu  $|\xi| \leq 1$ .

Să luăm  $\xi = 1/2$ , deci

$$x_0 + \frac{1}{2} y_0 = x_0/2 + (1/2) \cdot (x_0 + y_0)$$

care ne dă că  $x_0$  nu este punct extrem deoarece  $x_0 + y_0 \in K$ . Teorema este demonstrată.

Este natural să ne punem problema dacă orice punct extrem complex este și punct extrem. În cele ce urmează vom arăta că, în general, afirmația nu este adevărată, adică există spații Banach și mulțimi convexe în care nu orice punct extrem complex este punct extrem.

Fie  $(S, B, P)$  un spațiu cu măsură și pentru simplificare vom presupune că  $P$  este o probabilitate. Să considerăm spațiile  $L^p(S, B, P)$  cu  $p \geq 1$ , adică spațiul claselor de funcții  $\hat{f}$  cu modulul  $p$ -integrabil, cu norma

$$\|\hat{f}\|_p = \|f\|_p = \left( \int_S |f|^p dP \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \hat{f}$$

și pentru orice  $f \in L^1(S, B, P)$  să punem

$$S(f) = \{s, s \in S, f(s) \neq 0\}.$$

Are loc :

**TEOREMA 10.2.7.** Dacă  $f, g$  sînt în  $L^1(S, B, P)$  atunci

$$\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

dacă și numai dacă există o funcție pozitivă  $h$  pe  $S(f) \cap S(g)$  astfel ca  $f = hg$ , egalitatea avînd loc aproape peste tot pe  $S(f) \cap S(g)$ .

*Demonstrație.* Fie  $h$  funcția definită pe  $S(f) \cap S(g)$ ,  $h(s) > 0$  astfel că oricare ar fi  $s \in S(f) \cap S(g)$ ,  $f(s) = h(s) g(s)$  aproape peste tot.

În acest caz, avem

$$\begin{aligned} \|f\|_1 + \|g\|_1 &= \int_{S(f) - S(f) \cap S(g)} |f| dP + \int_{S(g) - S(g) \cap S(f)} |g| dP + \\ &+ \int_{S(f) \cap S(g)} |1+h| |f+g| dP = \|f+g\|_1 \end{aligned}$$

Invers, dacă

$$\|f\|_1 + \|g\|_1 = \|f+g\|_1$$

atunci rezultă că

$$|f(s) + g(s)| = |f(s)| + |g(s)|$$

aproape peste tot, de unde rezultă că există  $h$  pozitivă pe  $S(f) \cap S(g)$  astfel ca să avem relația  $f = hg$  (tot aproape peste tot). Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 10.2.8.** Dacă  $f, g \in L^1(S, B, P)$  și  $\|f\|_1 = 1, \|f + zg\|_1 \leq 1$ ,  $\forall z, |z| \leq 1$  atunci  $\|f + zg\|_1 = 1$  și  $S(g) \subset S(f) \cup C$  cu  $P(C) = 0$ .

*Demonstrație.* Cum avem

$$1 = \|f\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f + zg\|_1 + \frac{1}{2} \|f - zg\|_1 \leq 1$$

rezultă că trebuie să avem în mod necesar  $\|f + zg\|_1 = 1$  oricare ar fi  $z$ ,  $|z| \leq 1$ . Dar

$$\begin{aligned} 1 = \|f\|_1 &= \int_{S(f)} |f| dP \leq \frac{1}{2} \int_{S(f)} (|f+g| + |f-g|) dP \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{S(f)} |f+g| dP + \frac{1}{2} \int_{S(f)} |f-g| dP = 1 \end{aligned}$$

și cum

$$\int_S (|f+g| + |f-g|) dP = \int_{S(f)} (|f+g| + |f-g|) dP + 2 \int_{S-S(f)} |g| dP$$

deducem că

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S(f)} (|f+g| + |f-g|) dP &= \int_{S-S(f)} |g| dP + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{S(f)} (|f+g| + |f-g|) dP \end{aligned}$$

deci trebuie

$$\int_{S-S(f)} |g| dP = 0,$$

care ne dă cealaltă afirmație a teoremei.

**TEOREMA 10.2.9.** Dacă  $p \in [1, \infty)$  atunci orice punct de normă 1 din sfera spațiului Banach  $L^p(S, B, P)$  este un punct extrem complex.

*Demonstrație.* Vom avea două cazuri de considerat:  $p = 1$  și  $p > 1$ . Fie deci  $p = 1$  și  $f, g$  elemente cu proprietatea că

$$\|f\|_1 = 1, \|f + zg\|_1 \leq 1$$

oricare ar fi  $z$  cu  $|z| \leq 1$ . Din teorema de mai sus rezultă că  $\|f + zg\|_1 = 1$  oricare ar fi  $z$ , cu  $|z| \leq 1$ . Deci, pentru orice  $z$ ,  $|z| \leq 1$ , iar

$$2 = \|f + zg\|_1 + \|f - zg\|_1 = \|f + zg + f - zg\|_1 = 2 \|f\|_1$$

și pentru orice  $z$ , cu  $|z| \leq 1$  există  $h_z$  pozitivă pe  $S(f + zg) \cap S(f - zg)$  astfel ca

$$f + zg = h_z(f - zg)$$

aproape peste tot pe mulțimea  $S(f + zg) \cap S(f - zg)$ . De aici rezultă că

$$(*) \quad zg = \frac{h_z - 1}{h_z + 1}$$

aproape peste tot pe mulțimea considerată mai sus. Fie  $s \in S(f)$  și dacă  $z$  este suficient de mic, atunci  $s \in S(f + zg)$  și dacă (\*) are loc în acest punct, atunci avem

$$2 \bar{f}(s) g(s) = (h_z(s) - 1) |f(s)|^2 \cdot \frac{1}{h_z(s) + 1}.$$

Cum această relație trebuie să fie adevărată dacă  $|z|$  este mic, membrul drept fiind real, deducem că trebuie să avem

$$zg(s) = 0,$$

căci  $z$  poate fi luat ca membrul stîng să fie pur imaginar. Din  $g(s) = 0$ ,  $g$  se anulează aproape peste tot pe  $S(f)$ . Dar atunci  $g$  se anulează aproape peste tot pe  $S$  și, în acest mod,  $f$  este un punct extrem complex.

În cazul cînd  $p > 1$ , vom arăta că orice punct care este pe sfera unitate este un punct extrem real și, din teorema 10.2.6, rezultă afirmația noastră.

În adevăr, fie  $p > 1$  și  $f$ ,  $\|f\|_p = 1$ , vom presupune că nu este punct extrem. Rezultă că există  $g, h$  astfel ca  $f = \frac{1}{2}(g + h)$ ,  $\|h\|_p = \|g\|_p = 1$ .

Dar atunci din inegalitatea lui Minkovski rezultă că  $g = \lambda h$  cu  $\lambda \in \mathbb{R}$  și deci  $f = g = h$ , afirmația este demonstrată.

**TEOREMA 10.2.10.** *Spațiul  $L^1(S, B, P)$  are proprietatea că sfera sa unitate nu conține puncte extreme.*

*Demonstrație.* Fie  $\alpha$  o funcție definită pe  $S$  cu proprietatea că

$$0 \leq \alpha(s) \leq 1$$

și nu este nulă aproape peste tot. Să considerăm funcțiile

$$f_1 = \frac{\alpha(s) f(s)}{\int \alpha(s) |f(s)| dP},$$

$$f_2 = \frac{(1 - \alpha(s)) f(s)}{\int (1 - \alpha(s)) |f(s)| dP},$$

care sînt pe sfera unitate, și cum

$$f = \left( \int \alpha(s) |f(s)| dP \right) f_1 + \left( \int (1 - \alpha(s)) |f(s)| dP \right) f_2,$$

deducem că  $f$  nu este punct extrem. Teorema este astfel demonstrată.

Utilitatea noțiunii de punct extrem complex este arătată de următorul rezultat:

**TEOREMA 10.2.11.** *Condiția necesară și suficientă ca spațiul Banach complex  $X$  să aibă proprietatea că principiul de maxim tare are loc, dacă și numai dacă orice element de normă 1 din sfera unitate este un punct extrem complex.*

*Demonstrație.* Fie  $X$  un spațiu Banach complex și  $x$  un element de normă 1, care nu este punct extrem complex al sferei  $B = \{x, \|x\| \leq 1\}$ , să arătăm că există o funcție olomoră în  $D = \{z, |z| < 1\}$  cu valori în  $X$  cu proprietatea că  $\|f(z)\| = 1$ ,  $|z| = 1$  și  $f$  nu este constantă.

În adevăr, fie  $y \neq 0$  din  $X$  astfel ca  $\|x + \xi y\| \leq 1$ , dacă  $|\xi| \leq 1$  și să definim aplicația

$$f(z) = x + zy$$

care este olomoră și nu este constantă; de asemenea, are proprietatea că  $\|f(z)\| \leq 1$ . Dar  $\|f(0)\| = \|x\| = 1$  și deci  $\|f(z)\| = 1$  oricare ar fi  $z$ ,  $|z| < 1$ . Să arătăm acum că condiția ca sfera să aibă frontiera formată numai din puncte extreme complexe este suficientă.

Să considerăm pentru orice întreg  $n$  polinomul

$$p_n(z) = e^{nz} - \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!}$$

și să arătăm că dacă  $|z| \leq 1$  și  $|ze^{1-z}| \leq 1$ , atunci  $p_n(z) \neq 0$ .

În adevăr, pentru orice număr complex  $z$ , avem

$$1 - e^{nz} p_n(z) = e^{-nz} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!} = e^{-n} (ze^{1-z})^n \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{n^p z^{p-n}}{p!}$$

și cum  $|z| \leq 1$ ,  $|ze^{1-z}| \leq 1$ , obținem

$$|1 - e^{nz} p_n(z)| \leq e^{-n} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{n^p}{p!} = 1 - e^{-n} p_n(1) < 1$$

deoarece  $p_n(1) > 0$ .

Cum originea aparține intersecției mulțimilor deschise

$$\{z, |z| < 1\}, \{z, |ze^{1-z}| < 1\},$$

rezultă că are loc următorul:

**COROLAR 10.2.12.** *Există  $c \in (0,1)$  astfel că dacă  $|z| < c$ ,  $p_n(z) \neq 0$  oricare ar fi întregul  $n$ .*

Are loc de asemenea următorul rezultat în legătură cu constanta  $c$ :

**TEOREMA 10.2.13.** *Fie  $c$  constanta de mai sus și în acest caz, pentru orice întreg  $n$  există numerele complexe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  cu următoarele proprietăți:*

$$1. |z_i| \leq \frac{1}{c}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$2. \sum_{i=1}^n z_i = n,$$

$$3. \sum_{i=1}^n z_i^p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, n$$

*Demonstrație.* Considerăm polinomul

$$Q_n(\xi) = \xi^n - n \xi^{n-1} + \frac{n^2}{2!} \xi^{n-2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} n^n,$$

care are rădăcinile  $z_1, \dots, z_n$  satisfăcând relațiile 2 și 3. Cum

$$Q_n(\xi) = \xi^n p_n\left(-\frac{1}{\xi}\right)$$

rezultă afirmația 1, și astfel teorema este demonstrată.

**TEOREMA 10.2.14.** *Fie  $f: D = \{z, |z| < 1\} \rightarrow X$  o funcție olomorfă și pentru  $r > 0$  să punem  $D_r = \{z, |z| < r\}$ . Dacă  $f'(0) \neq 0$  atunci există o constantă  $c > 0$  astfel ca  $V_c$  transformată prin*

$$z \rightarrow f(0) + z f'(0)$$

să fie înfășurătoarea convexă a mulțimii  $f(D)$ .

*Demonstrație.* Să punem

$$g: D \rightarrow X$$

prin

$$f(z) = f(0) + g(z)$$

și deci  $f'(0) = g'(0) \neq 0$ , iar

$$f(D) = f(0) + \text{conv } g(D)$$

unde  $\text{conv } (\cdot)$  înseamnă înfășurătoarea convexă a mulțimii  $(\cdot)$ . Fie

$$g(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

care converge normal în  $D$ . Să alegem întregul  $n$  și punem

$$R_n(|z|) = |a_{n+1}| |z|^{n+1} + |a_{n+2}| |z|^{n+2} + \dots$$

Să luăm  $z_1, z_2, \dots, z_n$  numere complexe care satisfac teorema 10.2.13. Vom avea pentru  $|z| < c$  relația

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i, z) = a_1 z + h_n(z),$$

unde

$$h_n(z) = a_{n+1} \left( \sum_{i=1}^n z_i^{n+1} \right) z^{n+1} + a_{n+2} \left( \sum_{i=1}^n z_i^{n+2} \right) z^{n+2} + \dots$$

și deci

$$|h_n(z)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} |a_p| |c z|^p = R_n(c |z|).$$

Pentru  $|z| < c$ , avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) = 0,$$

adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i, z) = a_1 z$$

dacă  $|z| < c$ . Cum  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(z_i, z) \in \text{conv } (g(D))$ , deducem, pentru  $|z| < c$  că  $a_1 z \in \text{conv } (g(D))$  și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 10.2.15.** Dacă  $f: D \rightarrow X$  este o funcție olomorfă neconstantă atunci există  $a_1 \in X, a_1 \neq 0$  astfel ca  $D_c$  să fie transformată prin

$$z \rightarrow f(0) + a_1 z$$

în  $\text{conv } f(D)$ .

*Demonstrație.* Fie  $g$  definită ca în demonstrația teoremei 10.2.14. și să punem

$$g(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad a_n \neq 0$$

oricare ar fi  $z \in D$ . Fie  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  rădăcinile ecuației  $\xi^n = 1$  atunci pentru  $z \in D$ , avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\varepsilon_i z^{1/n}) &= a_n z + a_{n+1} (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) z^{\frac{n+1}{n}} + \\ &+ \dots + a_{2n} z^2 + \dots + a_{3n} z^3 + \dots = a_n z + a_{2n} z^2 + a_{3n} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

deci funcția  $z \rightarrow G(z)$  definită pentru  $z \in D$  prin

$$G(z) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n g(\varepsilon_i z^{1/n}) \right)$$

este olomorfă în  $D$  și  $G'(0) \neq 0$ . Cum  $G(D) \subset \text{conv } g(D)$  din teorema 10.2.14 rezultă afirmația noastră.

**TEOREMA 10.2.16.** Fie  $K$  o mulțime convexă în  $X$  și  $f(D) \subset K$ , iar  $f(0)$  este un punct extrem complex al mulțimii  $K$ . În acest caz  $f$  este constantă.

*Demonstrație.* Să presupunem că afirmația nu este adevărată și deci există  $a_1 \in X$  astfel ca :

1.  $a_1 \neq 0$ ,
2.  $f(0) + a_1 D_c \subset K$ .

Deci  $\Delta(f(0), a_1 c) \subset K$ , de unde rezultă că  $f(0)$  nu este punct extrem și teorema este demonstrată.

Este evident că din teoremele 10.2.13—10.2.16 rezultă teorema 10.2.11.

S. Agmon a arătat că în cazul spațiilor Hilbert teorema 10.2.11 se poate demonstra mai simplu.

Fie  $\langle, \rangle$  produsul scalar pe  $X$  și  $f: D \rightarrow X$  o funcție olomorfă astfel ca  $\|f(z)\|$  este constantă pentru  $z \in D$ . Fie  $z_0$  arbitrar în  $D$  și să considerăm funcția

$$z \rightarrow \langle f(z), f(z_0) \rangle = F(z),$$

care este olomorfă în  $D$ . Pentru orice  $z \in D$  din inegalitatea lui Schwarz rezultă că

$$|F(z)| = |\langle f(z), f(z_0) \rangle| \leq \|f(z)\| \|f(z_0)\| = \|f(z_0)\|^2$$

și cum

$$|F(z_0)| = \langle f(z_0), f(z_0) \rangle = \|f(z_0)\|^2$$

deducem că  $F$  este constantă în  $D$ , adică

$$\langle f(z), f(z_0) \rangle = \|f(z)\| \|f(z_0)\| = \|f(z_0)\|^2$$

oricare ar fi  $z \in D$ , de aici deducem că  $f(z)$  și  $f(z_0)$  sînt liniar dependente. Dacă  $f(z_0) \neq 0$  există pentru fiecare  $z \in D$  funcția scalară  $z \rightarrow c(z)$ , astfel ca

$$f(z) = c(z) f(z_0)$$

și care este olomorfă. Cum  $\|f(z)\| = \|f(z_0)\|$  deducem că  $|c(z)| = 1$ , oricare ar fi  $z \in D$  și deci  $c(z)$  este o constantă, cum  $c(0) = 1$  rezultă că  $f(z) = f(z_0)$  oricare ar fi  $z \in D$ . Dacă  $f(z_0) = 0$  avem evident  $f(z) = 0$  în  $D$ . Teorema este demonstrată.

Vom remarca că aici am folosit faptul că orice punct de pe sfera unitate este un punct extrem și deci este punct extrem complex.

Vom arăta acum că teorema 10.2.11 poate fi demonstrată utilizînd noțiunea de semiprodus scalar în sensul lui Lumer pentru cazul cînd spațiul este strict normat<sup>1</sup>.

Fie  $X$  un spațiu Banach complex și  $[,]$  o aplicație a spațiului  $X \times X$  în mulțimea numerelor complexe cu următoarele proprietăți:

1.  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ ,
2.  $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$ ,
3.  $[x, x] = \|x\|^2$ ,
4.  $|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$ ,

oricare ar fi  $x, y, z \in X$ . Să presupunem că  $X$  are proprietățile din teorema 10.2.11, adică orice punct de pe sferă este punct extrem complex și  $f: D \rightarrow X$  este o funcție olomorfă. Menționăm că semiprodusul scalar  $[,]$  poate fi construit cu ajutorul teoremei Hahn-Banach-Bohnenblust Sobczyk foarte ușor, și mai mult, să fie îndeplinită și proprietatea:

5.  $[x, \lambda y] = \bar{\lambda} [x, y]$

după cum a arătat J. R. Gilles.

În acest caz funcția complexă

$$z \rightarrow [f(z), f(z_0)] = F(z)$$

este olomorfă în  $D$  și din inegalitatea 4 a semiprodusului scalar  $[,]$  rezultă că avem

$$|F(z)| = |[f(z), f(z_0)]| \leq \|f(z_0)\|^2$$

și cum  $F(z_0) = \|f(z_0)\|^2$ , rezultă că  $F(z)$  este constantă în  $D$ ,  $F(z) = [f(z), f(z_0)] = \|f(z_0)\|^2$ , oricare ar fi  $z \in D$ . Să arătăm că  $f(z)$  și  $f(z_0)$  sînt liniar dependenți.

Se poate ușor demonstra că  $X$  este strict normat dacă și numai dacă din

$$|[x, y]|^2 = \|x\| \|y\|$$

<sup>1</sup> Un spațiu  $X$  se spune că este strict normat în sensul lui Clarkson dacă  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , atunci există  $\lambda$  astfel ca  $x = \lambda y$ .

rezultă  $x = \lambda y$ . Vom menționa că  $l^p, L^p$  sînt spații strict normate dacă  $1 < p < \infty$ .

În cazul nostru  $f(z) = c(z) f(z_0)$  și demonstrația poate fi continuată ca mai sus, de aceea nu o vom reproduce.

Vom mai face observația că, dacă  $X$  este un spațiu Banach separabil, atunci există o nouă normă  $\|\cdot\|_1$ , echivalentă cu norma inițială și astfel ca  $\{X, \|\cdot\|_1\}$  să fie un spațiu strict normat. De asemenea menționăm că această afirmație este adevărată și pentru unele clase de spații neseperabile.

### § 3. SUBARMONICITATEA RAZEI SPECTRALE

Fie  $D = \{z, |z| < 1\}$  și  $f: D \rightarrow X$  o funcție olomorfă definită pe  $D$  cu valori în  $X$ , unde  $X$  este o algebră Banach. Prin definiție raza spectrală a elementului  $f(z)$  este

$$\rho(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n(z)\|^{1/n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f^n(z)\|^{1/n}.$$

O problemă interesantă a fost pusă de A. Brown și R. Douglas și anume, dacă funcția

$$z \rightarrow \rho(f(z))$$

este subarmonică. Problema a fost rezolvată afirmativ de E. Vesentini care a arătat că și funcția

$$z \rightarrow \log \rho(f(z))$$

este subarmonică.

Metoda de demonstrație pe care o vom expune pornește de la o idee a autorului acestei cărți de a utiliza puteri de forma  $m = 2^n$  cu  $n$  întreg.

**TEOREMA 10.3.1. Funcția**

$$z \rightarrow \log \rho(f(z))$$

este subarmonică.

*Demonstrație.* În definiția razei spectrale este suficient să luăm întregi de forma  $2^n$ . Deci

$$\rho(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(z)^{2^n}\|^{1/2^n}$$

și evident că pentru orice  $a \in C$ , avem

$$|e^{az}| \rho(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |e^{az}| \|f^{2^n}(z)\|^{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(e^{az} f(z))^{2^n}\|^{1/2^n}$$

și cum fiecare termen al șirului este o funcție subarmonică, deducem că  $\log \rho(f(z))$  este o funcție subarmonică.

Din această teoremă rezultă evident și următoarea :

**TEOREMA 10.3.2.** *Funcția  $z \rightarrow \rho(f(z))$  este subarmonică.*

Vom da acum câteva aplicații ale acestor teoreme. Fie  $U$  o funcție superior semicontinuă într-o vecinătate a mulțimii  $A = \{z, r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ , cu proprietățile următoare :

1.  $0 \leq U < \infty$ ,
2.  $\log U$  este subarmonică în  $A$ .

Pentru orice  $r \in (r_1, r_2)$  să luăm  $A_r = A \cap \{0 < |z| < r\}$  și să punem

$$M(r) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} U(re^{i\theta}).$$

Are loc :

**TEOREMA 10.3.3.**  *$\log M(r)$  este o funcție crescătoare, convexă în raport cu  $\log r$ , dacă  $r \in (r_1, r_2)$ .*

Vom observa că această teoremă este asemănătoare teoremei celor trei cercuri a lui Hadamard din teoria funcțiilor de o variabilă complexă cu valori complexe.

*Demonstrație.* Este evident că  $\log |z|$  este o funcție subarmonică și mai mult, pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $|z|^\alpha$  are logaritmul subarmonic în  $A$ . Deci, pentru  $r_1 \leq r \leq r_2$ , vom avea

$$r^\alpha M(r) \leq \max \{r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)\}.$$

Dacă  $M(r_1)$  și  $M(r_2) > 0$  luăm  $\alpha$  astfel ca

$$r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2),$$

adică

$$\alpha = \frac{\log M(r_2)/M(r_1)}{\log(r_1/r_2)}$$

și deci

$$r^\alpha M(r) \leq r_1^\alpha M(r_1),$$

de unde deducem că

$$\alpha \log r + \log M(r) \leq \alpha \log r_1 + \log M(r_1).$$

Să punem

$$\log r = t \log r_1 + (1-t) \log r_2$$

cu  $t \in [0, 1]$  și vom avea

$$\log M(r) \leq \log M(r_1) + \alpha(1-t) \log \frac{r_1}{r_2} \leq t \log M(r_1) + (1-t) \log M(r_2)$$

și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 10.3.4.** Dacă  $f: D \rightarrow X$ ,  $X$  o algebră Banach atunci zerourile funcției  $\rho(f(z))$  au ordin finit (zerourile din  $D$ ).

*Demonstrație.* Pentru orice  $z_0 \in D$  să alegem  $r_0 > 0$ , astfel ca

$$z_0 + r e^{i\theta} \in D,$$

dacă  $0 < r < r_0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Să punem

$$M(\rho(f), z_0, r) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \rho(f(z_0 + r e^{i\theta})).$$

Din teorema de mai sus rezultă că  $M$  este o funcție convexă de  $\log r$  (și crescătoare pentru  $0 < r < r_0$ ). Fie

$$E = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \xi = \log r, \text{ pentru } 0 < r < r_0, \eta > \log M(\rho(f), r_0 r)\}$$

și să luăm dreapta  $\eta = p\xi + q$  cu  $p > 0$  și disjunctă de  $E$ . În acest caz avem că

$$\log M(\rho(f), z_0, r) \geq p \log r + q$$

și deci

$$M(\rho(f), z_0, r) \geq e^q r^p.$$

Din teorema demonstrată rezultă imediat și următorul fapt pe care-l dăm în :

**TEOREMA 10.3.5.** Dacă  $\rho(f)$  nu se anulează identic atunci mulțimea punctelor  $z \in D$  cu proprietatea că  $f(z)$  este un element nilpotent generalizat, adică  $\{z, \rho(f(z)) = 0\}$  nu are puncte interioare.

Să presupunem acum că algebra Banach  $X$  are element unitate și deci, pentru orice element putem considera spectrul său. Dacă  $f: D \rightarrow X$  este o funcție olomorfă, atunci putem considera funcția

$$z \rightarrow \theta(z) = \sup_{\xi \in \sigma(f(z))} \operatorname{Re} \xi.$$

Are loc :

**TEOREMA 10.3.6.** Funcția  $\theta$  este subarmonică.

*Demonstrație.* Dacă  $f(z)$  este o funcție olomorfă, evident că și

$$z \rightarrow e^{f(z)}$$

este tot o funcție olomorfă și evident, din „spectral mapping theorem”, avem

$$\sigma(e^{f(z)}) = e^{\sigma(f(z))},$$

de unde rezultă că

$$\rho(e^{f(z)}) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} |e^\xi| = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} e^{\operatorname{Re} \xi} = e^{\max_{\xi \in \sigma(f(z))} \operatorname{Re} \xi} = e^{\theta(z)}.$$

De aici rezultă că funcția

$$\theta(f(z)) = \log \rho(e^{f(z)})$$

este o funcție subarmonică în  $D$ . Teorema este astfel demonstrată.

Din această teoremă deducem și următorul rezultat, sub forma :

**TEOREMA 10.3.7.** : Fie  $\lambda : C \rightarrow R$  o aplicație  $R$ -liniară pe  $C$  și pentru orice  $f : D \rightarrow X$ ,  $X$  algebră Banach, olomorfă în  $D$  atunci

$$\bar{\lambda}(f(z)) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \lambda(\xi)$$

este o funcție subarmonică în  $D$ .

*Demonstrație.* Faptul că  $\lambda$  este o funcție  $R$ -liniară înseamnă că există  $a$  și  $b$  numere reale astfel ca

$$\lambda(\xi) = a \operatorname{Re} \xi + b \operatorname{Im} \xi$$

adică

$$\lambda(\xi) = \operatorname{Re}(\alpha \xi) \text{ cu } \alpha = a - ib.$$

Deducem că

$$\bar{\lambda}(f(z)) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \operatorname{Re}(\alpha \xi) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \operatorname{Re} \xi = \max_{\xi \in \sigma(\alpha f(z))} \operatorname{Re}(\xi)$$

și aplicând teorema 10.3.6, rezultă teorema 10.3.7.

Din teoremele de mai sus se pot obține unele teoreme de maximum privind funcția  $\rho(f(z))$  în cazul când  $X$  este o algebră Banach cu element unitate notat cu  $e$ . Are loc :

**TEOREMA 10.3.8.** Dacă  $\rho(f)$  este egală cu o constantă  $c$  pe  $D$ , atunci intersecția  $\sigma(\sigma(f(z)))$  cu circumferința cercului de centru zero și rază  $c$  este independentă de  $c$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că  $c > 0$  și fie  $S$  circumferința cercului de rază  $c$  cu centrul în origine. În acest caz pentru  $z \in D$ , avem

$$\sigma(f(z)) \cap S \neq \emptyset$$

și fie  $\xi_0 \in \sigma(f(z_0)) \cap S$ , unde  $z_0 \in D$ . În acest caz pentru  $z \in D$ , avem

$$\sigma(f(z) + \xi_0 e) = \sigma(f(z)) + \xi_0.$$

Cum pentru orice  $z \in D$ ,  $\sigma(f(z))$  este conținut în cercul de rază  $c$  și centrul în origine, rezultă că  $\sigma(f(z) + \xi_0 e)$  este conținut în cercul închis cu centrul  $\xi_0$  și rază  $c$ , de unde rezultă că

$$\rho(f(z) + \xi_0 e) \leq |\xi_0| + c = 2c$$

oricare ar fi  $z \in D$  și de asemenea  $\rho(f(z_0) + \xi_0 e) = 2|\xi_0| = 2c$ , adică  $\rho(f(z) + \xi_0 e) = 2c$ , ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă pentru orice  $z \in D$ ,  $\xi_0 \in \sigma(f(z) + \xi_0 e)$  adică  $\xi_0 \in \sigma(f(z))$  pentru orice  $z \in D$  și teorema este demonstrată.

Fie  $X$  un spațiu Banach complex și  $\mathcal{L}(X)$  algebra Banach a tuturor operatorilor liniari și mărginiți pe  $X$ , iar

$$T(z) : z \rightarrow T(z) \in \mathcal{L}(X)$$

este o contrație ( $\|T(z)\| \leq 1$ ) și olomorfă în  $D = \{z, |z| < 1\}$ . Are loc :

**TEOREMA 10.3.9.** Dacă  $\xi_0, |\xi_0| = 1$  este în  $\sigma(T(z_0))$  cu  $z_0$  în  $D$  atunci  $\xi_0 \in \sigma(T(z))$ , oricare ar fi  $z \in D$ ; dacă  $I + T(z_0)$  este un element invertibil pentru  $z_0 \in D$ , atunci este invertibil pentru orice  $z \in D$ .

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema 10.3.8.

Teorema următoare reprezintă analogul real al teoremei 10.3.8.

**TEOREMA 10.3.10.** Dacă  $f : D \rightarrow X$ , unde  $X$  este o algebră Banach cu element unitate, atunci când  $\theta(f(z))$  este constantă pe  $D$ , constanta fiind  $a$ , atunci intersecția mulțimii  $\sigma(f(z))$  cu dreapta

$$L = \{\xi, \operatorname{Re} \xi = a\}$$

este independentă de  $z \in D$ .

*Demonstrație.* Fie  $t$  un număr real și cum  $\sigma(tf(z)) = t \sigma(f(z))$  deducem că

$$t_a = t \theta(f(z)) = \theta(t(f(z))) = \log \rho(e^{tf(z)}).$$

Din teorema de mai înainte rezultă că intersecția mulțimii  $\sigma(e^{tf(z)})$  cu circumferința de centru 0 și rază  $e^a$  este independentă de  $z \in D$ . Însă, aplicația  $\xi \rightarrow e^\xi$  transformă dreapta  $tL$  în circumferința de centru 0 și rază  $e^{at}$ . Dacă  $\xi = a + i\theta$  cu  $\theta \in \mathbb{R}$  este în  $\sigma(f(z_0))$  cu  $z_0 \in D$ , atunci  $t\xi \in \sigma(tf(z_0))$ . Deci, pentru orice  $z_1 \in D$  există un întreg  $n(t)$  astfel ca  $t\xi + i2\pi n(t) \in \sigma(tf(z_1))$ , adică

$$\xi + \frac{i2\pi n(t)}{t} \in \sigma(f(z_1)).$$

Dacă  $\xi \in \sigma(f(z_1))$  atunci  $n(t) \neq 0$  oricare ar fi  $t > 0$  și deci

$$\frac{|2\pi n(t)|}{t} \geq \frac{2\pi}{t} \rightarrow \infty,$$

dacă  $t \rightarrow 0^+$ , care este absurd, deoarece  $\sigma(f(z_1))$  este o mulțime mărginită.

În mod asemănător se poate demonstra și :

**TEOREMA 10.3.11.** Dacă  $f : D \rightarrow X$  este olomorfă  $\lambda : C \rightarrow \mathbb{R}$  este o formă liniară pe  $C$  și dacă  $\bar{\lambda}(f) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \lambda(\xi)$  are maximul  $a$  într-un punct din  $D$ , atunci intersecția mulțimii  $\sigma(f(z))$  cu dreapta

$$\{\xi, \lambda(\xi) = a\}$$

este independentă de  $z \in D$ .

Pentru următoarele teoreme vom avea nevoie de unele rezultate preliminare pe care le vom da în teoremele 10.3.12 și 10.3.13.

**TEOREMA 10.3.12.** *Dacă  $u$  este o funcție convexă și nedescrescătoare pentru  $t \geq 0$  și este mărginită, atunci este în mod necesar constantă.*

*Demonstrație.* Putem presupune fără a restringe generalitatea că  $u(0) = 0$  și  $u$  fiind neconstantă și mărginită să punem  $c = \sup_{t \geq 0} u(t)$ . Pentru orice  $t_1 > 0$  cu proprietatea că  $u(t_1) > 0$  există  $t_2 > t_1$ , astfel ca

$$(*) \quad \frac{u(t_2)}{t_2} < \frac{u(t_1)}{t_1}$$

deoarece, dacă considerăm dreapta care trece prin  $(0, 0)$  și  $(t_1, u(t_1))$ , atunci aceasta taie dreapta  $u = c$  în punctul  $\left(\frac{ct_1}{u(t_1)}, c\right)$  și orice  $t_2 > \frac{ct_1}{u(t_1)}$  are proprietatea scrisă mai sus.

Cum  $u$  nu este presupusă constantă, putem alege  $t_1$  astfel ca  $0 < u(t_1) < c$  și cum  $u$  este o funcție convexă, pentru orice  $0 \leq s \leq 1$ , vom avea

$$u(st_2) = u((1-s)0 + st_2) \leq (1-s)u(0) + su(t_2) = su(t_2).$$

Pentru  $s = \frac{t_1}{t_2}$ , obținem

$$u(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2} u(t_2),$$

care contrazice relația (\*) și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 10.3.13.** *Fie  $u$  o funcție subarmonică pe  $C$ . Dacă  $u$  este mărginită pe  $C$  atunci este constantă.*

*Demonstrație.* Fie  $z_0 \in C$  arbitrar și  $r > 0$ , iar

$$J(z_0, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Cum  $u$  este presupusă subarmonică  $J(z_0, r)$  este o funcție convexă, nedescrescătoare de  $\log r$  și  $u$  fiind mărginită, rezultă că  $J(z_0, r)$  este mărginită. Deci,  $J(z_0, r)$  este constantă,  $J(z_0, r) = J_0$ . Vom avea

$$u(z_0) \leq J_0$$

și cum  $u$  este superior semicontinuă, pentru orice  $\varepsilon > 0$  mulțimea

$$A_\varepsilon = \{z, u(z) < u(z_0) + \varepsilon\}$$

este deschisă în  $C$ . Fie  $r > 0$  astfel ca  $z_0 + r e^{i\theta} \in A_\varepsilon$  oricare ar fi  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Cum avem

$$u(z_0 + r e^{i\theta}) \leq u(z_0) + \varepsilon$$

oricare ar fi  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , deducem că

$$J_0 \leq u(z_0) + \varepsilon$$

oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , de unde rezultă că  $u(z_0) = J_0$ , adică

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

oricare ar fi  $r > 0$ ; deci  $u$  este o funcție constantă. Teorema este demonstrată.

Din teoremele expuse rezultă imediat următoarea:

**TEOREMA 10.3.14.** Dacă  $f: C \rightarrow X$  este o funcție olomorfă astfel ca  $\rho(f)$  este mărginită pe  $C$ , este cu proprietatea că  $\rho(f)$  este constantă.

*Demonstrație.* Cum  $\rho(f)$  este subarmonică, afirmația rezultă din teorema 10.3.13. Să presupunem acum că  $X$  este o algebră Banach comutativă cu element unitate și să presupunem că  $X$  este semisimplă.

Faptul că  $X$  este o algebră Banach semisimplă înseamnă că radicalul său se reduce la  $\{0\}$ . Prin definiție radicalul este mulțimea elementelor  $\{x, \lim \|x^n\|^{1/n} = 0\}$ .

Are loc:

**TEOREMA 10.3.15.** Fie  $f: C \rightarrow X$  o funcție olomorfă a lui  $C$  cu valori în  $X$  și

$$\rho(f(z)) = \sigma(|z|^N)$$

cu  $N$  un întreg  $\geq 0$ . În acest caz  $f$  are forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N.$$

*Demonstrație.* Faptul că  $\rho(f(z)) = \sigma(|z|^N)$  înseamnă că există constanta  $c > 0$  astfel ca  $\rho(f(z)) \leq c|z|^N$  oricare ar fi  $z \in C$ .

Fie  $m$  o funcțională multiplicativă a lui  $X$  și în acest caz  $m(f(z))$  este o funcție întreagă, iar cum  $m(f(z)) \in \sigma(f(z))$ , deducem că

$$|m(f(z))| \leq \rho(f(z)) \leq c|z|^N,$$

oricare ar fi  $z \in C$ . Rezultă, conform unei teoreme cunoscute din teoria funcțiilor că,  $m(f(z))$  este un polinom de grad cel mult  $N$ .

Fie

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N + \dots$$

și cum  $m \in X^*$ , avem

$$m(f(z)) = m(a_0) + m(a_1)z + \dots + m(a_N)z^N,$$

unde rezultă, în virtutea celor de mai înainte că

$$m(a_{N+1}) = m(a_{N+2}) = \dots = 0$$

și cum  $m$  este arbitrar, iar  $X$  este semisimplă, deducem că are loc relația

$$a_{N+1} = a_{N+2} = \dots = 0$$

și teorema este demonstrată.

De asemenea are loc și:

**TEOREMA 10.3.16.** *Dacă  $f: D \rightarrow X$  cu  $X$  o algebră Banach comutativă semisimplă și cu element unitate, iar  $\theta(f(z)) = \theta(|z|^N)$  cu  $N \geq 0$ , atunci  $f$  are forma*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N.$$

Pentru demonstrație vom avea nevoie de următorul rezultat al lui A. M. Gleason.

**TEOREMA 10.3.17.** *Dacă  $g$  este o funcție întreagă cu proprietatea că*

$$\operatorname{Re} g(z) = \theta(|z|^N)$$

*atunci  $g$  este un polinom de grad  $\leq N$ .*

*Demonstrație.* Putem presupune  $g(0) = 0$  și fie  $g(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ . În acest caz  $\operatorname{Re} g(re^{i\theta}) = \sum_1^\infty r^n (\operatorname{Re} a_n \cos n\theta - \operatorname{Im} a_n \sin n\theta)$ , de unde obținem că

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{i\theta}) \cos k\theta \, d\theta = r^k \operatorname{Re} a_k$$

și

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta = r^k \operatorname{Im} a_k$$

oricare ar fi  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Vom avea că

$$\pm \operatorname{Re} a_k \leq \frac{2M}{r^{N-k}}$$

și

$$\pm \operatorname{Im} a_k \leq \frac{2M}{r^{N-k}},$$

deoarece  $g(re^{i\theta}) \leq M r^N$  și  $0 \leq 1 \pm \cos k\theta \leq 2$ ,  $0 \leq 1 \pm \sin k\theta \leq 2$ . Pentru  $r \rightarrow \infty$  obținem afirmația teoremei.

Acum putem da demonstrația teoremei 10.3.16. În adevăr, din ipoteză rezultă că există  $c > 0$  astfel de

$$\theta(f(z)) \leq c |z|^N$$

și cum, prin definiție

$$\theta(f(z)) = \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \operatorname{Re} \xi$$

deducem că pentru orice funcțională liniară și multiplicativă  $m$  pe  $X$ , avem

$$\operatorname{Re} m(f(z)) \leq \theta(f(z)) \leq c |z|^N$$

și deci  $m(f(z))$  este un polinom de grad cel mult  $N$ . Dacă

$$f(z) = a_0 + \dots + a_N z^N + a_{N+1} z^{N+1} + \dots$$

deducem că pentru orice  $p \geq N+1$  avem  $m(ap) = 0$  și cum  $X$  este semisimplă, rezultă că  $ap = 0$ . Teorema este demonstrată.

Următorul exemplu arată că ipoteza privind semisimplicitatea algebrei  $X$  este necesară în teoremele de mai sus.

Fie  $X$  o algebră care are un element nilpotent generalizat diferit de zero, să spunem  $x_0$  și să considerăm aplicația

$$f(z) = z x_0$$

care este olomorfă, neconstantă și  $\rho(f(z)) = 0$  oricare ar fi  $z \in C$ .

Vom da acum câteva teoreme de maxim pentru spectru; este vorba în fapt despre principiul maximului pentru funcții cu valori mulțimi și se definește în mod natural astfel:  $g$  cu valori mulțimi își atinge maximul în  $z_0 \in D$  dacă  $g(z) \subset g(z_0)$  oricare ar fi  $z \in D$ . Apare astfel natural să considerăm funcții cu valori mulțimi, atașate unei funcții olomorfe definite pe  $D$  cu valori în  $X$ .

Fie  $X$  o algebră Banach și  $f: D \rightarrow X$  o funcție olomorfă. Vom demonstra mai întâi:

**TEOREMA 10.3.18.** *Dacă există  $\xi_0 \in \sigma(f(z))$  oricare ar fi  $z \in D$  și  $c = \inf_{\xi \in \sigma(f(z))} |\xi_0 - \xi| = |\xi_0 - z_0|$ , atunci intersecția mulțimii  $\sigma(f(z))$  cu circumferința de centru  $\xi_0$  și rază  $c$  este independentă de  $z \in D$ .*

Vom observa mai întâi că  $c > 0$  și că dacă  $S(\xi_0, c)$  fiind circumferința de centru  $\xi_0$  și rază  $c$ , atunci avem

$$S(\xi_0, c) \cap \sigma(f(z_0)) \neq \emptyset.$$

Să considerăm funcția olomorfă în  $C - \{\xi_0\}$  cu valori complexe definită prin

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi - \xi_0}.$$

Cum  $\xi_0 \in \sigma(f(z))$ , atunci  $(f(z) - \xi_0 e)^{-1} \in X$  oricare ar fi  $z \in D$  și din „spectral mapping theorem” avem că

$$\sigma((f(z) - \xi_0 e)^{-1}) = g(f(z))$$

oricare ar fi  $z \in D$ . Raza spectrală este

$$\begin{aligned} \rho((f(z) - \xi_0 e)^{-1}) &= \max_{\xi \in \sigma((f(z) - \xi_0 e)^{-1})} |\xi| = \\ &= \max_{\xi \in \sigma(f(z))} \frac{1}{|\xi - \xi_0|} = \\ &= \frac{1}{\min_{\xi \in \sigma(f(z))} |\xi - \xi_0|} = \frac{1}{\text{distanța}(\xi_0, \sigma(f(z)))} = \frac{1}{d(\xi_0, \sigma(f(z)))}. \end{aligned}$$

Cum însă  $d(\xi_0, \sigma(f(z))) \geq d(\xi_0, \sigma(f(z_0))) = c$  deducem că

$$\begin{aligned} \rho((f(z) - \xi_0 e)^{-1}) &= \frac{1}{d(\xi_0, \sigma(f(z)))} \leq \frac{1}{d(\xi_0, \sigma(f(z_0)))} = \\ &= \rho((f(z_0) - \xi_0 e)^{-1}) = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

și  $\rho((f(z) - \xi_0 e)^{-1}) = \frac{1}{c}$  oricare ar fi  $z \in D$ , deci

$$\sigma((f(z) - \xi_0 e)^{-1}) \cap S\left(0, \frac{1}{c}\right)$$

este independentă de  $z \in D$ , astfel că  $\sigma(f(z)) \cap S(\xi_0, c)$  este constantă și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă poate fi considerată ca o teoremă de maxim pentru spectrul elementelor unei algebre Banach.

**TEOREMA 10.3.19.** Fie  $f$  ca în teorema 10.3.18. și să presupunem că  $\sigma(f(z))$  își atinge maximum în punctul  $z_0 \in D$ ; în acest caz frontiera  $\partial\sigma(f(z_0))$  aparține frontierei  $\partial\sigma(f(z))$  oricare ar fi  $z \in D$ .

*Demonstrație.* Fie  $\xi_1 \in \partial\sigma(f(z_0))$  și trebuie să arătăm că  $\xi_1 \in \partial\sigma(f(z))$  oricare ar fi  $z \in D$ . Să presupunem că nu este așa. Deci, există  $z_1 \in D$  astfel ca  $\xi_1 \in \partial\sigma(f(z_1))$  și cum  $\sigma(f(z_1))$  este o mulțime închisă, există  $\varepsilon > 0$  astfel ca ceroul cu centrul în  $\xi_1$  și rază  $\varepsilon$ ,  $V(\xi_1, \varepsilon)$  să fie disjunct de  $\sigma(f(z_1))$ . Însă  $\xi_1 \in \partial\sigma(f(z_0))$  și deci există  $\xi_0$  în  $C \setminus \sigma(f(z_0)) \cap V(\xi_1, \varepsilon/2)$ , de unde deducem că pentru orice  $z \in D$  avem

$$d(\xi_0, \sigma(f(z))) \geq d(\xi_0, \sigma(f(z_0))) \geq |\xi_0 - \xi_1| < \varepsilon/3.$$

Dar

$$d(\xi_0, \sigma(f(z_0))) > \frac{2}{3} \varepsilon$$

și am obținut o contradicție. Teorema este demonstrată.

Fie  $f: D \rightarrow X$  olomorfă și  $X$  algebră Banach cu element unitate. Pentru orice  $z \in D$  să considerăm mulțimea  $\sigma(f(z))$ . Este cunoscut că aplicația

$$z \rightarrow \sigma(f(z))$$

este superior semicontinuă, în sensul că pentru orice mulțime deschisă  $V \supset \sigma(f(z_0))$  există o vecinătate a lui  $z_0$  astfel ca  $z \in V_{z_0}$  să implice

$$f(z) \subset V.$$

O problemă importantă este dacă pentru aplicația  $z \rightarrow \sigma(f(z))$  are loc un principiu de maxim. Dăm un exemplu care arată că problema are un răspuns negativ.

Să considerăm următoarea algebră Banach comutativă cu element unitate:  $l^\infty$  formată din toate șirurile mărginite și cu înmulțirea dată pe coordonate

$$\left. \begin{array}{l} x = (x_i) \\ y = (y_i) \end{array} \right\} \Rightarrow xy = (x_i y_i)$$

iar norma

$$x \rightarrow \|x\| = \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i|.$$

Este evident că unitatea este  $e = (1, 1, \dots)$ . De asemenea este ușor de văzut că un element este invertibil dacă și numai dacă  $\inf |x_i| \geq \varepsilon > 0$  cu  $x = (x_i)$ .

Este de asemenea ușor de văzut că spectrul fiecărui element  $x \in l^\infty$  este egal cu închiderea mulțimii  $\{x_i\}$ .

Să luăm un element

$$a = (a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \dots, 0, a_{2n}, 0, \dots)$$

astfel ca

$$\sigma(a) = \{\zeta, |\zeta| \in [1/3, 1]\}$$

și fie de asemenea  $b$  un element de forma

$$b = (0, b_1, 0, b_3, \dots, 0, b_{2n+1}, 0, b_{2n+3}, \dots)$$

astfel ca

$$\sigma(b) = \{\xi, |\xi| \in [0, 2/3]\}.$$

Să definim funcția  $f: C \rightarrow l^\infty$ , olomorfă astfel

$$f(z) = a + zb$$

și fie  $\bar{D} = \{z, |z| \leq 1\}$ .

Vom arăta acum că în anumite cazuri particulare au loc anumite teoreme de maximum pentru spectru.

Are loc :

**TEOREMA 10.3.20.** *Dacă  $f: D \rightarrow X$  este olomorfă, iar  $\sigma(f(z))$  își atinge maximul în punctul  $z_0 \in D$  și dacă  $\sigma(f(z_0))$  nu are puncte interioare, atunci  $\sigma(f(z))$  este constantă pe  $D$ .*

*Demonstrație.* Rezultă imediat din teorema 10.3.19.

Pentru teorema următoare vom avea nevoie de un rezultat privind unele mulțimi dintr-un spațiu topologic.

Fie  $S$  un spațiu topologic, iar  $E, F$  două submulțimi închise din  $S$  și  $\partial E, \partial F$  frontierele lor. Dacă  $E \subset F$  și  $\partial F \subset \partial E$  atunci  $F$  este o reuniune formată din mulțimea  $E$  și o anumită componentă conexă a mulțimii  $S - E$ .

Pentru demonstrație, să notăm cu  $B$  o componentă conexă a mulțimii  $S - E$  și să arătăm că dacă  $F \cap B \neq \emptyset$ , atunci  $B \subset F$ .

Fie, pentru aceasta  $a$  un punct al frontierei mulțimii  $F \cap B$  care este în  $B$ , iar  $V_0$  vecinătate a lui  $a$  în  $S$ . Mulțimea  $V \cap B$  nu este disjunctă de cel puțin una din mulțimile  $F \cap B$  și  $C_{F \cap B}$ , de unde rezultă că  $V$  nu este disjunctă de  $F$  și  $S - F$ , de unde rezultă că  $a \in F$  adică  $\partial F \cap B$  ca submulțime a lui  $B$  este în  $\partial F$ . Cum  $a \in \partial F$  rezultă că  $a \in \partial E$ , adică  $a \in E$  și avem o contradicție, de unde  $\partial F \cap B = \emptyset$  (ca submulțime în  $B$ ). Deci  $F \cap B$  este deschisă în  $B$  și cum  $F$  este închisă în  $S$ , rezultă că  $F \cap B$  este închisă în  $B$  cu topologia indusă. Rezultă că  $B$  este conexă și  $F \cap B = B$ , adică  $B \subset F$  și afirmația este demonstrată.

**TEOREMA 10.3.21.** *Dacă  $z \rightarrow f(z)$  își atinge maximul în punctul  $z_0 \in D$  atunci pentru orice  $z \in D$ ,  $\sigma(f(z_0))$  este reuniune dintre  $\sigma(f(z))$  și o componentă conexă a mulțimii  $C - \sigma(f(z))$ .*

*Demonstrație.* Rezultă din teorema 10.3.19. și observația de mai sus.

Următoarea teoremă dă informații privind valorile unei funcții olomorfe.

**TEOREMA 10.3.22.** *Dacă  $f: D \rightarrow X$  este olomorfă cu valori în algebra Banach comutativă  $X$  cu element unitate și pentru un  $z_0 \in D$ ,  $\sigma(f(z_0)) = \sigma(f(z))$  oricare ar fi  $z \in D$ , iar  $\sigma(f(z_0))$  nu are puncte interioare, atunci elementul  $f(z) - f(z_0)$  este nilpotent generalizat.*

*Demonstrație.* Fie  $m$  o funcțională liniară și multiplicativă pe  $X$  și să considerăm aplicația

$$z \rightarrow m(f(z))$$

care este olomorfă și deci este sau deschisă sau constantă. Cum

$$m(f(z)) \subset \sigma(f(z))$$

rezultă că  $m(f(z))$  este constantă și deci  $m[(f(z)) - f(z_0)] = 0$  oricare ar fi  $m$ . Deci  $f(z) - f(z_0)$  este un element nilpotent generalizat.

*Observație.* Mulțimea elementelor nilpotente ale unei algebre se mai numește radical și deci rezultatul teoremei de mai sus arată că elementul  $f(z) - f(z_0)$  este în radical.

Din această teoremă rezultă imediat și următorul rezultat :

**TEOREMA 10.3.23.** *Dacă  $f: D \rightarrow X$  este olomorfă,  $X$  este o algebră Banach comutativă cu element unitate, semisimplă și dacă  $\sigma(f(z))$  este constant pe  $D$  atunci  $f$  este constantă pe  $D$ .*

Dacă  $X$  este o algebră Banach cu element unitate și  $\sigma(x)$  este spectrul elementului  $x \in X$  atunci putem considera mulțimea  $\text{conv } \sigma(x) =$  cea mai mică mulțime convexă care conține mulțimea  $\sigma(x)$ .

Să presupunem că  $f: D \rightarrow X$  este olomorfă și să definim funcția

$$z \rightarrow \text{conv } \sigma(f(z)) = \tilde{f}(z).$$

Are loc :

**TEOREMA 10.3.24.** *Dacă există  $z_0 \in D$  astfel ca  $\tilde{f}(z)$  își atinge maximum în acest punct atunci  $f$  este constantă.*

*Demonstrație.* Teorema rezultă din observația că mulțimea  $C - \tilde{f}(z)$  este conexă și din următoarea : pentru orice  $z$ , avem

$$\partial \tilde{f}(z_0) \subset \partial \tilde{f}(z).$$

Fie  $\xi_0 \in \partial \tilde{f}(z_0)$  și  $l_0$  funcție liniară suport pentru mulțimea convexă  $\tilde{f}(z_0)$ . Cum  $\xi_0 \in \text{conv } \sigma(f(z_0))$  orice funcție liniară suport nu este disjunctă de  $\sigma(f(z_0))$ , iar  $l_0 \cap \sigma(f(z_0))$  conține cel puțin două puncte situate de o parte și de alta a lui  $\xi_0$ . Fie  $\tilde{\lambda}$  o formă reală liniară pe  $C$  și  $a$  o constantă astfel ca

$$1. \quad \tilde{\lambda} = a \quad \text{pe} \quad l_0,$$

$$2. \quad \tilde{\lambda}(\xi) \leq a \quad \xi \in \tilde{f}(z_0).$$

Cum  $l_0 \cap \sigma(f(z_0))$  este independentă de  $z$  dacă  $\xi_0 \in \sigma(f(z_0))$ , atunci  $\xi_0 \in \sigma(f(z))$  oricare ar fi  $z \in D$ . Dacă  $\xi_0 \notin \sigma(f(z_0))$  există un interval închis pe  $l_0$  care conține pe  $\xi_0$ , inclus în  $\tilde{f}(z)$  oricare ar fi  $z \in D$ . Deci, în orice caz  $\xi_0 \in \tilde{f}(z)$  și  $\xi_0 \in \partial \tilde{f}(z)$  oricare ar fi  $z \in D$  adică teorema este demonstrată.

## SPAȚII HILBERT CUATERNIONICE

## § 1. INTRODUCERE

În ultimii ani a crescut interesul în jurul problemelor în care intervin cuaternionii și aceasta se datorează în special fizicienilor. Astfel s-a studiat posibilitatea unei mecanici cuantice cuaternionice de către D. Finkelstein, J. M. J. Jauch, S. Schiminovich și D. Speiser. Scopul nostru în acest capitol este de a expune elemente de teoria spațiilor Hilbert cuaternionice. De asemenea vom menționa unele probleme care credem că sînt interesante.

## § 2. CORPUL NECOMUTATIV AL CUATERNIONILOR

Să presupunem că avem inelul  $A$  care are ca grup aditiv un spațiu vectorial  $V$  peste corpul  $K$  și înmulțirea din  $A$  este legată de înmulțirea cu elemente din  $K$  prin relația

$$k(a_1, a_2) = a_1(ka_2) = (ka_1)a_2.$$

Vom spune că inelul  $A$  este o algebră peste corpul  $K$ . Dacă spațiul  $V$  este de dimensiune finită vom spune că dimensiunea reprezintă rangul algebrei  $A$ . Dacă inelul  $A$  este corp vom spune că avem o algebră cu diviziune.

Un exemplu în acest sens este corpul numerelor complexe care, este o algebră cu diviziune de rang 2 peste corpul numerelor reale.

Vom da un exemplu foarte important de algebră de rang 4 peste corpul numerelor reale, numită și algebra cuaternionilor. Această algebră a fost considerată pentru prima dată de matematicianul irlandez Hamilton.

Vom considera algebra  $Q$  în care avem elementele bazei  $\{1, i, j, k\}$  și deci, orice element din  $Q$  se scrie unic sub forma

$$a + bi + cj + dk$$

cu  $a, b, c, d$  numere reale, iar 1 va fi elementul unitate al algebrei. Tabela de înmulțire a elementelor bazei este dată de

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Algebra  $Q$  este o algebră asociativă. În adevăr, pentru a verifica această afirmație este suficient să o verificăm pe elementele bazei. În acest caz avem

$$(ii)i = i(ii), \quad (ii)j = i(ij), \quad (ij)i = i(ji),$$

$$(ji)i = j(ii), \quad (ij)k = i(jk)$$

și afirmația este verificată.

Să arătăm acum că este o algebră cu diviziune. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că orice element  $\alpha \in Q$  neidentic nul are invers.

Fie  $\alpha = a + bi + cj + dk$  și să definim „conjugatul” său  $\bar{\alpha}$  prin

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk,$$

iar „norma” elementului  $\alpha$  prin

$$\|\alpha\|^2 = \alpha\bar{\alpha}.$$

Se poate verifica ușor că  $\alpha \neq 0$  dacă și numai dacă  $\|\alpha\| \neq 0$ . Aplicația

$$\alpha \rightarrow \|\alpha\|$$

este o normă pe  $Q$ . Dacă  $\alpha \neq 0$  atunci un calcul arată că

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{\|\alpha\|}$$

este inversul elementului  $\alpha$ . În acest mod am demonstrat că avem o algebră cu diviziune.

Vom reaminti fără demonstrație o teoremă importantă a lui Frobenius care arată rolul special și important al corpurilor numerelor reale, al corpului numerelor complexe și corpul cuaternionilor: cele trei corpuri amintite sînt singurele algebre cu diviziune de rang finit peste corpul numerelor reale.

### § 3. SPAȚII HILBERT CUATERNIONICE

Este cunoscut că spațiile Hilbert au fost caracterizate de către Jordan și von Neumann ca fiind spații Banach în care norma

$$x \rightarrow \|x\|$$

satisface identitatea paralelogramului

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}.$$

Vom introduce noțiunea de spațiu vectorial cuaternionic cu produs scalar (cu valori în corpul  $Q$  al cuaternionilor).

Fie  $V$  un spațiu vectorial (la stînga) peste corpul  $Q$ . Prin produs scalar pe  $V$ , vom înțelege o aplicație a spațiului  $V \times V$  în  $Q$ , cu următoarele proprietăți :

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
2.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ,
3.  $\langle x, \alpha z_1 + \beta z_2 \rangle = \langle x, z_1 \rangle \bar{\alpha} + \langle x, z_2 \rangle \bar{\beta}$ ,
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  și  $\langle x, x \rangle = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .

Dacă  $\{V, \langle, \rangle\}$  este un spațiu vectorial cuaternionic cu produsul scalar, atunci se verifică ușor că aplicația

$$x \rightarrow \langle x, x \rangle^{1/2}$$

este o normă.

Are loc următoarea teoremă a lui M. Stone și H. Rubin :

**TEOREMA 11.3.1.** *Dacă  $V$  este un spațiu vectorial (stîng) peste corpul cuaternionilor  $Q$  și  $q : V \rightarrow Q$  este o funcție cu următoarele proprietăți :*

$$1. \quad q \geq 0 \quad q(x+y) + q(x-y) = 2\{q(x) + q(y)\},$$

$$2. \quad \text{pentru fiecare } x \in V \text{ funcția}$$

$$t \rightarrow q(tx)$$

cu  $t$  real, este mărginită într-o vecinătate a originii,

$$3. \quad q(x) = q(ix) = q(jx) = q(kx); \text{ oricare ar fi } x \in V,$$

$$4. \quad q(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

atunci funcția  $\langle, \rangle_q$  definită pe  $V \times V$  prin

$$q(x+y) - q(x-y) = 4p(x, y),$$

$$\langle x, y \rangle = p(x, y) + ip(x, iy) + jq(x, jy) + k(x, ky)$$

este un produs scalar pe  $V$ .

*Demonstrație.* Să arătăm mai întii că  $\langle, \rangle$  este liniar în primul argument.

Vom avea

$$q((x+x') + y) = q((x+y/2) + (x'+y/2)) = 2q(x+y/2) + 2q(x'+y/2) -$$

$$- q((x+y/2) - (x'+y/2)) = 2q(x+y/2) + 2q(x'+y/2) - q(x-x')$$

și în mod similar

$$q((x+x') - y) = 2q(x-y/2) + 2q(x'-y/2) - q(x-x')$$

de unde obținem

$$q((x+x')+y) - q((x+x')-y) = 2[q(x+y/2) - q(x-y/2)] + 2[q(x'+y/2) - q(x'-y/2)].$$

Din definiția funcției  $p$ , deducem că

$$4p(x+x', y) = 8p(x, y/2) + 8p(x', y/2)$$

care ne dă că

$$2p(x, y/2) + 2p(x', y/2) = p(x+x', y)$$

și pentru  $x' = 0$  deducem că

$$2p(x, y/2) = p(x, y).$$

Cum avem relațiile

$$p(0, y) = 0$$

și

$$p(-x, y) = -p(x, y)$$

deducem că pentru orice număr rațional  $r$ , avem

$$p(rx, y) = rp(x, y).$$

Funcția  $\Phi(t) = p(tx, y)$  ca funcție de  $t$  este, conform ipotezei, mărginită într-o vecinătate a lui zero și cum satisface condiția

$$\Phi(t+s) = \Phi(t) + \Phi(s)$$

adică ecuația lui Cauchy, un rezultat clasic afirmă că trebuie să avem relația

$$\Phi(t) = t\Phi(1)$$

adică funcția  $p$  este liniară în raport cu corpul numerelor reale. De aici deducem că  $\langle, \rangle$  este liniar peste corpul numerelor reale.

Fie  $h = i, j$  sau  $k$  și să considerăm

$$4p(hx, y) = q(hx+y) - q(hx-y) = q(x-hy) - q(x+hy) = 4p(x, hy)$$

de unde obținem imediat că

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

și  $p(x, hx) = 0$ . De asemenea se poate arăta ușor că

$$\langle hx, y \rangle = h\langle x, y \rangle$$

unde  $h$  ca și mai sus este  $i, j$  sau  $k$  și, de aici, rezultă că produsul scalar  $\langle, \rangle$  este liniar în prima variabilă.

Din  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  se deduce proprietatea corespunzătoare pentru cel de al doilea argument.

Teorema este demonstrată.

TEOREMA 11.3.2. Dacă  $x, y \in V$  are loc inegalitatea lui Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Demonstrație.* Pentru  $\alpha, \beta$  cuaternioni arbitrari și  $x, y$  elemente arbitrare vom avea

$$\langle (\alpha x + \beta y), (\alpha x + \beta y) \rangle \geq 0$$

care ne dă că

$$\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \bar{\alpha} \beta \langle y, x \rangle + \beta \bar{\beta} \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Dacă  $\langle x, x \rangle = 0$  sau  $\langle y, y \rangle = 0$ , atunci este evident că inegalitatea lui Schwarz este adevărată. Presupunem deci că  $\langle x, x \rangle > 0$  și fie  $\alpha = -\langle x, y \rangle$ ,  $\beta = \langle x, x \rangle$ , de unde obținem:

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle + \\ + \langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

sau că

$$\langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle \geq |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle.$$

Cum  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , vom avea

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

adică o inegalitate echivalentă cu inegalitatea lui Schwarz.

COBOLAR 11.3.3. *Aplicația*

$$x \rightarrow \langle x, x \rangle^{1/2}$$

este o normă.

*Demonstrație.* Exact ca în cazul spațiilor Hilbert complexe.

Este ușor de văzut că se pot introduce în teoria spațiilor Hilbert cuaternionice noțiunile corespunzătoare de la spații Hilbert complexe. În cele ce urmează vom presupune că acest lucru a fost făcut. Vom da explicații numai în cazul când trecerea la corpul cuaternionilor  $Q$ , nu este standard.

#### § 4. SPAȚII BANACH CUATERNIONICE

Prin definiție un spațiu vectorial (stîng) peste corpul  $Q$  este un spațiu Banach cuaternionic dacă există o aplicație

$$x \rightarrow \|x\|$$

a spațiului cu valori în  $R_+$  avînd proprietățile normei :

1.  $\|x\| \geq 0$  și  $= 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ ,
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
3.  $\|qx\| = |q| \|x\|$ ,

unde  $q \in Q$  și  $|q|$  este norma lui  $q$ .

Un exemplu simplu de spațiu Banach cuaternionic care nu este spațiu Hilbert cuaternionic este următorul : fie  $X$  un spațiu compact și  $C_Q(X)$  spațiul funcțiilor continue cu valori cuaternioni, în care

$$\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

Dacă punem

$$f^*(t) = \overline{f(t)}$$

atunci aplicația

$$f \rightarrow f^*$$

definită pe  $C_Q(X)$  este o involuție și cu această involuție  $C_Q(X)$  este o algebră \*-reală.

Menționăm că pe spații Banach cuaternionice este adevărată o teoremă de tip Hahn de prelungire. Aceasta a fost dată de către Sukhomlinov în 1938.

## § 5. OPERATORI PE SPAȚII HILBERT CUATERNIONICE

Fie  $H_Q$  un spațiu Hilbert cuaternionic ; vom nota cu  $\mathcal{L}_Q(H_Q)$  algebra tuturor aplicațiilor liniare și continue definite pe  $H_Q$  cu valori în  $H_Q$ . Se demonstrează că pentru orice  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  există  $T^* \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  astfel că oricare ar fi  $x, y \in H_Q$  să avem

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

și care se va numi adjunctul lui  $T$ .

Se poate verifica ușor că  $\mathcal{L}_Q(H_Q)$  cu involuția

$$T \rightarrow T^*$$

este o algebră Banach reală.

În adevăr, după cum este ușor de văzut pe spațiul  $\mathcal{L}_Q(H_Q)$  aplicația

$$T \rightarrow qT$$

este liniară dacă și numai dacă  $q$  este real.

În mod natural se introduce noțiunea de valoare proprie și de vector propriu pentru un element  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$ .

În cazul spațiilor Hilbert complexe este cunoscut și ușor de verificat că dacă  $\lambda_0$  este o valoare proprie cu vectorul propriu  $x_0$ , atunci  $\lambda_0^2$  este tot o valoare proprie și are ca vector propriu tot  $x_0$ . În cazul spațiilor Hilbert

cuaternionice această proprietate nu se mai păstrează. În adevăr, să considerăm  $\lambda_0 \in Q$  și  $x_0 \in H_Q$ , iar  $T$  un operator astfel ca

$$Tx_0 = \lambda_0 x_0.$$

Să luăm  $\mu_0 \in Q$ ,  $y_0 = \mu_0 x_0$  și vom obține

$$Ty_0 = \mu_0 \lambda_0 x_0 = \mu_0 \lambda_0 \mu_0^{-1} \mu_0 x_0 = \mu_0 \lambda_0 \mu_0^{-1} y_0,$$

care este diferit de  $\lambda_0 y_0$  în general. (Aici am folosit faptul că corpul  $Q$  este neocomutativ).

**DEFINIȚIA 11.5.1.** 1) Un operator  $H \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se spune că este hermitic dacă oricare ar fi  $x, y \in H_Q$  avem

$$\langle Hx, y \rangle = \langle x, Hy \rangle;$$

2) operatorul  $N \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se spune că este normal dacă  $NN^* = N^*N$ ;

3) operatorul  $U \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se spune că este unitar dacă pentru orice  $x, y \in H_Q$  are loc relația

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

și  $U$  este surjectiv.

Are loc :

**TEOREMA 11.5.2.** 1) Dacă  $\lambda \in Q$  este o valoare proprie pentru  $H$ ,  $H$  operator hermitic, atunci  $\lambda$  este real;

2) dacă  $\lambda \in Q$  este valoare proprie pentru  $N$ ,  $N$  normal, atunci  $\lambda$  este valoare proprie pentru  $N^*$ ;

3) dacă  $\lambda$  este valoare proprie pentru  $U$ ,  $U$  unitar, atunci

$$|\lambda| = 1.$$

4) dacă  $\lambda, \mu$  sînt valori proprii distincte pentru un operator în clasele considerate mai sus, atunci vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali.

Am văzut mai sus că, în general, valorile proprii nu sînt un invariant al operatorilor în sensul indicat de exemplul dat. Este necesar să considerăm vectorul propriu și să considerăm o clasă de valori proprii.

O clasă de cuaternioni este determinată de norma și partea reală a cuaternionilor, cu alte cuvinte, doi cuaternioni care au aceeași normă și aceeași parte reală sînt în aceeași clasă.

Este ușor de văzut că mulțimea  $Q$  se împarte în clase de echivalență.

**DEFINIȚIA 11.5.3.** Prin clasă de valori proprii pentru o valoare proprie vom înțelege clasa sa de echivalență definită în definiția 11.5.2.

**DEFINIȚIA 11.5.4.**  $\dim \{ \varphi, L\varphi = \lambda\varphi, \lambda \in \text{clasa lui } \lambda_0 \}$  se va numi indicele de degenerare al clasei lui  $\lambda_0$ .

Dacă avem un cuaternion  $q \in Q$ ,  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , unde  $q_i, i = 1, 2, 3, 0$ , sînt numere reale, îl putem scrie în mod unic sub forma  $q = q_0 + qi$  și  $q_0$  se numește partea reală, iar  $q$  partea imaginară (vectorială) a cuaternionului.

Vom considera acum unele clase de operatori pe spații Hilbert cuaternionice.

DEFINIȚIA 11.5.5. Un operator  $T$  se va numi haponormal dacă pentru orice  $x \in H_Q$  are loc relația

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\|.$$

DEFINIȚIA 11.5.6. Un operator  $T$  se va numi de clasă ( $N$ ) dacă pentru orice  $x \in H_Q$ ,  $\|x\| = 1$  are loc relația

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|.$$

DEFINIȚIA 11.5.7. Prin rang numeric al unui operator  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se înțelege mulțimea

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$$

și prin rază numerică a operatorului  $T$ , numărul

$$\omega(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

DEFINIȚIE 11.5.8. Un operator  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se numește normaloid dacă

$$\omega(T) = \|T\|,$$

unde

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|, \|x\| = 1\}.$$

Are loc :

TEOREMA 11.5.9. Orice operator de clasă ( $N$ ) este normaloid

Demonstrație. Fie  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$\lim \|Tx_n\| = 1$$

(vom presupune fără a restrânge generalitatea că  $\|T\| = 1$ ). Din definiția operatorilor de clasă ( $N$ ), rezultă că

$$\lim \|T^2x_n\| = 1$$

și deci  $\|T^2\| = 1$ . Să presupunem că pentru orice întreg  $k \leq m$ ,  $m$  un număr întreg, avem relația

$$\lim \|T^kx_n\| = 1$$

pe care o demonstrăm pentru  $m+1$ . În adevăr, cum avem relația

$$\|T^{m+1}x_n\| = \left\| T^2 \frac{T^{m-1}x_n}{\|T^{m-1}x_n\|} \right\| \|T^{m-1}x_n\| \geq \|T^m x_n\|^2 \frac{1}{\|T^{m-1}x_n\|}$$

deducem că

$$\lim \|T^{m+1}x_n\| = 1.$$

De aici este evident că  $\|T^m\| = 1$  oricare ar fi  $m$ , după cum putem arăta ușor utilizând inducția.

Rezultă astfel că raza spectrală, pe care o definim prin formula

$$\gamma_T = \lim \|T^n\|^{1/n}$$

este egală cu  $\|T\|$ . Să remarcăm și următorul fapt general. Spațiul  $H_Q$  poate fi considerat ca spațiu Hilbert complex și de asemenea orice operator pe  $H_Q$  devine un operator pe acest spațiu și după cum se poate verifica ușor normele se păstrează. De aici rezultă că

$$\gamma_{T_1} = \|T\|,$$

unde  $\gamma_{T_1}$  este raza spectrală a operatorului  $T$  considerat pe  $H_Q$ , ca spațiu complex. Dar atunci

$$\gamma_{T_1} \leq \omega(T) \leq \|T\|$$

și teorema este demonstrată.

Corolar 11.5.10. *Orice operator hermitic, normal sau hiponormal este normaloid.*

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că

$$\{\text{hermitic}\} \subset \{\text{normal}\} \subset \{\text{hiponormal}\}$$

și să arătăm că orice operator hiponormal este de clasă (N). În adevăr

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|$$

și afirmația este adevărată.

O problemă interesantă este următoarea: teorema lui Toeplitz-Hausdorff este adevărată pentru spații Hilbert cuaternionice, adică dacă pentru orice operator  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$ , mulțimea  $W(t)$  este convexă

## § 6. TEORIE SPECTRALĂ

Vom prezenta în cele ce urmează unele rezultate privind teoria spectrală în cazul spațiilor Hilbert cuaternionice. Mai înainte vom expune unele fapte privind considerarea spațiului Hilbert  $H_Q$  ca spațiu complex.

Deoarece corpul numerelor complexe  $C$  poate fi identificat ca un subcorp al corpului  $Q$ , spațiul  $H_Q$  poate fi considerat ca un spațiu vectorial complex în mod standard. Vom nota spațiul astfel considerat cu  $H^s$  și vom nota cu  $(x, y)$  partea complexă a produsului scalar  $\langle x, y \rangle$  (dacă avem un cuaternion  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , atunci partea complexă a sa este  $q_0 + q_1i$ ).

În acest caz avem relațiile:

$$1. \quad \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, ky \rangle k = (x, y) - k(kx, y);$$

$$2. \quad K: x \rightarrow kx \text{ are proprietatea că } K^2 = -I \text{ și } (Kx, Ky) = (x, y);$$

3. dacă  $\{e_i\}$  este o bază pentru  $H^s$ , atunci o bază pentru  $H_Q$  este dată de mulțimea  $\{e_i, Ke_i\}$ ,

4. dacă  $M$  este un subspațiu din  $H^s$ , iar  $P$  este proiecția ortogonală a lui  $H^s$  pe  $M$ , atunci  $KPK^{-1}$  este un proiector al spațiului  $H^s$  pe spațiul  $K_s = \{kx, x \in S\}$ .

Vom mai menționa faptul că orice operator  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  poate fi considerat ca operator pe  $H^s$  și așa cum am menționat și mai înainte normele se păstrează.

**DEFINIȚIA 11.6.1.** Un operator  $T \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$  se spune că este imaginar dacă există o bază  $\{e_r\}$  a spațiului  $H_Q$  astfel ca

$$Te_r = \begin{cases} ie_r \\ \text{sau} \\ 0 \end{cases} \quad (\forall)r$$

Următoarea teoremă caracterizează operatorii imaginari:

**TEOREMA 11.6.2.** Fie  $J \in \mathcal{L}_Q(H_Q)$ . Următoarele afirmații sînt echivalente:

- 1°  $J$  este imaginar,
- 2°  $J^* = -J$  și  $I - J^*J$  este proiector pe  $N(J) = \{x, Jx = 0\}$ ,
- 3°  $J$  este normal și  $-J^2$  este proiector,
- 4°  $J$  este normal și  $J^2 + J^4 = 0$ ,
- 5°  $J^s = iP - iKPK^{-1}$  cu  $P$  un proiector unic pe  $H^s$ .

*Demonstrație.* Dacă  $J$  este imaginar

$$J^*(e_r) = ie_{r-1} \quad (\forall)r$$

și deci 1°  $\Rightarrow$  2°. Dacă 2° are loc atunci este evident că  $J$  este un operator normal și cum  $I - J^*J = I + J^2$  este un proiector deducem că  $-J^2$  este proiector și deci 2°  $\Rightarrow$  3°. Dacă 3° are loc atunci avem

$$J^2 + J^4 = J^2(I + J^2)$$

și cum  $I + J^2$  este tot proiector, deducem că

$$J^2 + J^4 = 0$$

și deci 4° are loc.

Să presupunem că are loc 4° și să considerăm operatorul  $J^s$ , adică  $J$  pe spațiul Hilbert  $H^s$ . Este ușor de văzut că măsura spectrală atașată este concentrată în punctele  $\{\pm i\}$ . Cum  $Jx = ix$  dacă și numai dacă

$$J(kx) = -i(kx)$$

deducem că  $J$  are forma indicată și deci 5° are loc.

Fie acum 5° adevărată și  $\{e_r\}$  o bază a rangului operatorului  $P$  în spațiul  $H^s$  și deci  $\{e_r\}$  este o bază pentru  $P + KPK^{-1}$  în  $H_Q$ . Dacă  $\{f_s\}$  este o bază pentru  $N(J) = \{x, Jx = 0\}$  atunci  $\{e_r, f_s\}$  este o bază pentru  $H_Q$  astfel ca

$$Je_r = ie_r, \quad (\forall)r,$$

$$Jf_s = 0, \quad (\forall)s.$$

Teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 11.6.3. Prin măsură spectrală în  $\mathcal{E}_Q(H_Q)$  cu domeniul  $(M, B)$  vom înțelege un homomorfism  $E(\cdot)$  de la algebra booleană  $B$  formată cu submulțimi ale spațiului  $M$  cu valori într-o algebră booleană de proiectori uniform mărginiți astfel ca  $E(M) = I$ .

În cele ce urmează  $M$  va fi un spațiu Hausdorff local compact și  $B$  corpul mulțimilor boreliene ale lui  $M$  adică, cel mai mic corp care conține mulțimile închise (deschise) ale lui  $M$ . O măsură spectrală  $E$  se va numi numărabil aditivă dacă pentru orice  $x^*$ ,  $x \in H_Q$ , iar

$$\langle E(\cdot)x, x^* \rangle : B \rightarrow Q$$

este o funcție numărabil aditivă. Se poate arăta că, dacă  $M$  este un spațiu separabil, atunci orice măsură spectrală pe  $M$ ,  $M$  fiind un spațiu Hausdorff local compact este regulată și este de asemenea tare numărabil aditivă.

DEFINIȚIA 11.6.4. O funcție  $f : M \rightarrow Q$  măsurabilă se spune că este  $E$  esențial mărginită dacă este mărginită pe o mulțime  $\sigma \in B$  cu proprietatea că

$$E(\sigma) = I.$$

Două funcții esențial mărginite vor fi în aceeași clasă dacă sînt egale pe o mulțime  $\sigma_0$  cu proprietatea  $E(\sigma_0) = I$ .

Mulțimea claselor de echivalență formate cu funcții esențial mărginite o vom nota cu  $EB(E)$ . Dacă  $f \in EB(E)$  atunci

$$E\text{-ess sup } (f) = \inf_{E(\sigma)=I} \{\sup\{|f(m)|\}\}.$$

Dacă  $f$  este o funcție simplă din  $EB(E)$ , atunci integrala sa în raport cu măsura spectrală  $E(\cdot)$  se definește simplu : fie  $f = \sum \alpha_j \chi_{\sigma_j}$  și să punem

$$\int_M f E(ds) = \sum \alpha_j E(\sigma_j)$$

și dacă  $f$  este o funcție arbitrară în  $EB(E)$ , atunci există un șir de funcții simple  $\{f_n\}$  care converge în  $EB(E)$  către  $f$ . În acest caz putem pune

$$\int_M f E(ds) = \lim \int_M f_n E(ds),$$

unde  $\lim$  este în sens tare și se arată ușor că limita este independentă de șirul de aproximare ales.

Putem da acum teorema de descompunere spectrală pentru un operator hermitic.

Să presupunem că avem o măsură spectrală  $E(\cdot)$  și fie  $f$  reală din  $EB(E)$ , să punem

$$\langle x, y \rangle = \int_M f d \langle E(s)x, y \rangle,$$

care este o formă hermitică pe  $H_0$  și există un singur operator hermitic  $A$ , astfel ca

$$\langle A, x, y \rangle = \int_M f d \langle E(s)x, y \rangle$$

scriind acest lucru astfel  $A_f = \int_M f d E(s)$ . Demonstrația acestei teoreme se face cuvînt cu cuvînt ca în cazul spațiilor Hilbert complexe deoarece  $f$  este reală și  $M = R$  sau o parte a sa. Dacă  $f$  nu este reală integrala de mai sus nu mai are sens.

În [505] s-a considerat și o clasă de operatori care să reprezinte într-un anume sens o extensie a numărului „i” și anume clasa operatorilor antihermitieni, adică operatorii  $A$  pentru care are loc relația

$$A = -A^*.$$

Deoarece acest operator este normal, vom da mai departe reprezentarea sa spectrală.

## § 7. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ PENTRU OPERATORI NORMALI

Deoarece o integrală de tipul  $\int_M f d(E(.))$  nu are sens, este necesar să introducem alte noțiuni pentru a da o „descompunere spectrală” pentru operatori normali.

Noțiunea care ne va permite acest lucru este cea de „sistem spectral”.

**DEFINIȚIA 11.7.1.** Fie  $J$  un operator imaginar. Se spune că  $J$  este admisibil în raport cu măsura spectrală  $E(.)$  dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

1.  $J$  comută cu orice  $E(\sigma)$ ,  $\sigma \in B$ ,
2. există  $\sigma_0 \in B$  astfel ca  $I - J J^* = E(\sigma_0)$ .

Prin sistem spectral vom înțelege perechea  $(E, J)$ , unde  $E$  este o măsură spectrală și  $J$  este un operator imaginar admisibil în raport cu măsura spectrală  $E(.)$ .

Este ușor de văzut că  $\sigma_0$  este unică în sensul că oricare altă mulțime  $\bar{\sigma}_0$  cu aceeași proprietate diferă de  $\sigma_0$  cu mulțimi care au măsura spectrală nulă (valoarea este operatorul zero)

Fie  $EB(E)$  algebra funcțiilor esențial mărginite complexe și  $f$  un element în această algebră cu  $f = f_1 + if_2$ ,  $f_1$  și  $f_2$  reale. Să punem

$$\int_M f dE = \left( \int_M f_1 dE \right) + J \left( \int_M f_2 dE \right)$$

și aplicația

$$f \rightarrow \int_M f dE$$

are proprietățile obținute de la calculul funcțional în cazul spațiilor Hilbert complexe. Ca exemplu, să demonstrăm că dacă

$$A_f = \int_M f dE$$

atunci pentru orice  $x \in H_Q$ , avem

$$\|A_f x\|^2 = \int_M |f|^2 d\langle Ex, x \rangle.$$

În adevăr, fie  $f = f_1 + if_2$ , iar  $B = \int_M f_1 dE$ ,  $C = \int_M f_2 dE$  atunci operatorii  $B, C, J$  sînt operatori care comută și cum

$$JJ^*C = C,$$

iar  $J^* = -J$ , vom avea că  $\|Ax\|^2 = \|Bx\|^2 + \|Cx\|^2$  oricare ar fi  $f \in H_Q$ .

Are loc următoarea teoremă de descompunerea operatorilor normali :

**TEOREMA 11.7.2.** *Dacă  $N$  este un operator normal pe spațiul Hilbert cuaternionic  $H_Q$  atunci există un sistem spectral unic  $(E, J)$  și  $I - JJ^* = R = E(\sigma_0)$  astfel ca*

$$N = \int \lambda dE.$$

*Demonstrație.* Fie  $N^s$  operatorul care corespunde lui  $N$  pe spațiul  $H^s$  și măsura spectrală a sa  $E_s$ . Fie o mulțime compactă în plan și atunci avem că  $E_s(\bar{M}) = KE_s(M)K^{-1}$ ,  $E$  fiind regulată, deducem că relația are loc oricare ar fi  $M$  boreliană. Pentru orice mulțime din  $C^+ = \{q, q_1 \geq 0, q_2 = q_3 = 0\}$  (adică mulțimea numerelor complexe cu partea imaginară pozitivă) să punem

$$E(M)^s = E_s(M) + KE_s(M)K^{-1}$$

care este astfel o măsură spectrală pe  $H_Q$  concentrată pe  $C^+$ . Să definim operatorul  $J$  astfel

$$J^s = iE_s(C^+ - R) - iE_s(C - C^+)$$

unde  $C$  este corpul numerelor complexe și este (în fapt) mulțimea

$$C = \{q, q_2 = q_3 = 0\}.$$

În acest caz  $J^s$  este imaginar și comută cu  $E$ , iar  $JJ^* = I - E(\sigma_0)$ . Deci  $J$  este admisibil în raport cu măsura spectrală  $E$  și în acest mod  $(E, J)$  este un sistem admisibil.

Să arătăm că are loc descompunerea

$$N = A + JC$$

cu  $A = \int \operatorname{Re} \lambda dE$  și  $C = \int \operatorname{Im} \lambda dE$ . În adevăr, este evident că

$$\int \operatorname{Re} \lambda d(E_s x, y) = \int_{C^+ - R} \operatorname{Re} \lambda d \langle E^s(\cdot)x, y \rangle = \langle A^s x, y \rangle$$

și

$$i \int \operatorname{Im} \lambda d \langle E_s x, y \rangle = \int_{C^+ - R} \operatorname{Im} \lambda dE \langle E^s(\cdot)x, J^{*s}y \rangle = \langle C^s x, J^{*s}y \rangle$$

de unde deducem că

$$N^s = A^s + J^s C^s$$

adică  $N = A + JC$  și teorema este demonstrată.

*Observație.* Unicitatea rezultă imediat din această descompunere.

Vom da acum teorema de reprezentare a lui M. H. Stone a grupurilor de operatori unitari pe un spațiu Hilbert cuaternionic.

Teorema lui M.H. Stone are următorul enunț în cazul spațiilor Hilbert complexe.

**TEOREMA 11.7.3.** Dacă  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  este un grup continuu de operatori unitari atunci există un operator autoadjunct  $A$  astfel ca

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE(\lambda),$$

unde  $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ .

Formularea teoremei lui M. H. Stone în cazul spațiilor Hilbert cuaternionice este următoarea:

**TEOREMA 11.7.4.** Dacă  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  este un grup continuu de operatori unitari pe spațiul Hilbert  $H_Q$  atunci există un operator  $A$  autoadjunct astfel ca

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Jt\lambda} dE(\lambda),$$

unde  $J$  este un operator imaginar.

*Demonstrație.* Să considerăm grupul  $U_t^s$  pe spațiul Hilbert  $H^s$ . Conform teoremei 11.7.3. există un operator  $A^s$  autoadjunct astfel ca

$$U_t^s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE^s(\lambda),$$

unde  $A^s = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE^s(\lambda)$ .

Teorema poate fi demonstrată utilizând tehnica expusă la construcția descompunerii spectrale pentru operatori normali și de aceea o vom omite.

Vom menționa acum probleme care prezintă interes în cadrul teoriei spațiilor Hilbert cuaternionice :

1) dacă  $N$  este un operator normal pe  $H_Q$  și  $B$  este continuu cu proprietatea că  $BN = NB$  atunci în mod necesar  $BN^* = N^*B$ ? (adică dacă teorema lui B. Fuglede este adevărată în cadrul spațiilor Hilbert cuaternionice?)

2) dacă teorema lui Wigner este adevărată? (adică să se găsească forma operatorilor din  $\mathcal{L}_Q(H_Q)$  cu proprietatea că

$$|\langle Tx, Ty \rangle| = |\langle x, y \rangle|$$

oricare ar fi  $x, y \in H_Q$ .

3) cum se poate extinde teorema lui Garding pentru reprezentările grupurilor Lie la cazul spațiilor Hilbert cuaternionice?

## CLASE DE OPERATORI ȘI TEOREME ERGODICE UNIFORME

### § 1. INTRODUCERE

În teoria ergodică este de importanță fundamentală găsirea unor condiții necesare și suficiente pentru ca un operator  $T$  definit pe un spațiu Banach  $X$  să aibă proprietatea că șirul mediilor

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$$

să fie convergent. În special s-au căutat condiții în care convergența are loc în sensul unei anumite topologii pe mulțimea operatorilor.

Sînt astfel cunoscute rezultatele celebre obținute de către Yosida și Kakutani, Doeblin, Doob, Fréchet, Krylov, Bogoliubov. Aceste rezultate au aplicații importante în teoria proceselor Markov. Scopul nostru în acest capitol este de a expune o teorie care generalizează rezultatele menționate mai sus. Menționăm că noi considerăm o clasă de operatori care conține clasa de operatori studiată de Yosida și Kakutani și, că această clasă a fost sugerată de cercetări în teoria punctelor fixe. Rezultate interesante legate de anumite procese se găsesc studiate detaliat în [491], [539], [540].

### § 2. MĂSURĂ DE NECOMPACITATE. OPERATORI $\alpha$ -CONTRACTII, $\alpha$ -LOCAL CONTRACTII ȘI TEOREME ERGODICE UNIFORME

Fie  $(X, \rho)$  un spațiu metric complet, iar  $A$  o mulțime mărginită a sa, adică o mulțime cu diametrul finit (Prin diametru al unei mulțimi  $A$  într-un spațiu metric se înțelege numărul  $d(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$ ).

K. Kuratowski a introdus în 1929 un număr care măsoară cît de mult o mulțime diferă de o mulțime compactă. Un astfel de număr poartă azi numele de măsură de necompacitate a lui Kuratowski. S-au mai introdus și alte numere care au proprietăți asemănătoare numărului lui Kuratowski și vom menționa aici măsura legată de teorema lui Hausdorff și care poartă numele de măsură de necompacitate a lui Hausdorff.

Vom menționa pe scurt aceste definiții și vom preciza apoi proprietățile esențiale ale unei măsuri de necompacitate.

**DEFINIȚIA 12.2.1.** Numărul lui Kuratowski al unei mulțimi  $A \subset X$  este prin definiție inferiorul tuturor numerelor  $\varepsilon > 0$  astfel că există o acoperire a mulțimii  $A$  cu un număr finit de mulțimi al căror diametru nu depășește pe  $\varepsilon$ .

Numărul lui Kuratowski al unei mulțimi  $A$  se notează cu  $\alpha(A)$ .

**DEFINIȚIA 12.2.2.** Numărul lui Hausdorff al unei mulțimi  $A$  este prin definiție inferiorul tuturor  $\varepsilon > 0$  pentru care există o mulțime finită  $F_\varepsilon$  astfel ca pentru orice  $x \in A$  există  $x_\varepsilon \in F_\varepsilon$  astfel ca  $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Numărul lui Hausdorff al unei mulțimi  $A$  se notează cu  $\chi(A)$ .

Pentru măsura de necompacitate care o vom defini în cele ce urmează vom avea nevoie de :

**DEFINIȚIA 12.2.3.** O submulțime  $M \subset K$  se spune că este  $\varepsilon$ -discretă dacă pentru orice  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$  avem  $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ .

Noțiunea de număr  $V(A)$  al unei mulțimi  $A$  mărginită în spațiul metric  $(X, \rho)$  o introducem în :

**DEFINIȚIA 12.2.4.** Numărul  $V(A)$  al unei mulțimi  $A \subset X$  este prin definiție inferiorul tuturor numerelor  $\varepsilon > 0$  pentru care  $A$  nu are submulțimi infinite  $\varepsilon$ -discrete.

Este ușor de văzut că toate măsurile de necompacitate considerate mai sus au următoarele proprietăți :

$$1. 0 \leq F(A) \leq \text{diametrul lui } A,$$

$$2. 0 = F(A) \Leftrightarrow \text{dacă și numai dacă } \bar{A} \text{ este compactă}$$

$$3. F(A \cup B) = \max \{F(A), F(B)\}$$

unde  $F(\cdot)$  este una din măsurile  $\alpha(\cdot)$ ,  $\chi(\cdot)$ , sau  $V(\cdot)$ . Este cunoscut că există mulțimi pentru care  $\alpha(A) \neq \chi(A)$  și  $\alpha(A) \neq V(A)$ ,  $V(A) \neq \chi(A)$ .

În cele ce urmează vom presupune că  $X$  este un spațiu Banach complex și  $T$  o funcție continuă definită pe  $X$  cu valori în  $X$ . O clasă importantă de funcții a fost considerată de G. Darbo și reprezintă o extensie naturală a noțiunii de aplicație contractivă. Menționăm că această extindere a noțiunii de operator compact (și de aplicație contractivă) și-a găsit aplicații importante în teoria punctelor fixe. O clasă mai generală de aplicații a fost introdusă de A. Istrățescu și autorul acestei cărți în [224] prin :

**DEFINIȚIA 12.2.5.** O funcție continuă  $T: X \rightarrow X$  se spune că este local-densificatoare dacă pentru orice mulțime mărginită  $A$ , există un număr  $n = n(A)$ , astfel ca

$$F(T^n A) < F(A); \quad F(A) > 0.$$

și este numită local  $k$ -contractie dacă există  $k \in (0,1)$  independent de mulțimea mărginită  $A$ , întregul  $n = n(A)$  astfel ca

$$F(T^n A) \leq k F(A), \quad F(A) > 0.$$

Clasa de aplicații considerate de G. Darbo corespunde cazului cînd  $n = n(A) = 1$ .

Importanța clasei considerate în definiția 12.2.5. se datorează în parte și faptului că o clasă importantă de operatori liniari are proprietatea enunțată. Este vorba de clasa operatorilor numită clasa operatorilor *cvasicompacți* și pe care o considerăm în

**DEFINIȚIA 12.2.6.** Un operator liniar  $T: X \rightarrow X$  se spune că este *cvasicompact* dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

1.  $\|T^n\| \leq M < \infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
2. există un operator compact  $Q$  și un întreg  $m$  astfel ca  $\|T^m - Q\| < 1$ .

Are loc evident

**TEOREMA 12.2.7.** Orice operator  $Z$  *cvasicompact* este local  $k$ -contracție

*Demonstrație.* Este suficient să observăm că putem lua  $n = m$  și  $k$  egal cu  $\|T^m - Q\|$ .

Rezultatul obținut în teorema 12.2.7. pune problema următoare: este posibil să se extindă rezultatele cunoscute pentru operatori *cvasicompacți* pe spații Banach la spații care satisfac una din condițiile din definiția 12.2.5.?

În cele ce urmează vom arăta că este posibil acest lucru; pentru simplificare vom presupune că  $F = \alpha(\cdot)$ , adică vom lucra cu măsura de necompactitate a lui Kuratowski.

În cele ce urmează  $\sigma(\cdot)$  va însemna spectrul operatorului  $(\cdot)$ , iar  $\sigma_p(\cdot)$  va însemna spectrul punctual al operatorului  $(\cdot)$ . Vom mai observa pentru a putea cuprinde în mod natural clasa operatorilor *cvasicompacți* vom presupune în cele ce urmează că  $T$  este un operator liniar și local  $k$ -contracție, iar  $\sup_n \|T^n\| \leq M < \infty$ . Din această ultimă condiție rezultă imediat că

$$\sigma(T) \subset \{z, |z| \leq 1\}.$$

Are loc:

**TEOREMA 12.2.8.** Dacă  $T$  are proprietatea de mai sus

1. local  $\alpha$ -contracție,
2.  $\sup_n \|T^n\| < \infty$ ,

atunci  $\sigma_p(T) \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$  este o mulțime finită.

*Demonstrație.* Să presupunem că afirmația nu este adevărată și deci există un șir de valori proprii  $\{\lambda_n\}$  și elementele  $x_n \in X$  astfel ca

$$Tx_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| \geq 1, \quad \|x_n\| = 1.$$

Fie  $A_n = (x_1, \dots, x_n)$  spațiul generat de elementele  $x_1, \dots, x_n$  și avem evident că  $A_{n-1} \subset A_n$  cu incluziune strictă pentru orice  $n$ . Din teorema lui F. Riesz rezultă că pentru orice  $n$  există  $y_n$  astfel ca

1.  $y_n \in A_n$ ,  $\|y_n\| = 1$ ,
2.  $\|y_n - x\| > 1/2$ ;  $(\forall) x \in A_{n-1}$

Fie  $y = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  și pentru orice  $v \geq 1$  vom avea

$$T^v y_n - \lambda_n^v y_n \in A_{n-1}$$

și deci pentru  $n > m$

$$z_{n,m} = y_n - \lambda_n^{-v} T^v y + \lambda_m^{-v} T^{-v} y_m \in A_{n-1},$$

de unde rezultă că

$$\left\| T^v \left( \frac{y_n}{\lambda_n^v} \right) - T^v \left( \frac{y_m}{\lambda_m^v} \right) \right\| = \| y_n - z_{n,m} \| > 1/2.$$

Dacă  $S$  este sfera  $\{z, |z| \leq 1\}$  a spațiului Banach  $X$  și  $A = \{y_n\}$  atunci evident că  $A \subset S$  și evident că  $\alpha(A) \leq \alpha(S)$ . Cum însă  $T$  este local  $\alpha$ -contracție vom avea pentru  $n_1 = n(A)$

$$\alpha(T^{n_1} A) \leq k \alpha(A) \leq k \alpha(S)$$

și să definim acum  $n_2 = n(T^{n_1} A)$ ; vom obține

$$\alpha(T^{n_1+n_2}(A)) \leq k \alpha(T^{n_1} A) \leq k^2 \alpha(A)$$

și continuând în acest mod, vom obține că

$$\alpha(T^{n_1+\dots+n_s} A) \leq k^s \alpha(S)$$

de unde alegînd  $s$  suficient de mare, astfel ca  $k^s \alpha(S) < 1/2$  vom obține o contradicție. Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 12.2.9.** Fie  $T$  un operator ca în teorema 12.2.8 și  $\lambda$  un număr complex astfel ca :

1.  $|\lambda| \geq 1$ ,
2. pentru  $y_n \in R(\lambda I - T) = \{(\lambda I - T)x, x \in X\}$ ;  $\{y_n\}$  este convergent către  $y$  și  $y_n = (\lambda I - T)x_n$ ,
3.  $\{x_n\}$  este mărginit.

în acest caz  $\{x_n\}$  este o mulțime relativ compactă și există  $x_{n_k} \rightarrow x$  cu proprietatea că  $y = (\lambda I - T)x$ .

*Demonstrație.* Fie  $A = \{x_n\}$ . Cum

$$x_n = \frac{1}{\lambda} T x_n + y_n = \frac{1}{\lambda^2} T^2 x_n + T y_n + y_n = \frac{1}{\lambda^2} T^2 x_n + z_n,$$

unde  $\{y_n\}$  și  $\{z_n\}$  sînt șiruri convergente. Continuînd vom avea că

$$x_n = \frac{1}{\lambda^n} T^n x_n + z_{n,m},$$

unde șirul  $\{z_{n,m}\}$  este un șir convergent. Dar acum avem

$$A \subset \frac{1}{\lambda^m} T^m A + \{z_{n,m}\}$$

deducem că

$$\alpha(A) \leq \frac{1}{|\lambda^m|} \alpha(T^m A) < \frac{1}{|\lambda^m|} k \alpha(A),$$

care ne dă o contradicție dacă  $\alpha(A) > 0$ . Teorema este demonstrată deoarece cealaltă afirmație este evidentă.

*Observație.* Pentru ca această teoremă să fie adevărată este suficient să presupunem că  $T$  este numai local densificatoare.

Din această teoremă rezultă imediat și :

**TEOREMA 12.2.10.** *Dacă  $T$  este un operator ca în teorema 12.2.8 și  $\lambda$  nu este o valoare proprie,  $|\lambda| \geq 1$  atunci  $R(\lambda I - T)$  este un subspațiu închis.*

*Demonstrație.* Fie  $\delta > 0$  fix și  $y_n, \|y_n\| = 1$  astfel încît  $x_n = (\lambda_n I - T)^{-1} y_n$  și dacă afirmația teoremei este falsă rezultă că

$$\|x_n\| \geq a_n - \delta$$

unde  $\{a_n\}$  este un șir nemărginit. Să punem  $v_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$  și  $\omega_n = \frac{1}{\|x_n\|} y_n$ , de unde rezultă că

$$\lambda_n v_n - T v_n = \omega_n, \quad \|v_n\| = 1, \quad \omega_n \rightarrow 0.$$

Ca și în cazul de mai înainte, da că punem

$$z_n = [(\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1})] [(T v_n + \lambda_n^{-1} \omega_n)] \lambda^{-1}$$

avem că  $z_n \rightarrow 0$  și  $\lambda v_n - T v_n = z_n$ , de unde deducem că există  $v_{n_k} \rightarrow v$ , cu proprietatea că  $\lambda v - T v = 0$ , ceea ce contrazice afirmația că  $\lambda$  nu este valoare proprie și teorema este demonstrată. Are loc următoarea teoremă :

**TEOREMA 12.2.11.** *Dacă  $T$  este ca în teorema 12.2.8 și  $\lambda$  nu este o valoare proprie pentru  $T$ , iar  $\lambda_n \in \rho(T)$ , cu  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  ( $|\lambda| \geq 1$ ), atunci  $\{ \|(\lambda_n I - T)^{-1}\| \}$  este mărginit.*

Următoarea teoremă ne dă structura spectrului punctual al unui operator care este local  $k$ -contracție și cu iterate uniform mărginite.

**TEOREMA 12.2.12.** Dacă  $T$  este ca în teoremele 12.2.1, 12.2.8 atunci mulțimea valorilor proprii în  $\{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$  coincide cu partea din  $\sigma(T)$  situată în această mulțime.

*Demonstrație.* Să notăm cu  $\sigma'$  complementara mulțimii  $\sigma_p(T) \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$  relativ la mulțimea  $\{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$ , iar prin  $\sigma'' = \rho(T) \cap \sigma'$  și  $\sigma'''$  complementara mulțimii  $\sigma''$  relativ la  $\sigma'$ . Deci  $\sigma' = \sigma'' \cup \sigma'''$ . Pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că  $\sigma''' = \emptyset$ . Cum avem că  $\sigma_p(T) \cap \{\lambda, |\lambda| \geq 1\}$  este o mulțime finită, conform teoremei 12.2.8 deducem că  $\sigma'$  este o submulțime conexă și deschisă în topologia relativă și deci  $\sigma''$  este deschisă. Dacă presupunem că  $\sigma''' \neq \emptyset$  atunci există cel puțin un punct  $\lambda$  în această mulțime care nu este punct de acumulare pentru  $\sigma''$ . Deci există  $\lambda_n$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  și conform teoremei 12.2.11 șirul  $\{\|(\lambda_n I - T)^{-1}\|\}$  este mărginit,  $\|(\lambda_n - T)^{-1}\| \leq M < \infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Fie  $\delta = 1/M$  și deci există cel puțin un punct  $\lambda_n \in \rho(T)$  astfel ca

$$|\lambda_n - \lambda| < \delta = 1/M \leq \|(\lambda_n - T)^{-1}\|^{-1}$$

adică  $\lambda \in \rho(T)$  care este o contradicție și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 12.2.13.** Dacă  $T$  este ca în teorema 12.2.8 atunci

$$N(T - I) = \{x, (T - I)x = 0\}$$

este de dimensiune finită.

*Demonstrație.* Dacă  $A$  este o mulțime mărginită în  $N(T - I)$  avem că

$$\alpha(A) = \alpha(T^i A),$$

oricare ar fi  $i$  număr întreg și dacă  $\alpha(A) > 0$ , atunci obținem o contradicție și teorema este demonstrată.

*Observație.* Pentru ca teorema să fie adevărată este suficient să presupunem că  $T$  este local densificatoare.

Fie  $T$  un operator ca în teorema 12.2.8 și fie  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , valorile proprii ale operatorilor și pentru orice  $k \in [1, n]$  să considerăm un cerc  $r_k$  cu centrul în  $\lambda_k$  și de rază suficient de mică astfel ca în cerc să nu avem alt punct al spectrului în afară de  $\lambda_k$ . Să definim operatorii

$$P(\lambda_k, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{r_k} (T - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

care se mai poate scrie

$$P(\lambda_k, T) = T \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{r_k} \frac{(T - \lambda)^{-1}}{\lambda} d\lambda \right)$$

și să notăm cu  $E_k$  operatorul  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{r_k} \frac{(T - \lambda)^{-1}}{\lambda} d\lambda$ .

Are loc :

**TEOREMA 12.2.14.** Operatorii  $P(\lambda_k, T)$  sînt  $k$ -contractii.

*Demonstrație.* Cum  $T$  comută cu  $E_k$  avem  $P(\lambda_k, T) = T \circ E_k$  și cum  $P(\lambda_k, T)$  sînt proiectori avem

$$P(\lambda_k, T) = P^m(\lambda_k, T) = T^m \circ E_k^m$$

și cum

$$E_k^m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{r_k} \frac{(T - \lambda)^{-1}}{\lambda^m} d\lambda$$

deducem că

$$\|E_k^m\| \leq r_k \frac{1}{(|\lambda_k| - r_k)^m} \sup \|(T - \lambda)^{-1}\|$$

și luînd pe  $m$  suficient de mare astfel ca  $\|E_k^m\| \leq 1$ , ținînd seama că  $T$  este local  $k$ -contractie, pentru orice mulțime mărginită  $A$  vom avea

$$\alpha(T^p E_k^p(A)) \leq \alpha(E_k^p T^p(A)) \leq \alpha(T^p(A)) < k^p \alpha(A)$$

unde

$q > m$  și  $p = p_q + p_{q-1} + \dots + p_1$  cu  $p_{i+1} = n(T^{p_i + \dots + p_1}(A))$  și  $p_1 = n(A)$ .

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă structura operatorilor  $T$  care sînt local  $k$ -contractii și cu iterate uniform mărginite:

**TEOREMA 12.2.15.** Orice operator  $T$  cu proprietățile enunțate este de forma

$$T = T_1 + K$$

unde  $\sigma(T_1) \subset \{z, |z| < 1\}$  și  $K$  este un operator de rang finit.

*Demonstrație.* Fie  $\sigma' = \{\lambda_k, \lambda_k \in \sigma(T), |\lambda_k| \geq 1\}$  care este finită și  $\Gamma$  un cerc cu centrul în origine și care conține  $\sigma(T) - \sigma'$ . Fie  $Q$  proiectorul asociat mulțimii  $\sigma(T) - \sigma'$  și  $Q = I - P$ ,  $Q = P(\lambda_1, T) + \dots + P(\lambda_n, T)$ , și evident că  $T = T_1 + K$  unde  $T_1 = T \circ Q$  și  $K = T \circ P$ . Cum  $P(\lambda_k, T)$  sînt local  $k$ -contractii sînt în mod necesar operatori de rang finit și rangul  $P(P(\lambda_k, T)) = M_k$  este de dimensiune finită, iar  $RP \oplus_{k=1}^n M_k$ . Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 12.2.16.** Fie  $T$  un operator pe un spațiu Banach  $X$  cu proprietatea că  $\left\{\frac{1}{n} T^n\right\}$  converge slab către zero și în acest caz spectrul său este în  $\{z, |z| \leq 1\}$ , iar orice punct din rezolventă de pe cercul unitate este un pol simplu.

*Demonstrație.* Din principiul mărginirii uniforme rezultă că  $\frac{1}{n} \|T^n\| \leq M < \infty$  și deci raza spectrală  $\gamma_T \leq \lim \left(\frac{1}{M^n}\right)^{1/n} = 1$  și astfel pri-

ma afirmație este demonstrată. Fie acum  $\lambda$  de pe cerc care este un pol al rezolventei și putem presupune fără a restringe generalitatea că  $\lambda = 1$ . Dacă nu este pol simplu atunci există  $x_0$  astfel ca  $(I - T)x_0 \neq 0$  și  $(I - T)^2 x_0 = 0$ . Funcția  $f(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n}$  face parte din funcțiile pentru care se poate defini un calcul funcțional și deci

$$\frac{1}{n} T^n x_0 = \frac{1}{n} x_0 + (I - T)x_0$$

pentru  $n \rightarrow \infty$  obținem că  $x^*(I - T)x_0 = 0$  oricare ar fi  $x^* \in X^*$  care este o contradicție și teorema este demonstrată.

**TEOREMA 12.2.17.** Fie  $T$  un operator pe un spațiu Banach  $X$  cu următoarele proprietăți :

1. șirul  $\{1/n T^n\}$  converge slab către zero,
2.  $T$  este local  $\alpha$ -contracție.

În acest caz în spectrul operatorului există cel mult o mulțime finită  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  cu  $|\lambda_i| = 1$  și care sînt poli simpli, iar  $P(\lambda_k, T)$  sînt de dimensiune finită.

*Demonstrație.* Rezultă din teorema de mai sus și proprietăți privind local  $\alpha$ -contracțiile ținînd seama că ipoteza privind iteratele uniform mărginite a fost folosită numai la faptul că spectrul este în cercul unitate.

Din această teoremă rezultă :

**TEOREMA 12.2.18.** Fie  $T$  ca în teorema 12.2.17, atunci  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$  converge în topologia uniformă către  $P(1, T)$ .

*Demonstrație.* Fie  $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$  și fie de asemenea  $\sigma = \{z, \sigma(T) \ni z, |z| = 1\}$  și  $\sigma' = \sigma(T) - \sigma$ . În acest caz  $E(\sigma) A_n \rightarrow 0$ , deoarece  $f_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$  converge către zero pe o vecinătate a acestei mulțimi, iar  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sînt poli simpli. Cum  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^n \rightarrow 0$ , oricare ar fi  $\lambda_i \neq 1$ , deducem că  $A_n E(\sigma') \rightarrow P(1, T)$  și cum  $A_n = A_n E(\sigma) + A_n E(\sigma')$  și afirmația teoremei este acum evidentă.

În cele ce urmează vom studia operatori pe spații particulare. Fie în acest caz  $S$  un spațiu compact și separat, iar  $\mathcal{C}(S)$  spațiul Banach al tuturor funcțiilor continue cu norma

$$f \rightarrow \|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

Se spune că un operator  $T: \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$  este pozitiv dacă  $f \geq 0$  (adică  $f(s) \geq 0$ ), atunci  $(Tf)(s) \geq 0$  adică  $Tf \geq 0$ .

Următoarea teoremă dă unele informații privind natura spectrului unor operatori pe  $\mathcal{C}(S)$ .

**TEOREMA 12.2.19.** Fie  $T : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$  un operator pozitiv și cu următoarele proprietăți

1.  $\left\{ \frac{T^n}{n} \right\}$  converge slab către zero,

2.  $T$  este local  $\alpha$ -contracție

atunci există un întreg  $N$  astfel că dacă  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sînt punctele din spectru cu modulul 1 să avem relația  $\lambda_i^N = 1, i = 1, \dots, n$ .

*Demonstrație.* Fie  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $|\lambda| = 1$  și fie  $f$  astfel ca  $Tf = \lambda f$ ; să notăm cu  $s_0$  punctul din  $S$  astfel ca  $|f(s_0)| = \|f\|$ . Cum  $P(\lambda, T)\mathcal{C}(S)$  este un spațiu vectorial vom putea presupune, fără a restrînge generalitatea că  $f(s_0) = 1$  și fie  $\delta : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{C}$  definită prin

$$\delta(f)(s) = f(s_0)$$

oricare ar fi  $g \in \mathcal{C}(S)$ . Fie  $T^*$  adjunctul operatorului  $T$  și deci  $(T^{*n})\delta$  este o funcțională pozitivă pe  $\mathcal{C}(S)$  și deci din teorema de reprezentare a lui Riesz-Kakutani există o măsură  $\pi_n$  pe  $S$  astfel ca

$$(T^n g)(s_0) = \int_S g(s) \pi_n(ds)$$

oricare ar fi  $g \in \mathcal{C}(S)$ . Cum  $\lambda^n f(s_0) = (T^n f)(s_0) = \int_S f(s) \pi_n(ds)$  și  $|f(s)| \leq 1$ , rezultă că  $\pi_n(S) \geq 1$ . Să arătăm că pentru orice  $n$

$$\{s, s \in S, \lambda^{-n} f(s) \neq 1\}$$

are  $\pi_n$  măsură nulă. În adevăr, cum  $T^n f = \lambda^n f$  avem

$$0 = f(s_0) - \lambda^{-n} (T^n f)(s_0) = \int_S (1 - \lambda^{-n} f(s)) \pi_n(ds)$$

și luînd părțile reale avem

$$0 = \int_S (1 - \operatorname{Re}(\lambda^{-n} f(s))) \pi_n(ds) = 0.$$

Cum însă  $|\operatorname{Re}(\lambda^{-n} f(s))| \leq |f(s)| \leq 1$ , funcția de sub integrală este pozitivă și cum măsura  $\pi_n$  este pozitivă, deducem că  $\pi_n(B_n) = 0$ , unde  $B_n = \{s, \operatorname{Re} \lambda^{-n} f(s) \neq 1\}$ . Dar din  $|f(s)| \leq |f(s_0)| = 1$ , rezultă că  $A_n \subset B_n$  și afirmația este demonstrată. Să notăm cu  $A'_n = S - A_n$  și cum

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j \delta$$

din  $\pi_j(S) \geq 1$ , rezultă că  $\pi(S) \geq 1$ . Fie  $A = \bigcap A_j$  și deci  $\pi_j(A) = 0$  oricare ar fi  $j = 1, \dots$ . Deci  $\pi(A) = 0$ . Fie  $A' = \bigcap A'_j$ ,  $A' = S - A$ . Dacă mulțimile  $A'_k$  ar fi două câte două disjuncte, atunci  $\pi_j(A'_k) = 0$ , ( $j \neq k$ ) și deci

$$0 \leq \pi(A'_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j(A'_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0,$$

adică  $\pi(A') = \sum \pi(A'_k) = 0$ . Cum  $A$  și  $A'$  sînt mulțimi complementare,  $0 = \pi(A) + \pi(A') = \pi(S) \geq 1$ , am obținut o contradicție și deci mulțimile  $A'_k$  nu pot fi două câte două disjuncte. Rezultă că există numerele întregi  $m$  și  $n$  astfel ca mulțimile  $A'_m$  și  $A'_n$  conțin un punct  $s_1$ . Deci

$$\lambda^{-n} f(s_1) = \lambda^{-m} f(s_1) = 1$$

și  $\lambda^{n-m} = 1$ . Cum  $\lambda$  este arbitrar în  $\sigma(T)$  și  $|\lambda| = 1$ , rezultă că există întregul  $N$  astfel ca  $\lambda^N = 1$ . Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă structura operatorilor din teorema precedentă.

**TEOREMA 12.2.20.** Fie  $T$  un operator ca în teorema 12.2.19. În acest caz spectrul  $\sigma(T)$  este reuniunea a două mulțimi închise, una  $\sigma$  situată în  $\{z, |z| < 1\}$  și alta formată din elementele  $\{e^{2\pi i \theta_k}\}$  unde  $\theta_k$  sînt numere raționale, iar  $P(e^{2\pi i \theta_k}, T) = P_k$  sînt de rang finit. Dacă  $E_D = E(\sigma)$  atunci  $D = T E D$  și pentru orice întreg  $m$ ,

$$(*) \quad T^m = \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \theta_k \cdot m} P_k + D^m.$$

*Demonstrație.* În baza rezultatelor obținute privind operatorul  $T$ , trebuie să demonstrăm că  $\theta_k$  sînt numere raționale, afirmație care rezultă din existența întregului  $N$  astfel ca

$$e^{2\pi i \theta_k N} = 1.$$

Formula de descompunere (\*) este o consecință imediată a teoremei de descompunere pentru local  $\alpha$ -contracții observînd că argumentele folosite acolo sînt adevărate și în cazul cînd  $(1/n) T^n$  converge slab către zero. Teorema este demonstrată.

**TEOREMA 12.2.21.** Fie  $T$  un operator ca în teorema 12.2.19 și fie  $E_p = \sum_{k=1}^n P_k$ . În acest caz  $C_p = E_p \mathcal{C}(S)$  este finit dimensional și dacă  $C_D = E_D \mathcal{C}(S)$  atunci  $\mathcal{C}(S)$  este suma directă a acestor două subspații invariante pentru operatorul  $T$ . De asemenea

- 1) există  $N$  astfel ca  $T^N x = x$ , oricare ar fi  $x \in C_p$ ,
- 2)  $T^n x \rightarrow 0$ , exponențial, dacă  $x \in C_D$ ,
- 3) proprietățile 1) și 2) caracterizează subspațiile  $C_p$  și  $C_D$ .

*Demonstrație.* Este evident că  $E_p$  este un proiector și  $E_p E_D = E_D E_p = 0$  cu  $I = E_p + E_D$ , iar operatorul  $T$  comută cu  $E_p$  și  $E_D$ , de unde rezultă descompunerea în sumă directă și proprietățile spațiilor  $C_p$  și  $C_D$ .  $N$  este întregul care există conform cu rezultatele de mai înainte. Cum

$$x = x_p + x_D$$

deducem că  $T^n x_p \rightarrow 0$  și  $T^n x_D \rightarrow 0$ ; dar cum șirul  $\{T^n x_p\}$  are o infinitate de termeni egali cu zero, deducem că  $x_p = 0$  și deci

$$C_D = \{x, x \in \mathcal{C}(S), T^n x \rightarrow 0\}$$

și similar se caracterizează  $C_p$ .

Fie  $(S, \mathfrak{B}, \mu)$  un spațiu măsurabil și să considerăm spațiul Banach  $L^1(S, \mathfrak{B}, \mu)$  iar  $T; L^1 \rightarrow L^1$ . O clasă importantă de operatori în teoria ergodică este aceea a operatorilor pozitivi: un operator  $T$  se spune pozitiv dacă din  $f \geq 0$  aproape peste tot, atunci  $(T(f))(s) \geq 0$  aproape peste tot. Utilizînd spațiul Banach  $L_\infty(S, \mathfrak{B}, \mu)$  se poate arăta că teoremele 12.2.20 și 12.2.21 rămîn adevărate în cazul cînd se consideră spațiul  $L^1(S, \mathfrak{B}, \mu)$ .

### § 3. APLICAȚII LA PROCESE MARKOV

Importanța operatorilor cvasicompacți în studiul proceselor Markov a fost arătată pentru prima dată în lucrările clasice ale lui Krilov-Bogoliubov și Yosida-Kakutani. De asemenea Doeblin a introdus o condiție (condiția  $D$ ) care implică condiția considerată de Bogoliubov-Krilov și Yosida-Kakutani.

Vom arăta în cele ce urmează că în condițiile puse se pot face unele slăbiri.

Fie  $P(t, E)$  o familie de probabilități de trecere cu  $t \in [0, 1] = \Omega$  care reprezintă probabilitatea ca punctul  $t \in \Omega$  să se găsească în  $E$  după trecerea unei unități de timp. Deci

$$1. \quad P(t, E) \geq 0,$$

$$2. \quad P(t, \Omega) = 1$$

și vom presupune că pentru  $E$  fix

$$t \rightarrow P(t, E)$$

este o funcție boreliană. De asemenea, probabilitatea ca punctul  $t$  să fie în  $E \subset \Omega$  după trecerea a  $n$  unități de timp este

$$P^{(n)}(t, E) = \int_{\Omega} P^{(n-1)}(t, ds) P(s, E);$$

$$P^{(1)}(t, E) = P(t, E)$$

unde integrarea este în sens Radon-Stieltjes.

Vom considera două spații: 1)  $M(\Omega)$  format din toate funcțiile complexe măsurabile Borel,  $x(t)$ , cu norma

$$\|x\| = \text{adev. max}_{t \in \Omega} |x(t)|$$

și un operator  $\bar{T}$  definit pe acest spațiu prin

$$(\bar{T}x)(t) = \int_{\Omega} x(s) P(t, ds),$$

2) spațiul tuturor funcțiilor  $x(E)$  numărabil aditive cu valori complexe pe mulțimile boreliene  $B$  din  $\Omega$  cu norma

$$\|x\| = \text{var}_{\Omega} |x(\cdot)|$$

și operatorul  $T$  pe acest spațiu definit prin

$$(Tx)(E) = \int_{\Omega} x(dt) P(t, E)$$

Este evident că

$$1 = \|\bar{T}\| = \|T\| = \|T^n\| = \|\bar{T}^n\|$$

oricare ar fi întregul  $n$ .

Bogoliubov și Krilov au utilizat o condiție numită de Yosida și Kakutani condiția (K) și care se enunță astfel: există un întreg  $m$  și un operator compact  $Q$  astfel ca

$$(K) \quad \|T^m - Q\| < 1$$

W. Doeblin a considerat condiția numită și condiția (D),

„(D) există un întreg  $p$  și constantele pozitive  $b, \eta$  astfel că dacă  $m \leq E < \eta$  avem  $P^p(t, E) < 1 - b$  oricare ar fi  $t \in \Omega$ ”. Este cunoscut că această condiție este mai generală decât o condiție introdusă de J. L. Doob. Yosida și Kakutani au arătat că avem

$$(D) \Rightarrow (K)$$

Vom considera acum, sugerată de teorie operatorilor expusă în §2, o condiție mai generală decât cea considerată de Yosida și Kakutani, condiția (K\*) pe care o considerăm astfel:

„(K\*) operatorul  $T$  este local  $\alpha$ -contractie” și este evident că rezultatele obținute de Yosida și Kakutani se mențin pentru operatori cu condiția (K\*); ele sînt în fapt consecințe ale teoremelor expuse în §2.

O problemă interesantă care este strâns legată de condiția (D) a lui Doeblin este și următoarea : poate fi slăbită condiția (D) la condiția (D\*) care se enunță astfel : există un întreg  $d = d(\eta)$  astfel încât dacă  $m\text{ăs } E < \eta$  să avem

$$P^d(t, E) < 1 - b$$

Ar fi interesant de știut dacă avem relația

$$(D^*) \rightarrow (K^*) ?$$

În legătură cu condiția (D\*) vom face și următoarea observație sugerată de un rezultat al lui Yosida și Kakutani.

Fie  $Q(s, t) = P^{(d(\eta))}(t, I(s))$ , unde  $I(s) = [0, s]$  și în acest caz  $Q(s, t)$  este Borel măsurabilă și să definim

$$p(t, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(Q(t, s + 1/n) - Q(t, s)),$$

$$q(t, s) = \min \{p(t, s), 1/\eta\}.$$

De asemenea să considerăm nucleul  $R(t, E)$  definit prin

$$R(t, E) = P^{(d(\eta))}(t, E) - \int_E q(t, s) ds$$

și cum pentru orice  $t$  există  $N_t$  o mulțime de măsură zero astfel ca

$$P^{(d(\eta))}(t, E) = \int_E p(t, s) ds + P^{(d)}(t, N_t \cap E)$$

oricare ar fi mulțimea boreliană  $t \in \Omega$ . Cum însă

$$\begin{aligned} 0 \leq R(t, s) &= \int_E (p(t, s) - q(t, s)) ds + P^{(d)}(t, N_t \cap E) = \\ &= \int_{E \cap E_t(\eta)} p(t, s) ds + P^{(d)}(t, N_t \cap E) \leq P^{(d)}(t, E_t \cap E), \end{aligned}$$

unde avem că

$$E_t(\eta) = E_t[p(t, s) > \eta]$$

și cum  $m\text{ăs } E_t(\eta) < \eta$  oricare ar fi  $t \in \Omega$  în baza condiției (D\*) avem

$$0 \leq R(t, E) \leq 1 - b.$$

În legătură cu aplicațiile operatorilor local  $\alpha$ -contractii la procese Markov vom mai menționa următorul fapt care în teoria prezentată de Yosida-Kakutani nu poate fi tratat : dacă operatorii  $\bar{T}_1$  și  $\bar{T}_2$  corespun-

zătorii la două familii de probabilități de trecere  $P^1(t, E)$   $P^2(t, E)$  sînt evasicompacți și familia de probabilități  $P^{(1,2)} = \alpha P^1(t, E) + (1 - \alpha) P^2(t, E)$  cu  $\alpha \in [0, 1]$  este din nou o familie de probabilități de trecere pentru un proces Markov, atunci teoria pe care am expus-o se aplică imediat.

Vom arăta că pentru  $\alpha = 1/2$  și  $\bar{T}_1$  evasicompact cu  $m = 2$  iar  $\bar{T}_2$  cu  $m = 3$  are proprietatea că  $(1/2)(\bar{T}_1 + \bar{T}_2)$  este local  $k$ -contractie.

Fie deci operatorii compacți  $Q_1$  și  $Q_2$  astfel ca

$$\|\bar{T}_1^2 - Q_1\| < 1, \quad \|\bar{T}_2^3 - Q_2\| < 1$$

și

$$\begin{aligned} \tilde{T}^3 &= (1/2)(\bar{T}_1 + \bar{T}_2)^3 = (1/8)(\bar{T}_1^3 + \bar{T}_1^2\bar{T}_2 + \bar{T}_1\bar{T}_2\bar{T}_1 + \bar{T}_1\bar{T}_2^2 + \bar{T}_2\bar{T}_1^2 + \\ &\quad + \bar{T}_2\bar{T}_1\bar{T}_2 + \bar{T}_2^2\bar{T}_1 + \bar{T}_2^3) = \\ &= (1/8)[(\bar{T}_1^2 - Q_1)\bar{T}_1 + Q_1\bar{T}_1 + \bar{T}_1^2\bar{T}_2 + \dots + \bar{T}_2^2\bar{T}_1 + \\ &\quad + (\bar{T}_2^3 - Q_2) + Q_2] \end{aligned}$$

care ne dă că

$$\alpha(\tilde{T}^3 A) \leq k\alpha(A),$$

unde

$$k_1 = (1/8)[\|\bar{T}_1^2 - Q_1\| + \dots + (\|\bar{T}_2^3 - Q_2\|)]$$

*Observație.* Definiția operatorilor evasicompacți sugerează, în mod natural o nouă extindere a lor astfel: un operator  $T$  pe un spațiu Banach se spune că este quasi-densificator dacă

1.  $\|T^n\| \leq M < \infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
2. există un operator  $Q$  densificator ( $n(A) = 1$ ) astfel ca pentru un întreg  $m$ , există  $k \in (0, 1)$  și pentru orice mulțime mărginită avem

$$F[(T^m - Q)A] \leq kF(A)$$

iar  $F$  este o măsură de necompacitate.

Problema care se pune este de a vedea dacă proprietățile (sau o parte din ele) operatorilor local  $\alpha$ -contractii se mențin și la această clasă de operatori.

## TEOREMA LUI HERGLOTZ

Există mai multe clase de funcții analitice care pot fi date prin formule de reprezentare în care să intervină funcții cu variație mărginită pe cercul unitate. O clasă importantă între acestea este și clasa funcțiilor analitice  $f$  în  $\{z, |z| < 1\}$ , care au proprietatea că  $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$  dacă  $|z| < 1$ . Această clasă de funcții are reprezentarea

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dF(\theta),$$

unde  $\beta$  este un număr real și  $F$  este o funcție monoton crescătoare.

Să demonstrăm această formulă de reprezentare.

Vom reaminti că orice funcție analitică  $f(z)$  în  $\{z, |z| < 1\}$  poate fi reprezentată în raport cu partea sa reală, conform formulei lui Schwarz, astfel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} u(re^{i\theta}) d\theta + i\beta,$$

unde  $u = \operatorname{Re} f$ . Această formulă mai poate fi scrisă și astfel

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} dF_r(\theta) + i\beta,$$

unde am pus

$$F_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta u(re^{it}) dt,$$

care este evident o funcție crescătoare. De asemenea, cum  $u = \operatorname{Re} f$  este o funcție armonică, vom avea

$$F_r(\theta) \leq F_r(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} u(0)$$

și deci  $\{F_r\}$  este o familie de funcții uniform mărginită. Dar pentru

$$z \text{ fix, } \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \rightarrow \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \text{ uniform pentru } r \rightarrow 1.$$

Conform teoremei lui Helly, există în  $\{F_r\}$  un șir care converge către o funcție monoton crescătoare  $F(\theta)$ , de unde obținem

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} dF_r(\theta) + i\beta \rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dF(\theta) + i\beta$$

și teorema de reprezentare a lui Herglotz este demonstrată.

*Observații* 1) Această teoremă de reprezentare a intervenit în teoremele privind normele Schwarz pentru operatori.

2) Dacă  $dF$  este măsura asociată cu funcția  $F$  atunci integrala poate fi luată în raport cu această măsură.

## „SPECTRAL MAPPING THEOREM” PENTRU OPERATORI HERMITIENI ȘI NORMALI

În cele ce urmează vom expune teoria pentru cazul operatorilor hermitieni și normali urmînd simplificările care au fost aduse în această teorie de Bernau, Berberian și Whitley.

### § 1. OPERATORI HERMITIENI

Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $T$  un operator liniar și mărginit pe  $H$ . Se spune că  $T$  este hermitic dacă

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

oricare ar fi  $x, y \in H$ . Se spune că operatorul  $T$  este pozitiv dacă oricare ar fi  $x \in H$ ,  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ . Dacă  $T$  și  $S$  sînt doi operatori hermitici se spune că  $T \geq S$  dacă  $T - S \geq 0$ . Se poate verifica ușor că „ $\geq$ ” este o relație de ordine parțială în mulțimea operatorilor hermitici.

Vom da mai întîi „the spectral mapping theorem” pentru cazul operatorilor hermitici. Instrumentul cel mai puternic pe care-l utilizează este teorema lui Weierstrass pentru intervale pe axa reală.

**TEOREMA 1.1.** *Un operator hermitian  $T$  are spectrul real.*

*Demonstrație.* Vom arăta că orice  $\lambda$  complex cu  $\text{Im} \lambda \neq 0$  este în mulțimea rezolventă.

În adevăr, pentru orice  $x \in H$  avem evident

$$\|x\| \|Tx - \lambda x\| \geq |\langle Tx - \lambda x, x \rangle| = |\langle Tx, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle| \geq |\text{Im} \lambda| \|x\|^2$$

și deci

$$\|Tx - \lambda x\| \geq |\text{Im} \lambda| \|x\|,$$

de unde rezultă că  $T - \lambda I = T - \lambda$  este invertibil dacă  $\lambda$  are parte imaginară nenulă.

Vom mai observa că dacă  $T$  este un operator arbitrar și  $p(\cdot)$  este un polinom arbitrar, atunci

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = \{p(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\}.$$

În adevăr, dacă  $\lambda_0$  este un număr complex atunci oricare ar fi  $\lambda$

$$p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)q(\lambda)$$

și deci

$$p(T) - p(\lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)q(T).$$

Dacă  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  atunci  $B = (T - \lambda_0 I)q(T)$  nu este invertibil. În adevăr, dacă nu ar fi așa, atunci

$$\begin{aligned}(T - \lambda_0 I)q(T) \cdot B^{-1} &= BB^{-1} = I = B^{-1}(T - \lambda_0 I)q(T) = \\ &= B^{-1}q(T)(T - \lambda_0 I)\end{aligned}$$

și deci  $(T - \lambda_0 I)$  este invertibil ceea ce nu se poate. Deci  $p(T) - p(\lambda_0)I$  nu este invertibil și deci  $p(\lambda_0) \in \sigma(p(T))$ . Fie acum  $\lambda_0 \in \sigma(p(T))$  și  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  rădăcinile ecuației  $p(\lambda) = \lambda_0$ . Rezultă că avem

$$p(T) - \lambda_0 I = k(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)$$

unde  $k$  este o constantă. De aici deducem că există un  $i \in [1, n]$  astfel ca  $T - \lambda_i I$  nu este invertibil și deci  $\lambda_i \in \sigma(T)$ , iar  $p(\lambda_i) = \lambda_0$  observația făcută este demonstrată.

**TEOREMA 1.2.** *Un operator hermitian  $T$  este pozitiv dacă și numai dacă spectrul său este în  $R_+$ .*

*Demonstrație.* Din teorema de mai sus știm că  $\sigma(T)$ , spectrul lui  $T$  este real. Dacă  $T \geq 0$  atunci pentru orice  $\alpha > 0$ ,  $T + \alpha I = T + \alpha$  este invertibil și deci  $\sigma(T) \subset R_+$ .

Să presupunem că  $\sigma(T) \subset R_+$  și să definim

$$M = \sup\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}.$$

În acest caz trebuie să arătăm că  $M \geq 0$ . Fie  $\{x_n\}, \|x_n\| = 1$ , astfel ca

$$\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow M,$$

adică

$$\langle (T - M)x_n, x_n \rangle \rightarrow 0.$$

Cum  $T - MI \geq 0$ , din inegalitatea generalizată a lui Schwarz rezultă că

$$\|(T - M)x_n\| \rightarrow 0$$

și deci  $M \in \sigma(T)$ , adică  $M \geq 0$  și teorema este demonstrată.

Din teoremele 1.1. și 1.2 rezultă :

**TEOREMA 1.3.** *Dacă  $T$  este un operator hermitian și  $p(\cdot)$  un polinom cu coeficienți reali, atunci  $p(T) \geq 0$  dacă și numai dacă  $p(\lambda) \geq 0$  oricare ar fi  $\lambda \in \sigma(T)$ .*

*Demonstrație.* Cum pentru orice polinom cu coeficienți reali,  $p(T)$  este hermitian, dacă  $T$  este hermitian afirmația este acum evidentă din teorema 1.2.

Să punem

$$m = \inf\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$$

$$M = \sup\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$$

și fie  $f: [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Problema care se pune este de a defini un operator  $f(T)$  care pentru  $f$  polinom să coincidă cu cel considerat mai sus și apoi studiul naturii spectrului  $\sigma(f(T))$ . Vom reaminti că mulțimea funcțiilor continue pe intervalul  $I$  formează un spațiu Banach, notat  $C_I$  care este normat prin

$$\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

și care este de asemenea și algebră Banach pentru înmulțirea obișnuită a funcțiilor.

Teorema celebră a lui Weierstrass afirmă că oricare ar fi  $f \in C_I$  există un șir de polinoame care aproximează pe  $f$  în normă, oricât de bine, sau, cu alte cuvinte că algebra polinoamelor este densă în  $C_I$ .

Fie acum  $f \in C_I$  și vrem să definim  $f(T)$ . Conform teoremei lui Weierstrass există  $\{p_n\}$  un șir de polinoame care converg în normă (uniform) către  $f$ . Evident, putem forma  $\{p_n(T)\}$ . Șirul de operatori  $\{p_n(T)\}$ , care este un șir de operatori hermitieni, converge către un operator hermitian. Pentru a demonstra aceasta este nevoie de un rezultat interesant și în sine, pe care-l dăm în :

**TEOREMA 1.4.** *Dacă  $T$  este un operator hermitian atunci*

$$\|T\| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*Demonstrație.* Cum

$$\|T\| = \sup\{\|Tx_n\|, \|x_n\| = 1\}$$

rezultă că există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$ , astfel ca  $\|Tx_n\| \rightarrow \|T\|$ . Vom putea presupune fără a restrânge generalitatea că  $\|T\| = 1$ . Cum avem identitatea

$$\|(T^2 - \lambda^2)x\|^2 = \|T^2x\|^2 - 2\lambda^2\|Tx\|^2 + \lambda^4\|x\|^2$$

pentru  $\lambda = \|T\| = 1$  obținem

$$\|(T^2 - 1)x_n\|^2 \leq \|T^2x_n\|^2 - 2\|Tx_n\|^2 + 1^4 \leq 1 - \|Tx_n\|^2 \rightarrow 0$$

și deci  $1 \in \sigma(T^2)$ , avem  $\pm 1 \in \sigma(T)$  și teorema este demonstrată.

Proprietatea demonstrată a fost luată de A. Wintner ca definiție pentru clasa de operatori care se numește clasa operatorilor normaloizi. Din teorema 1.4 rezultă că operatorul  $p_n(T) - p_m(T)$  este hermitian și

$$\|p_n(T) - p_m(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p_n(\lambda) - p_m(\lambda)| = \|p_n - p_m\|$$

de unde rezultă că  $\{p_n(T)\}$  este un șir Cauchy de operatori și tinde către un operator care este evident mărginit și hermitian.

Evident că aplicația

$$f \rightarrow f(T)$$

este un homomorfism al algebrei  $C_I$  în algebra operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul  $X$ . Dacă  $f \geq 0$  atunci  $f(T) \geq 0$ . În adevăr, dacă  $f \geq 0$  atunci  $f_1 = f^{1/2} \in C_I$  și deci

$$f(T) = f^{1/2}(T) \cdot f^{1/2}(T) = (f^{1/2}(T))^2.$$

Afirmația este demonstrată.

Teorema următoare dă o extensie a acestei observații.

**TEOREMA 1.5.** *Dacă  $f$  este continuă pe  $[m, M]$  și pozitivă pe  $\sigma(T)$  atunci  $f(T) \geq 0$ .*

*Demonstrație.* Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , va fi suficient să arătăm că  $f(T) + \varepsilon I \geq 0$  și fie  $\{p_n\}$  un șir de polinoame cu coeficienți reali astfel ca

$$\|p_n - (f + \varepsilon)\| \rightarrow 0,$$

$$\|p_n - (f + \varepsilon)\| \leq \varepsilon/2,$$

dacă  $n \geq N$ . În acest caz  $p_n \geq \varepsilon/2$  pe  $\sigma(T)$  și cum  $\sigma(p_n(T)) = p_n(\sigma(T)) \geq \varepsilon/2$ , deducem că  $p_n(T) \geq \varepsilon/2 I$ . Cum  $\|p_n(T) - (f(T) + \varepsilon I)\| \rightarrow 0$  rezultă că  $f(T) + \varepsilon I \geq (\varepsilon/2)I$  și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă constituie rezultatul principal:

**TEOREMA 1.6.** (Spectral mapping theorem). *Dacă  $T$  este un operator hermitic atunci pentru orice  $f \in C_{[m, M]}$  are loc relația*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \{f(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*Demonstrație.* Să arătăm mai întâi că  $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ . În adevăr dacă  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  trebuie să arătăm că  $f(\lambda_0)I - f(T)$  nu este invertibil. Fie  $\{p_n\}$  un șir de polinoame cu coeficienți reali astfel ca  $\|p_n - f\| \rightarrow 0$ . În acest caz  $p_n(T) - p_n(\lambda_0)I$  sînt neinvertibili și cum converg în normă către  $f(T) - f(\lambda_0)I$  afirmația este demonstrată<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Dacă  $\{T_n\}$  este un șir de operatori care converge către  $T$  în normă și  $\{T_n\}$  nu sînt invertibili atunci și  $T$  nu este invertibil. În adevăr, dacă  $T$  ar fi invertibil atunci  $\|T_n T^{-1} - I\| < 1$  dacă  $n \geq N$  și deci  $\{T_n T^{-1}\}$  este invertibil, de unde rezultă că și  $T_n$  este invertibil dacă  $n \geq N$ , ceea ce nu se poate.

Dacă  $\mu \in f(\sigma(T))$  să arătăm că  $\mu \in \sigma(f(T))$ . Să presupunem că funcția  $g = f - \mu$  nu se anulează pe  $\sigma(T)$  și să arătăm că  $g(T)$  este un operator invertibil. Fie  $\varepsilon > 0$  și atunci  $\|g\| \geq \varepsilon$  pe  $\sigma(T)$ , de unde  $g^2 \geq \varepsilon^2$  pe  $\sigma(T)$  și cum  $[g(T)]^2 \geq \varepsilon^2 I$  rezultă că  $g(T)$  este invertibil.

Rezultă astfel că pentru orice  $f \in C_{[m,M]}$  există un operator  $f(T)$  și aplicația

$$f \rightarrow f(T)$$

este un homomorfism al algebrei  $C_{[m,M]}$  în algebra operatorilor generată de  $T$  și avem

$$\|f(T)\| = \gamma_{f(T)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|.$$

*Observație.* Dacă utilizăm teorema lui Tietze homomorfismul de mai sus este între algebra  $C_{\sigma(T)}$  și algebra operatorilor generată de  $T$  este în fapt un izomorfism izometric.

## § 2. OPERATORI NORMALI

Scopul nostru este de a prezenta teorema „the spectral mapping theorem” pentru operatori normali utilizând în mod cât mai elementar rezultatele expuse la operatorii hermitieni.

Are loc :

**TEOREMA 1.7.** *Dacă  $T$  este un operator normal cu  $0 \in \sigma(T)$  atunci oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există un subspațiu  $M$  închis care nu se reduce la  $\{0\}$ , invariant pentru orice operator care comută cu  $T^*T$  și astfel ca  $\|T/M\| \leq \varepsilon$ .*

*Demonstrație.* Cum  $0 \in \sigma(T)$  există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca  $Tx_n \rightarrow 0$  și deci  $T^*Tx_n \rightarrow 0$  de unde deducem că  $0 \in \sigma(T^*T)$ .

Fie  $\varepsilon > 0$  și cum  $T^*T = A$  este un operator hermitian, iar funcția

$$f(T) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \varepsilon/2, \\ 2(1 - |t/3|) & \varepsilon/2 \leq |t| \leq \varepsilon, \\ 0 & |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

este continuă pe  $[-\|A\|, \|A\|]$  putem defini operatorul  $f(A)$  care este hermitian și să punem

$$M = \{x, f(A)x = x\}$$

care este evident un subspațiu închis, invariant pentru orice operator care comută cu  $A$ . Rămâne să arătăm că satisface și celelalte proprietăți din teoremă. Fie  $x \in M$ ,  $\|x\| = 1$  și deci

$$\|Ax\| = \|Af(A)x\| = \|f(A)Ax\| \leq \|Af(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda f(\lambda)| \leq \varepsilon$$

cum

$$\|Tx\|^2 = \langle Ax, x \rangle \leq \varepsilon$$

deducem că  $\|T\| \leq \varepsilon^{1/2}$ .

Să arătăm acum că  $M$  nu este  $\{0\}$ . În adevăr

$$\|[I - f(A)]f(2A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(I - f(\lambda))f(2\lambda)| = 0$$

și deci  $f(2A)X$  este în  $M$  care nu este zero deoarece

$$\|f(2A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(2\lambda)| \geq |f(0)| = 1.$$

Teorema este demonstrată.

Acest rezultat permite să demonstrăm următoarea teoremă care are un rol fundamental în demonstrația teoremei spectrale pentru operatori normali.

**TEOREMA 1.8.** Dacă  $p(x, y)$  este un polinom în două variabile și  $T$  este un operator normal, atunci

$$\sigma(p(T, T^*)) = \{p(\lambda, \tilde{\lambda}), \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*Demonstrație.* Fie  $p(x, y) = \sum a_{nm} x^n y^m$  și atunci  $p(T, T^*)$  are forma  $p(T, T^*) = \sum a_{nm} T^n T^{*m}$ . Dacă  $\lambda \in \sigma(T)$  atunci există  $x_j, \|x_j\| = 1$  astfel ca

$$(T - \lambda)x_j \rightarrow 0,$$

$$(T^* - \tilde{\lambda})x_j \rightarrow 0$$

și deci  $p(T, T^*)x_j - p(\lambda, \tilde{\lambda})x_j \rightarrow 0$ , de unde  $p(\lambda, \tilde{\lambda}) \in \sigma(p(T, T^*))$ .

Fie acum  $\mu \in \sigma(p(T, T^*))$  și cum operatorul  $B = p(T, T^*) - \mu I$  este normal și are pe 0 în spectru, din teorema 1.7 rezultă că pentru fiecare  $n$  există  $M_n$  astfel ca  $\|B/M_n\| \leq 1/n$  și cum  $T$  comută cu  $B^*B$ ,  $M_n$  reduce pe  $T$ . Fie  $\lambda_n \in \sigma(T/M_n)$ , există  $y_n, \|y_n\| = 1$  astfel ca

$$\|(\lambda_n - T)y_n\| \leq 1/n$$

și cum  $\{\lambda_n\}$  este mărginit de  $\|T\|$  există un subșir convergent, presupunem că este chiar  $\{\lambda_n\}$ . Evident  $\lambda = \lim \lambda_n$  este în  $\sigma(T)$  și evident  $(\tilde{\lambda}_n - T^*)y_n \rightarrow 0$ . În acest caz  $[p(T, T^*) - p(\lambda, \tilde{\lambda})]y_n \rightarrow 0$ . Cum  $p(T, T^*)y_n - \mu y_n \rightarrow 0$  rezultă că  $\mu = p(\lambda, \tilde{\lambda})$  și teorema este demonstrată.

Fie  $\sigma(T) = F$  care este o mulțime închisă și mărginită în planul complex, iar  $C_F$  algebra Banach a funcțiilor complexe continue pe  $F$  cu norma

$$\|f\| = \sup_{z \in \sigma(T)} |f(z)|$$

și  $\mathfrak{A}$  algebra polinoamelor în  $z$  și  $\bar{z}$  care are următoarele proprietăți :

1. separă punctele lui  $F$ ,
2.  $1 \in \mathfrak{A}$ ,
3.  $p \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bar{p} \in F, \overline{p(z)} = \bar{p}(z)$ .

În acest caz teorema lui Weierstrass-Stone ne dă că  $\mathfrak{A}$  este densă în  $C_F$  și  $p(z, \bar{z})$  definește un operator normal  $p(T, T^*)$ . Teorema de „spectral mapping” va rezulta utilizând și faptul că

$$p(z, \bar{z}) \rightarrow p(T, T^*)$$

este o izometrie a algebrei  $C_F$  pe algebra Banach a operatorilor generată pe  $T$ .

**TEOREMA 1.9.** *Dacă  $T$  este un operator normal atunci*

$$\|T\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}.$$

*Demonstrație.* Fie  $T$  un operator și  $\omega(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in W(T)\}$  unde

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}.$$

În acest caz are loc relația

$$\|Tx\|^2 + |\langle T^2x, x \rangle| \leq 2\omega(T)\|Tx\| \|x\|.$$

Pentru demonstrație a se vedea capitolul I, lema 1.6.3.

Din această relație rezultă că

1.  $\|T\| \leq 2\omega(T)$ ,
2.  $\omega(T^2) \leq [\omega(T)]^2$ .

În adevăr, din relația de mai sus deducem că

$$\|Tx\|^2 \leq 2\omega(T)\|Tx\| \|x\|$$

și deci  $\|Tx\| \leq 2\omega(T)\|x\|$  care este relația cerută.

Să luăm  $\|x\| = 1$  și deci

$$[\|Tx\| - \omega(T)]^2 + |\langle T^2x, x \rangle| \leq [\omega(T)]^2,$$

de unde rezultă evident că

$$\omega(T)^2 \leq \omega(T)^2.$$

Pentru  $T^{2^n}$  obținem că

$$\omega(T^{2^n}) \leq [\omega(T)]^{2^n}$$

și deci

$$\omega(T^{2^n})^{1/2^n} \leq \omega(T).$$

Cum  $T$  este normal

$$\|T^2\| = \|T\|^2$$

deoarece, pentru orice  $x$ , avem

$$\|T^2x\| = \|T^*Tx\|$$

și deci  $\|T^2\| = \|T\|^2$ . Pentru orice  $2^n$ ,  $T^{2^n}$  este normal, avem că

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$$

și deci

$$\|T\| = \|T^{2^n}\|^{-2^n} \leq [2\omega(T^{2^n})]^{-2^n} \leq 2^{-2^n}\omega(T).$$

Pentru  $n \rightarrow \infty$  obținem că

$$\|T\| \leq \omega(T)$$

și cum inegalitatea  $\omega(T) \leq \|T\|$  este evidentă, teorema este demonstrată.

Din faptul că aplicația

$$p(z, \bar{z}) \rightarrow p(T, T^*)$$

este o izometrie și algebra polinoamelor densă, putem defini exact în același mod ca la operatorii hermitieni, pentru orice funcție  $f \in C_F$  operatorul normal  $f(T)$ . Următorul rezultat este fundamental în teoria operatorilor normali.

**TEOREMA 1.10.** *Dacă  $T$  este un operator normal și  $f$  o funcție continuă și complexă definită pe  $\sigma(T)$  atunci*

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)).$$

*Demonstrație.* Fie  $\lambda \in \sigma(T)$ , deci există  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0,$$

$$T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \rightarrow 0$$

și dacă  $\{p_n\}$  este un șir de polinoame care converge către  $f$ , avem

$$[p_n(T, T^*) - p_n(\lambda, \bar{\lambda})]x_n \rightarrow 0$$

cu  $\{p_n(T, T^*)\}$  converge către  $f(T)$ . Cum  $p_n(T, T^*) - p_n(\lambda, \bar{\lambda})$  nu sînt invertibili și converg către  $f(T) - f(\lambda)I$  rezultă că și acesta nu este invertibil de unde deducem că  $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$ .

Acum, dacă  $\mu \notin f(\sigma(T))$  rezultă că  $\mu - f$  nu este zero pe  $\sigma(T)$  și deci  $g = \frac{1}{\mu - f}$ , există și este continuă. Dar avem

$$g(T) \cdot (\mu I - f(T)) = \left[ g \cdot \frac{1}{\mu - f} \right](T) = I$$

și deci  $\mu \notin \sigma(f(T))$ . Teorema este astfel demonstrată.

## TEOREMA LUI FUGLEDE-PUTNAM

Fie  $N$  un operator normal definit pe un spațiu Hilbert și  $N$  îl presupunem mărginit. Să presupunem că  $T$  este un operator arbitrar; de asemenea mărginit și are proprietatea că  $NT = TN$ . J. von Neumann a pus problema dacă  $T$  în acest caz nu are proprietatea că

$$TN^* = N^*T.$$

Această conjectură a lui von Neumann a fost demonstrată de B. Fuglede care a arătat că este posibil să considerăm și operatori nemărginiți. Rezultatul stabilit de Fuglede a fost generalizat de Putnam în modul următor: dacă  $N_1$  și  $N_2$  sînt doi operatori normali mărginiți și  $T$  un operator mărginit arbitrar cu proprietatea că

$$TN_1 = N_2T$$

atunci are loc relația

$$TN_1^* = N_2^*T$$

De asemenea a arătat că este posibil să considerăm operatori normali nemărginiți. În cele ce urmează vom expune acest rezultat împreună cu o variantă a teoremei lui Fuglede-Putnam.

## § 1. TEOREMA LUI FUGLEDE-PUTNAM

Vom da o demonstrație a teoremei lui Fuglede-Putnam pentru cazul cînd considerăm numai operatori mărginiți pe spații Hilbert și apoi vom expune o extindere la cazul spațiilor Banach.

**TEOREMA 1.** *Dacă  $N_1$  și  $N_2$  sînt operatori normali mărginiți și  $T$  un operator liniar mărginit, toți definiți pe un spațiu Hilbert  $E$  și*

$$TN_1 = N_2T,$$

atunci are loc relația

$$TN_1^* = N_2^*T.$$

*Demonstrație.* Este ușor de văzut că are loc și relația

$$TN_1^k = N_2^kT$$

oricare ar fi întregul  $k \geq 1$ . Dacă punem

$$\exp zB = e^{zB} = \sum_0^{\infty} \frac{z^n B^n}{n!}$$

cu  $B$  un operator mărginit pe  $E$  și  $z$  un număr complex arbitrar, avem

$$Te^{\bar{z}N_1} = e^{\bar{z}N_2}T$$

și deci

$$T = e^{\bar{z}N_2} Te^{-\bar{z}N_1}.$$

De aici obținem că

$$e^{\bar{z}N_2^*} Te^{-\bar{z}N_1^*} = e^{-\bar{z}N_2^*} e^{\bar{z}N_2} Te^{-\bar{z}N_1} e^{-\bar{z}N_1^*} = e^{(-\bar{z}N_2^* + \bar{z}N_2)} Te^{(-\bar{z}N_1 - \bar{z}N_1^*)},$$

deoarece  $N_1$  și  $N_2$  sînt operatori normali. Vom observa că operatorii

$$S_z = \bar{z}N_2 + (-\bar{z}N_2^*), \quad \bar{S}_z = -\bar{z}N_1 - \bar{z}N_1^*$$

sînt hermitieni și deci  $e^{iS_z}$  și  $e^{i\bar{S}_z}$  sînt contracții. Rezultă astfel că funcția analitică

$$z \rightarrow f(z) = e^{\bar{z}N_2^*} Te^{-\bar{z}N_1^*}$$

este mărginită în tot planul complex și trebuie să fie o constantă conform extensiei la funcții vectoriale a teoremei lui Liouville. Deci

$$f(z) = f(0) = T$$

rezultă că  $f'(z) = 0$ , care ne dă pentru  $z = 0$

$$N_2^* T = T N_1^*$$

și teorema lui Fuglede-Putnam este demonstrată.

*Observație.* Rezultatul obținut de Fuglede este cel dat mai sus pentru  $N_1 = N_2$ . Vom remarca faptul că teorema dată mai sus este o consecință simplă a teoremei lui Fuglede. În adevăr, să considerăm spațiul Hilbert  $\tilde{E} = E \times E$ , și fie operatorii

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}.$$

Este ușor de văzut că  $N$  este un operator normal pe  $\tilde{E}$  și

$$\tilde{T}N = N\tilde{T}.$$

Conform teoremei lui Fuglede avem și relația

$$\tilde{T}N^* = N^*\tilde{T}$$

care este echivalentă cu generalizarea dată de Putnam teoremei lui B. Fuglede.

**TEOREMA 2.** *Dacă  $N_1$  și  $N_2$  sînt doi operatori normali atunci sînt unitari echivalenți.*

*Demonstrație.* Fie deci  $N_2 = bN_1b^{-1}$  și deci  $N_2b = bN_1$ . Conform teoremei lui Fuglede-Putnam rezultă că avem și relația

$$bN_1^* = N_2^*b$$

și deci  $b^*N_2 = N_1b^*$ . Fie  $b = UR$  descompunerea polară canonică a operatorului  $b$  și vom observa că  $U$  este în acest caz unitar ( $R = (b^*b)^{1/2}$ ). Cum avem

$$N_1(b^*b) = (N_1b^*)b = (b^*N_2)b = b^*(N_2b) = (b^*b)N_1$$

deci  $N_1R = RN_2$ . În acest caz

$$N_2 = bN_1b^{-1} = (UR)N_1(R^{-1}U^{-1}) = URN_1R^{-1}U^* = UN_1U^*$$

și afirmația teoremei este demonstrată.

**Observația 1.** Vom observa că teorema lui Putnam este adevărată în orice algebră cu involuție dacă presupunem că teorema lui Fuglede este adevărată. De asemenea teorema 2 este adevărată în orice algebră în care teorema lui Putnam este adevărată și în care teorema rădăcinii pătrate este adevărată : orice element  $x$  din algebră (algebra este cu involuție,  $x \rightarrow x^*$ ) are proprietatea că există un element hermitian  $r = r^*$  astfel ca

$$r^2 = x^*x$$

cu proprietatea că  $b(x^*x) = (x^*x)b \Rightarrow br = rb$ .

**Observația 2.** Un exemplu de algebră în care teorema lui Fuglede-Putnam este adevărată este dat de algebrele cu urmă (trace). Fie  $A$  o algebră cu involuție. Prin „urmare” pe algebra  $A$  vom înțelege o funcție definită pe  $A$  cu valori într-un grup abelian astfel încît următoarele condiții sînt satisfăcute :

1.  $\text{tr}(x + y) = \text{tr}x + \text{tr}y$ ,
2.  $\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx)$ ,
3.  $\sum_1^k \text{tr}(x_i^*x_i) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ .

Fie pentru aceasta  $A_n$  algebra matricelor  $x = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} \in A$  cu involuția

$$x \rightarrow x^* = (a_{ij}^*)$$

pe care se poate defini o urmă prin

$$\text{tr} x = \sum_{i=1}^n \text{tr} a_{ii}.$$

Fie deci  $x$  un element normal în  $A$  (adică  $x^*x = xx^*$ ) și  $y$  un element arbitrar în  $A$  cu proprietatea că  $xy = yx$ . Trebuie să arătăm că  $x^*y = yx^*$ . Fie  $z = yx^* - x^*y$ . Deci avem

$$\begin{aligned} zz^* &= yx^*xy^* - yx^*y^*x - x^*yxy^* + x^*yy^*x = \\ &= yxx^*y^* - yx^*y^*x - xx^*yy^* + x^*yy^*x = \\ &= xyx^*y^* - yx^*y^*x - xx^*yy^* + x^*yy^*x. \end{aligned}$$

Cum

$$\text{tr}(xyx^*y^*) = \text{tr}(yx^*y^*x), \quad \text{tr}(xx^*yy^*) = \text{tr}(x^*yy^*x)$$

avem că  $\text{tr} zz^* = 0$  și conform ipotezei  $z = 0$ . Teorema este demonstrată.

*Observația 3.* În unele cazuri grupul abelian de care a fost vorba în observația 2 este corpul numerelor complexe.

Vom da acum o teoremă care poate fi considerată o extensie a teoremei lui Fuglede -Putnam.

**TEOREMA 3.** Fie  $E_1$  și  $E_2$  două spații Hilbert și  $N_1$  un operator normal pe  $E_1$  și  $N_2$  un operator normal pe  $E_2$ , iar  $T$  un operator liniar și continuu definit pe  $E_1$  cu valori în  $E_2$ . Dacă  $N_2T = TN_1$  atunci are loc și  $TN_1^* = N_2^*T$ .

*Demonstrație.* Să considerăm spațiul Hilbert

$$H = \{(x, y), x \in E_1, y \in E\}$$

cu produsul scalar

$$\langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$$

și să definim operatorii

$$\tilde{N}_1(x, y) = (N_1x, y),$$

$$\tilde{N}_2(x, y) = (x, N_2y),$$

$$\tilde{T}(x, y) = (0, Tx).$$

Se verifică ușor relațiile

$$\tilde{N}_1^*(x, y) = (N_1^*x, y),$$

$$\tilde{N}_2^*(x, y) = (x, N_2^*y)$$

și cum

$$(\tilde{T}\tilde{N}_1)(x, y) = \tilde{T}(Nx, y) = (0, TN_1x)$$

$$(\tilde{N}_2\tilde{T})(x, y) = \tilde{N}_2(0, Tx) = (0, N_2Tx),$$

de unde obținem că

$$\tilde{T}\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2\tilde{T}.$$

Cum  $\tilde{N}_1$  și  $\tilde{N}_2$  sînt operatori normali, putem aplica teorema lui Fuglede-Putnam și obținem că

$$\tilde{T}\tilde{N}_1^* = \tilde{N}_2^*\tilde{T}$$

care este echivalentă cu afirmația teoremei.

Putem da de asemenea o ușoară extindere a teoremei 2 astfel:

**TEOREMA 4.** *Fie  $N$  un operator normal mărginit definit pe un spațiu Hilbert și  $T_1, T_2$  doi operatori mărginiți pe același spațiu Hilbert. Să presupunem că sînt satisfăcute următoarele relații:*

$$1. NT_2 = T_1N,$$

$$2. NT_1 = T_2N,$$

atunci au loc relațiile

$$1. N^*T_2 = T_1N^*,$$

$$2. N^*T_1 = T_2N^*.$$

*Demonstrație.* Să considerăm algebra matricelor  $x = (a_{ij})$ ,  $a_{ij}$  operatori liniari și mărginiți,  $1 \leq i, j \leq 2$  care poate fi considerată o algebră de operatori pe un spațiu Hilbert. Fie operatorii

$$x = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N & 0 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

și avem relațiile

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & NT_2 \\ NT_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad yx = \begin{pmatrix} 0 & T_1N \\ T_2N & 0 \end{pmatrix}$$

rezultă că putem aplica teorema lui Fuglede, deci

$$x^*y = yx^*$$

care este echivalentă cu afirmațiile din teoremă.

Teorema lui Fuglede-Putnam are aplicații interesante în probleme de structură a operatorilor, iar extensia sa la elemente dintr-o algebră Banach la probleme din teoria operatorilor spectrali în sens Dunford.

# BIBLIOGRAFIE

1. N. I. AHIEZER and I. M. GLAZMAN, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Frederik Ungar Pub. Comp., vols. I, II, 1961, 1963.
2. T. ANDÔ, *On hyponormal operators*, Proc. A.M.S., **14**, 290 — 91 (1963).
3. T. ANDÔ, *Operators with a norm condition* (va apărea).
4. T. ANDÔ, *A note on invariant subspaces of a compact normal operator*, Archiv Math., **14**, 337 — 340 (1963).
5. N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. of Math., **60**, 345 — 350 (1954).
6. A. AMBROSETTI, *Una teorema di esistenza per le eq. diff. negli spazi di Banach*, Rend. Mat. Sem. della Univ. Padova, **40** (1967).
7. A. AMBROSETTI, *Proprietăți spectrale de certi operatori lineari non compatti*, Rend. Mat. Sem. Della Univ. Padova, **42**, 189 — 200 (1969).
8. W. B. ARVESON, *Subalgebras of  $C^*$ -algebras*, Acta Math., **123** 141 — 224 (1969).
9. W. B. ARVESON, *Subalgebras of  $C^*$ -algebras, II*, Acta Math., **128**, 71 — 108 (1972).
10. W. B. ARVESON and J. FELDMAN, *A note on invariant subspaces*, Mich. Math. J., **15**, 61 — 64 (1968).
11. W. B. ARVESON, *Unitary invariants for compact operators*, Bull. A.M.S. **76**, 88 — 91 (1970).
12. E. ASPLUND and V. PRÁK, *A minmax inequality for operators and a related numerical range*, Acta Math., **126**, 53 — 62 (1971).
13. R. F. V. ANDERSON, *The Weyl functional calculus*, J. Funct. Analysis **4**, 240 — 268 (1969).
14. R. F. V. ANDERSON, *The multiplicative Weyl functional calculus*, J. Funct. Analysis, **9**, 423 — 440 (1972).
15. N. ARONSZAJN, *Quadratic forms on vector spaces*, Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 1960, Jerusalem, 1961.
16. N. ARONSZAJN and R. D. BROWN, *Finite-dimensional perturbations of spectral problems and variational approximation methods for eigenvalue problems I, Finite-dimensional perturbations* Studia Math., **36**, 1 — 76 (1970).
17. N. ARONSZAJN and U. FIKMAN, *Algebraic spectral problems*, Studia Math., **30**, 273 — 338 (1968).
18. S. BANACH, *Theorie des Operations linéaires*, Monographie Mathématique, Warsaw, 1932.
19. A. BROWN, *On a class of operators*, Proc. A.M.S., **4**(5), 723 — 728 (1953).
20. E. BERKSON, H. R. DOWSON and G. ELLIOT, *On Fuglede's theorems and scalar-type operators* (va apărea).
21. E. BERKSON, *A characterization of scalar type operators on reflexive Banach Spaces*, Pacific J. Math., **13**, 365 — 373 (1963).
22. E. BERKSON and H. R. DOWSON, *Prespectral operators*, Illinois Math. J., **13**, 291 — 315 (1969).
23. E. BERKSON, *Some characterizations of  $C^*$ -algebras*, Illinois Math. J., **10**, 1 — 8 (1966).
24. E. BERKSON, *Some types of Banach spaces, Hermitian operators and Bade functionals*, Trans. A.M.S., **116**, 376 — 850 (1965).
25. E. BERKSON, *Hermitian projections and orthogonality in Banach spaces*, Proc. London Math. Soc., (3), **24**, 101 — 118 (1972).
26. E. BERKSON, *Action of  $W^*$ -algebras on Banach spaces*, Math. Ann., **189**, 261 — 271 (1970).
27. H. P. BOHNENBLUST and A. SOBczyk, *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull.-A.M.S., **44**, 91 — 93 (1938).
28. H. P. BOHNENBLUST and S. KARLIN, *Geometrical properties of the unit sphere in Banach algebras*, Ann. of Math., **62** (2), 217 — 229, (1955).
29. A. BEURLING, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math., **81**, 239 — 255 (1949).

30. S. K. BERBERIAN, *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. A.M.S., 10, 175 — 182 (1959).
31. S. K. BERBERIAN, *Aproximate proper vectors*, Proc. A.M.S., 13, 111 — 114 (1962).
32. S. K. BERBERIAN, *A note on hyponormal operators*, Pacific J. Math. 12, 1171 — 1175. (1962).
33. S. K. BERBERIAN, *A note on operators unitarily equivalent to their adjoints*, Journ. Lond. Math. Soc., 37, 403 — 404 (1962).
34. S. K. BERBERIAN, *The numerical range of a normal operator*, Duke Math. J., 31, 479 — 484 (1964).
35. S. K. BERBERIAN, *An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal operators*, Mich. Math. J., 16, 273 — 279 (1969).
36. S. K. BERBERIAN, *Some conditions on an operator implying normality I*, Math. Ann., 184, 188 — 192 (1970).
37. S. K. BERBERIAN, *Some conditions on an operator implying normality II*, Proc. A.M.S., 26 (2), 277 — 281 (1970).
38. S. K. BERBERIAN, *Some conditions on an operator implying normality III*, Proc. Japan Acad. Sci., 46, 630 — 632 (1970).
39. S. K. BERBERIAN, *The Weyl spectrum of an operator*, Indiana Univ. Math. J., 20, 521 — 544 (1970).
40. S. K. BERBERIAN, *Conditions on an operator implying  $\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T)$* , Trans. A.M.S., 154, 267 — 272 (1971).
41. S. K. BERBERIAN and G. H. ORLAND, *On the closure of the numerical range of an operator*, Proc. A.M.S., 18, 499 — 503 (1967).
42. S. K. BERBERIAN, *The spectral mapping theorem for a Hermitian operator*, Amer. Math. Monthly, 70, 1049 — 1051 (1963).
43. A. BROWN and R. G. DOUGLAS, *On maximum theorem for analytic operator functions*, Acta Math. Sci., (Szeged) 26, 325 — 327 (1965).
44. F. BROWDER, *On the spectral theory of elliptic differential operators I*, Math. Ann., 142, 22 — 130 (1961).
45. J. BERNAU and F. SMITHIES, *A note on normal operators*, Proc. Camb. Phil. Soc., 59, 727 — 729 (1963).
46. J. BERNAU, *The spectral theorem for normal operators*, J. London Math. Soc., 40, 478 — 486 (1965).
47. J. V. BAXLEY, *Some general conditions implying Weyl's theorem*, Rev. Roum. de Math. Pures Appl. XVI (8), 1163 — 66 (1971).
48. J. V. BAXLEY, *On the Weyl spectrum of a Hilbert space operator* (va apărea în Proc. A.M.S.).
49. R. H. BOULDIN, *Essential spectrum for a Hilbert space operator*, Trans. A.M.S., (va apărea).
50. R. H. BOULDIN, *The Weyl essential spectrum*, Proc. A.M.S., 28, 531 — 536. (1971).
51. R. H. BOULDIN, *The numerical range of a product I*, J. Math. Anal. Appl., 32, 459 — 467 (1970).
52. R. H. BOULDIN, *The numerical range of a product II*, J. Math. Anal. Appl., 33, 212 — 219 (1971).
53. A. R. BERNSTEIN and A. ROBINSON, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacific J. Math. 16, 421 — 431 (1966).
54. L. BIEBERBACH, *Eine Singularitäten freie Fläche constanten k mmung in Hilbertschen R ume*, Comm. Math. Helv., 4 (1932).
55. D. BLANU A, * ber die Einbettung hyperbolischen R ume in Euklidischer R ume* Monatsh f r Math., 59 (1955).
56. G. BJ RCK and V. THOM E, *A property of bounded normal operators in Hilbert space*, Arkiv f r Math., 4 (43), 551 — 555 (1961).
57. G. BJ RCK, *Linear partial differential operators and generalized distributions*, Arkiv f r Math., 6 (21), 352 — 407 (1966).
58. W. A. BECK and C. R. PUTNAM, *A note on normal operators and their adjoints*, J. London Math. Soc., 31, 213 — 216 (1956).
59. A. BROWDER, *Introduction to function algebras*, Benjamin, New York, 1969.
60. A. BROWDER, *On Bernstein's inequality and the norm of Hermitian operators*, Amer. Math. Monthly, 78, 871 — 873 (1971).
61. G. DE BARRA, J. R. GILLES and B. SIMS, *On the numerical range of compact operators on Hilbert space*, J. London Math. Soc., (2) 5, 704 — 705 (1972).
62. J. D. BUCKHOLTZ, *A characterization of exponential series*, Amer. Math. Monthly, 73, 121 — 123 (1966).
63. V. BARGMAN, *Note on Wigner's theorem on symmetry operators*, J. Math. Phys., 5, 862 — 868 (1964).

64. J. BRAM, *Subnormal operators*, Duke Math. J., **22**, 75 — 94 (1955).
65. M. S. BRODSKI and M. S. LIVSITZ, *Spectralni analiz nesamosopreajennyh operatorov i promejutocinie sistem*, Uspehi mat nauk, **XIII**, 1, 79 (1958).
66. I. D. BERG, *An extension of the Weyl-von Neumann theorem to normal operators*, Trans. A.M.S., **160**, 365 — 371 (1971).
67. G. BIRKHOFF, *Orthogonality in linear spaces*, Duke Math. J., **1**, 169 — 172 (1935).
68. F. BAUER, *On the fields of values subordinate to a norm*, Num. Math., **4**, 103 — 113 (1962).
69. F. F. BONSALE, *Compact linear operators*, Lectures Notes, Yale Univ., 1967.
70. F. F. BONSALE, *Compact linear operators from an algebraic stand point*, Glasgow Math. J., **VIII**, 41 — 49 (1967).
71. F. F. BONSALE, *A survey of Banach algebra theory*, Bull. London Math. Soc., **2**, 257 — 274 (1970).
72. F. F. BONSALE, *Operators that acts compactly on an algebra of operators*, Bull. London Math. Soc., **1**, 163 — 170 (1969).
73. F. F. BONSALE and M. J. CRABB, *The spectral radius of a hermitian Element of a Banach algebra*, Bull. London Math. Soc., **2**, 178 — 180 (1970).
74. F. F. BONSALE and J. DUNCAN, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, Camb. at the Univ. Press. Lond. Math. Soc., Lectures Notes, **2** (1973).
75. F. F. BONSALE, B. E. CAIN and H. SCHNEIDER, *The numerical range of a continuous mapping of a normed space*, Acq. Math. **2**, 86 — 93 (1968).
76. F. F. BONSALE, *The numerical range of an element of a normed algebra*, Glasgow Math. Soc., **10**, 68 — 72 (1969).
77. F. F. BONSALE, *Dually irreducible representations of Banach algebras*, Quart. J. Math. (Oxford) **(2)**, **19**, 97 — 111 (1968).
78. F. F. BONSALE and J. DUNCAN, *Dual representations of Banach algebras*, Acta Math., **11**, 79 — 112 (1967).
79. F. F. BONSALE and J. DUNCAN, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc., Lectures Notes Series Nr. 10, Camb. Univ. Press, 1971.
80. B. BOLLOBÁS, *The power inequality in Banach spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., **69**, 411 — 415 (1971).
81. B. BOLLOBÁS, *A property of hermitian elements*, J. London Math. Soc., **(2)** **4**, 379 — 380 (1971).
82. R. PALLU de la BARRIÈRE, *L'existence de sous-espaces stables d'après Wermer*, Séminaire Bourbaki, Decembre, 1953, 85 — 101.
83. L. A. COBURN, *Weyl's theorem for non-normal operators*, Mich. Math. J., **13**, 285 — 288 (1965).
84. J. W. CALKIN, *Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces*, Ann. of Math. **42**, 839 — 873 (1941).
85. J. E. CAMPBELL, *On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups*, Proc. Lond. Math. Soc., **23**, 381 — 390 (1897).
86. S. R. CARADUS, *Operators with finite ascent and descent*, Pacific J. Math., **18**, (3), 437 — 449 (1966).
87. S. R. CARADUS, *Operators of Riesz type*, Pacific J. Math., **18** (1), 61 — 71 (1966).
88. J. W. CALKIN, *Symmetric transformations in Hilbert space*, Duke Math. J., **7**, 504 — 508 (1940).
89. P. J. COHEN, *A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem*, Amer. Math. Monthly (1969).
90. T. CARLEMAN, *Les fonctions quasi-analytiques*, Paris, Gauthier Villars, 1926.
91. S. O. CARLSON, *Orthogonality in normed linear spaces*, Arkiv. för Math., **4**, 22, 297 — 310 (1961).
92. M. J. CRABB, *Some results on the numerical range of an operator*, J. Lond. Math. Soc., **(2)**, **2**, 741 — 745 (1970).
93. M. J. CRABB, *The power inequality in normed spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **17**, 2, 237 — 240 (1971).
94. M. J. CRABB, *The powers of an operator and numerical radius*, Mich. Math. J., **18**, 253 — 256 (1971).
95. M. J. CRABB, J. DUNCAN and C. M. MCGREGOR, *Some extremal problems in the theory of numerical ranges*, Acta Math., **128**, 123 — 142 (1972).
96. M. J. CRABB, J. DUNCAN and C. M. MCGREGOR, *Mapping theorems and numerical radius*, Proc. Lond. Math. Soc., **(3)**, **25**, 486 — 502 (1972).
97. J. A. CLARKSON, *Uniformly convex spaces*, Trans A.M.B., **40**, 396 — 414 (1936).
98. D. F. CUDIA, *The geometry of Banach spaces Smoothness*, Trans. A. M. S., **110**, 284 — 314 (1964).
99. GH. CONSTANTIN, *Asupra spectrului unui operator liniar pe un spațiu Banach*, Anal. Univ. Timișoara, **V**, 79 — 81 (1967).

100. GH. CONSTANTIN, *Asupra unei clase de operatori pe spații Hilbert*, Anal. Univ. Timișoara, V, 73 — 77 (1967).
101. GH. CONSTANTIN și I. ISTRĂȚESCU, *Cîteva observații asupra operatorilor evarihermitici*, Anal. Univ. Timișoara, vol. VI, 125 — 28 (1968).
102. GH. CONSTANTIN and I. ISTRĂȚESCU, *On Riesz operators with uniformly bounded iterates*, Mat. Vestnik, 6, 376 — 378 (1969).
103. GH. CONSTANTIN, *On some classes of normaloid operators*, Accad. Naz. Lincei, XLVI, 133 — 136 (1969).
104. GH. CONSTANTIN, *On a class of operators*, Accad. Naz. Lincei, XLVI, 241 — 244 (1969).
105. GH. CONSTANTIN, *Some remarks on a class of operators*, Yokohama Math. J., 18, 1 — 3 (1970).
106. GH. CONSTANTIN, *Cesàro-Hilbert-Schmidt operators*, Atti Accad. Naz. Lincei, LII, 304 — 306 (1972).
107. GH. CONSTANTIN, *Operators of ces-p type*, Atti Accad. Naz. Lincei, LII, 875 — 878 (1972).
108. GH. CONSTANTIN, *Some spectral properties for the locally  $\alpha$ -contraction operators*, Boll. Unione Mat. Ital., 4, 6 323 — 330 (1972).
109. GH. CONSTANTIN and V. I. ISTRĂȚESCU, *On quasi-analytic vectors for some classes of operators*, Portugalie Math. (1974).
110. GH. CONSTANTIN, *Some remarks on the structure of polynomially Riesz operators*, Atti Accad. Naz. Lincei (1973).
111. W. F. DONOGHUE, *On the numerical range of a bounded operator*, Mich. Math. J., 4, 261 — 263 (1957).
112. W. F. DONOGHUE, *On a problem of Nieminen*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 16, 31 — 33 (1963).
113. W. F. DONOGHUE, *The lattice of invariant subspaces of completely continuous quasi-nilpotent operator*, Pacific J. Math., 7, 1031 — 1035 (1957).
114. J. DIXMIER, *Sur la relation  $i(PQ - QO) = 1$* , Comp. Math., 13, 263 — 270 (1958).
115. J. DIXMIER, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier Villars, Paris, 1964.
116. N. DUNFORD, *Spectral Theory II, Resolution of the identity*, Pacific J. Math., 2, 559 — 614 (1952).
117. N. DUNFORD, *Spectral operators*, Pacific J. Math., 4, 321 — 354 (1954).
118. N. DUNFORD, *A survey of the theory of spectral operators*, Bul. A.M.S. 64, 217 — 274 (1958).
119. N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, *Linear operators*, vol. I, II, Interscience, N. Y., 1967, 1963.
120. H. R. DOWSON, *On the algebra generated by a Hermitian operator*, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2), 18, 89 — 91 (1972).
121. E. DURST, *Remark on a paper of S. K. Berberian*, Duke Math. J., 35, 795 — 796 (1966).
122. J. DIEUDONNÉ, *Quasi-hermitian operators*, Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, 115 — 122.
123. R. G. DOUGLAS and C. PEARCY, *On a topology for invariant subspaces*, J. Funct. Analysis, 2, 323 — 341 (1968).
124. G. DARBO, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Padova, 24, 84 — 92 (1955).
125. J. A. DYER, E. A. PEDERSEN and P. PORCELLI, *On equivalent formulation of the invariant subspace conjecture*, Bull. A. M.S., 78 (6) 1020, 1023 (1972).
126. M. M. DAY, *Normed linear spaces*, Springer Verlag, Berlin, 1958.
127. J. DUNCAN, *The evaluation functionals associated with an algebra of bounded operators*, Glasgow Math. J., 10, 73 — 76 (1969).
128. J. DUNCAN, C. M. MCGREGOR, J. D. PRICE and A. J. WITKE, *The numerical index of a normed space* (va apare).
129. M. EMBRY, *Conditions implying normality*, Pacific J. Math., 18, (1968), J. Math. Anal. Appl., 22, 10 — 11 (1968).
130. M. EMBRY, *Strictly cyclic operator algebras on a Banach space*, Pacific J. Math., 45 (2), 443 — 453 (1973).
131. M. EMBRY, *The numerical range of an operator*, Pacific J. Math., 32, 647 — 650 (1970).
132. M. EMBRY, *Classifying special operators by means of subsets associated with the numerical range*, Pacific J. Math., 38, 61 — 65 (1971).
133. W. F. EBERLEIN, *A note on spectral theorem*, Bull. A.M.S., 52, 328 — 331 (1964).
134. D. FINKELSTEIN, J. M. JAUCH, S. SCHIMINOWICH and D. SPEISER, *Foundations of quaternion quantum mechanics*, J. Math. Phys. 3, 207 — 220 (1962).
135. B. FULGLEDÉ, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci., 36 35 — 40 (1950).
136. T. FURUTA, *On a class of paranormal operators*, Proc. Japan Acad., 45, 594 — 598 (1967).
137. T. FURUTA and Z. TAKEDA, *A characterization of spectraloid operators and its generalization*, Proc. Japan Acad., 43, 599 — 604 (1967).

138. T. FURUTA, *Some characterizations of convexoid operators*, Revue Roum. Math. Pure Appl., XVIII (6), 893 — 900 (1973).
139. T. FURUTA, M. HORIE and R. NAKAMOTO, *A remark on a class of operators*, Proc. Japan Acad., 44, 607 — 609 (1967).
140. T. FURUTA and R. NAKAMOTO, *On tensor products of operators*, Proc. Japan Acad., 45, 680 — 685 (1969).
141. T. FURUTA, *On some theorems of Berberian and Sheth.*, Proc. Japan Acad., 46, 841 — 845, (1970).
142. T. FURUTA, *On the numerical range of an operator*, Proc. Japan Acad., 47, 279 — 284 (1971).
143. T. FURUTA, *Certain numerical radius contraction operators*, Proc. A.M.S., 29, 521 — 524 (1971).
144. J. FREEMAN, *Perturbations of the shift operators*, Trans. A.M.S. 114, 251 — 260 (1965).
145. R. P. FEYNMAN, *An operator calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev., 84, 108 — 28 (1951).
146. U. FIXMAN, *Problems in spectral operators*, Pacific J. Math., 1029 — 1059 (1959).
147. U. FIXMAN, *On algebraic equivalence between pairs of linear transformations*, Trans. A.M.S., 113, 424 — 453 (1964).
148. U. FIXMAN and F. A. ZORZITTO, *A purity criterion for pairs of linear transformations* (Queen's University, Kingston Ontario, Preprints Nr. 1972. 3k.). (va apare).
149. C. FOIAŞ, *Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux*, Acta Math. Sci. Szeged, 18, 15 — 20 (1957).
150. C. FOIAŞ, *La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert*, Bull. Sci. Math. France, 85, 263 — 282 (1957).
151. C. FOIAŞ, *On strongly continuous semigroups of spectral operators in Hilbert spaces*, Acta Sci. Math. Szeged, 19, 188 — 191 (1958).
152. C. FOIAŞ, *Unele aplicații ale multimiilor spectrale*, St. cerc. mat., 10, 365 — 401 (1959).
153. C. FOIAŞ, *Elemente completamentului continuu e quasicompletamentului continuu di una algebra di Banach*, Rend. Naz. Lincei, 10, 155 — 160 (1956).
154. C. FOIAŞ (in colab. cu I. KOVAČ), *Une caractérisation nouvelle des algebres de von Neumann finies*, Acta Sci. Math. Szeged, 23, 272 — 273 (1962).
155. C. FOIAŞ, *Decomposition en operators et vecteurs propres*. I. Revue Roum. de Math. Pure et Appl., 7, 241 — 282 (1962). II. Revue Roum. de Math. Pure Appl., 7, 571 — 602 (1962).
156. C. FOIAŞ, A se vedea și B. Sz. Nagy și C. Foiaş.
157. M. FURI and A. VIGNOLI, *Fixed points for densifying mappings*, Rend. Accad. Lincei, 47, (7), (1969).
158. B. W. GLICKFELD, *A metric characterization of  $C(X)$  and its generalization to  $C^*$ -algebras*, Illinois Math. J., 10, 547 — 556 (1966).
159. B. W. GLICKFELD, *On an inequality of Banach algebra geometry and semi-inner product space theory*, Illinois Math. J., 14(1), 76 — 82 (1970).
160. K. GUSTAFSON, *Positive (Noncommuting) operators products and Semigroups*, Math. Zeitschr., 105, 160 — 172 (1968).
161. K. GUSTAFSON, *A perturbation lemma*, Bull. A.M.S., 72, 334 — 338 (1966).
162. K. GUSTAFSON, *Necessary and sufficient conditions for Weyl's theorem*, Mich. Mat. J., 19, 71 — 81 (1972).
163. K. GUSTAFSON, *State diagrams for Hilbert space operators*, J. Math. Mech., 18, 33 — 46 (1968) (1969).
164. K. GUSTAFSON, *On projections of self-adjoint operators and operator product adjoints*, Bull. A.M.S., 75, 739 — 741 (1969).
165. K. GUSTAFSON, *Doubling perturbation sizes and preservation of operator indices in normed linear spaces*, Proc. Camb. Philos. Soc., 66, 281 — 294 (1969).
166. K. GUSTAFSON, *Weyl's theorem*, Linear operator and Approximation, vol. 20, Birkhauser Verlag, 1972, 80 — 94.
167. K. GUSTAFSON and J. WEIDMANN, *On the essential spectrum*, J. Math. Anal. Appl., 25, 121 — 127 (1969).
168. J. R. GILES, *Classes semi-inner product spaces*, Trans. A.M.S., 129, 436 — 447 (1967).
169. R. GODEMENT, *Théorème tauberienne et théorie spectrale*, Ann. SciEcole Norm. Sup., (3), 64, 119 — 138 (1947).
170. T. A. GILLESPIE, *An invariant subspace theorem of J. Feldman*, Pacific J. Math., 26, 67 — 72 (1968).
171. W. GIVENS, *Field of values of a matrix* Proc. A.M.S., 3, 206 — 209 (1952).
172. A. M. GLEASON, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math., 19, 171 — 172 (1967).

173. L. M. GELFAND and M. NAIMARK, *On the imbedding of normed rings into the rings of operators in Hilbert space*, Mat., Sb., 12, 197 — 213 (1943).
174. F. GILFEATHER, *The structure and asymptotic behaviour of polynomially compact operators*, Proc. A. M.S., 25, 127 — 134 (1970).
175. F. GILFEATHER, *Asymptotic convergence of operators in Hilbert space*, Proc. A.M.S., 22, 69 — 76 (1969).
176. M. D. GEORGE, *The spectrum of an operator in Banach space*, Proc. A.M.S., 16, 980 — 982 (1965).
177. P. HALMOS, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea Publ. Co., N. Y., 1951.
178. P. HALMOS, *Finite dimensional spaces*, Van Nostrand, Co. N. Y., 1958.
179. P. HALMOS, *Normal dilations and extensions of operators*, Summa Brasil. Math., 2, 125 — 134 (1950).
180. P. HALMOS, *Commutation and spectral properties of normal operators*, Acta Math. Sci. (Szeged), 12, 153 — 156 (1950).
181. P. HALMOS, *Commutators of operators*, Amer. J. Math., 74, 237 — 240 (1952).
182. P. HALMOS, *Commutators of operators II*, Amer. J. Math., 76, 191 — 198 (1954).
183. P. HALMOS, *Shifts on Hilbert spaces*, Journ. für Reine und Angew. Math., 208, 102 — 112 (1961).
184. P. HALMOS, *A glimpse onto Hilbert space*, Lectures in Math., J., Wiley, N. Y., 1963.
185. P. HALMOS, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton, 1967.
186. P. HALMOS, *Invariant subspaces of polynomially compact operators*, Pacific J. Math., 16, 433 — 437 (1966).
187. S. HILDEBRANDT, *The closure of the numerical range of an operator as spectral set*, Comm. Pure Appl. Math., 17, 415 — 421 (1964).
188. S. HILDEBRANDT, *Numerischer Wertebereich und Normale Dilationen*, Acta Sci Math., (Szeged), 26, 187 — 190 (1965).
189. S. HILDEBRANDT, *Über den numerischen Wertebereich eines Operatoren*, Math. Ann., 163, 230 — 247 (1966).
190. E. HILLE, *On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra*, Math. Ann., 136, 46 — 57 (1958).
191. E. HILLE, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Collop. Publ. XXXI, New York, 1948.
192. I. N. HERSTEIN, *On a theorem of Putnam and Wintner*, Proc. A. M. S., 8, 525 — 536 (1957).
193. L. A. HARRIS, *Schwarz's lemma in normed linear space*, Proc. Nat. Acad. Sci., 62, 1014 — 1017 (1969).
194. L. A. HARRIS, *The numerical range of holomorphic functions*, Amer. J. Math., 93, 1005 — 1019 (1971).
195. L. A. HARRIS, *Banach algebra with involution and Möbius transformations*, J. Funct. Analysis, II, 1 — 16 (1972).
196. L. A. HARRIS, *A continuous form of Schwarz's lemma in normed linear spaces*, Pacific J. Math., 38, 635 — 639 (1971).
197. L. A. HARRIS, *Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces (va apărea)*.
198. F. HAUSDORFF, *Der Wertvorkat eine Bilinearform*, Math. Zeitschr. 3, 314 — 316 (1919).
199. H. HEUSER, *Über Operatoren mit endlichen Defekten*, Inaug. Dis. Tübingen, 1956.
200. H. HEUSER, *On the spectral theory of symmetric finite operators*, Trans. A.M.S., 94 (2), 327 — 336 (1960).
201. H. HEUSER, *Zur Eigenwerttheorie einer Klasse symmetrischer Operatoren*, Math. Zeitschr., 74, 167 — 185 (1960).
202. H. HEUSER, *Die Iteration finiter Operatoren auf Räumen mit Halbscalarprodukt*, Math. Ann., 182, 213 — 231 (1969).
203. H. HEUSER, *Z-symmetrisierbare Operatoren*, Revue Roum. Math. Pure et appl., XIII (2), 177 — 189 (1968).
204. H. HEUSER, *Über Eigenwerte und Eigenlösungen symmetrisierbarer finiter Operatoren*, Arch. Math., 10, 12 — 20 (1959).
205. T. B. HOOVER, *Hyperinvariant subspaces for n-normal operators*, Acta Math. Sci. (Szeged), 32, 1 — 2, 109 — 119 (1971).
206. E. HEINZ, *Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren*, im Hilbertschen Raum. Göttinger. Nachr. 5 — 6 (1952).
207. K. HOFFMAN, *Banach spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1962.
208. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press., 1934.

209. H. HELSON, *Lectures on Invariant subspaces*, Academic Press, Inc., New York, 1964.
210. L. INGELSTAM, *Real Banach algebras*, Arkiv für Math., 5 (1964).
211. I. ISTRĂȚESCU, *Asupra unei clase de operatori liniari pe spații Hilbert*, Anal. Univ. Timișoara, V, 119 — 22 (1967).
212. I. ISTRĂȚESCU, *Asupra subspațiilor invariante pentru o clasă de operatori pe spații Hilbert*, Anal. Univ. Timișoara, V, 115 — 117 (1967).
213. I. ISTRĂȚESCU and V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators*, I, Proc. Japan Acad., 43, 605 — 606 (1967).
214. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators II*, Proc. Japan Acad., 43, 957 — 960 (1967).
215. I. ISTRĂȚESCU și V. I. ISTRĂȚESCU, *Operatori normaloizi*, St. cerc. mat., 20, 503 — 511 (1968).
216. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On normaloid operators*, Math. Zeitschr., 105, 153 — 156 (1968).
217. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *A remark on scattering theory with two Hilbert spaces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XIII, 1101 — 1102 (1968).
218. I. ISTRĂȚESCU, *Structure theorem for some classes of operators*, Proc. Japon Acad., 45, 586 — 589 (1969).
219. I. ISTRĂȚESCU, *On operators with uniformly bounded iterates*, Mat. Vestnik, 6, 373 — 375 (1969).
220. I. ISTRĂȚESCU și V. I. ISTRĂȚESCU, *Operatori normaloizi II*, St. cerc. mat., 21, 937 — 946 (1969).
221. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On quasi-normalizable operators I*, Atti Naz. Lincei, XLVI, 345 — 347 (1969).
222. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On quasi-normalizable operators II*, Atti Naz. Lincei, XLVI, 523 — 525 (1969).
223. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On bare and semi-bare point forms some classes of operators*, Portugaliae Math., 29, 205 — 211 (1970).
224. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *A note on Weyl's spectrum of an operator*, Rev. Roum. Math. Pure et Appl., XV, (1970) 1445 — 1447.
225. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators II*, Math. Ann., 194, 126 — 134 (1971).
226. I. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On character of singly  $C^*$  algebras*, Proc. Japan Acad., 47, 42 — 43 (1971).
227. I. ISTRĂȚESCU, *On unimodular contractions on Banach spaces and Hilbert spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei, L (1971) 216 — 219.
228. I. ISTRĂȚESCU, *On some classes of contractions*, Atti Accad. Naz. Lincei, L 679 — 681 (1971).
229. I. ISTRĂȚESCU, *Remarks concerning uniformly bounded operators*, Canad. Math. Bull., 15 (2), 215 — 217 (1972).
230. I. ISTRĂȚESCU, *Unimodular numerical contractions in Hilbert spaces*, Proc., Japan Acad., 47, 824 — 827 (1971).
231. I. ISTRĂȚESCU, *Perturbation of the monotons shift*, Yokohama Math. J. XX, 2, 107 — 113 (1972).
232. A. ISTRĂȚESCU and V. I. ISTRĂȚESCU, *On the theory of fixed point for some classes of mappings*, II, Rev. Roum. de Math. Pure et Appl.
233. A. ISTRĂȚESCU and V. ISTRĂȚESCU, *Some remarks on a class of semigroup of operators II* (va apare în Rend. Atti dei Lincei).
234. V. ISTRĂȚESCU, *Über die Banachräume mit zählbarer Basis*, I, Rev. de Math. Pures et Appl., 7, 3, 481 — 482 (1962).
235. V. ISTRĂȚESCU, and I. Săcuiu *Characteristic matrices and their applications to the solution of a difference equation in two variables*, An. Univ. Buc., 12, 87 — 91 (1963).
236. V. ISTRĂȚESCU, *Über die Banachräume mit zählbarer Basis*, II, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., IX, 5, 431 — 434 (1964).
237. V. ISTRĂȚESCU, *On nuclear operators*, Rev. Roum., de Math. Pures et Appl., IX, 5, 465 — 478 (1964).
238. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra operatorilor cuasicompacți*, I — II, St. cerc. mat., 17, 9, 1425 — 1428; (1965); 18, 2, 297 — 300 (1966).
239. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra algebrilor de funcții lipschitziene I*, St. cerc. mat., 17, 3, 407 — 414 (1965).
240. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra algebrilor de funcții lipschitziene II*, St. cerc. mat., 17, 6, 843 — 946 (1965).
241. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra unei proprietăți a operatorilor complet continui*, St. cerc. mat., 17, 2, 265 — 270 (1965).
242. V. ISTRĂȚESCU, T. SAITÔ and T. YOSHINO, *On a class of operators*, Tohoku Math. J., 18, 4, 410 — 413 (1966).

243. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra teoriei spațiilor invariante*, I, St. cerc. mat., **18**, 10, 1533 — 1542 (1966).
244. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra operatorilor regularizabili*, St. cerc. mat., **18**, 9, 1155 — 1157 (1966).
245. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra unei clase de operatori regularizabili II*, St. cerc. mat., **18**, 10, 1287 — 1292 (1966).
246. V. ISTRĂȚESCU, *On some hyponormal operators*, Pacific J. Math., **22**, 2, 413 — 417 (1967).
247. V. ISTRĂȚESCU, *Remarks on conditions implying normality*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XII**, 9, 1293 — 1295 (1967).
248. V. ISTRĂȚESCU, *On some subspace for operators of class (N) I*, Atti Accad. Naz. Lincei, **XLIII**, 305 — 306 (1967).
249. V. ISTRĂȚESCU, *Banach spaces with a basis III*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XII**, 10, 1479 — 1481 (1967).
250. V. ISTRĂȚESCU, *Operatori hiponormali I*, St. cerc. mat., **19**, 3, 423 — 437 (1967).
251. V. ISTRĂȚESCU, *Operatori hiponormali II*, St. Cerc. Mat., **19**, 3, 439 — 449 (1967).
252. V. ISTRĂȚESCU, *A remark on a class of power bounded operators in Hilbert space*, Acta Sci. Math. Szeged, **XXIX**, 3 — 4, 311 — 312 (1968).
253. V. ISTRĂȚESCU, *A note on the spectra of group commutators*, Boll. UMI, 4 — 5, 527 — 529 (1968).
254. V. ISTRĂȚESCU, *Note on a theorem of Fuglede and Kleinecke-Shirocov*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIII**, 5, 665 — 668 (1968).
255. V. ISTRĂȚESCU, *A note on the variation of spectra*, Rev. Roum. Math., Pures et Appl., **XIII**, 5, 661 — 664 (1968).
256. V. ISTRĂȚESCU, *Some remarks on the spectra and numerical range*, Comm. Math. Univ. Carolinae, **9**, 4, 527 — 531 (1968).
257. V. ISTRĂȚESCU, *On operators of class (N)*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIII**, 3, 343 — 346 (1968).
258. V. ISTRĂȚESCU, *Weyl's theorem for a class of operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIII**, 8, 1103 — 1105 (1968).
259. V. ISTRĂȚESCU, *Operatori hiponormali III*, St. cerc. mat., **20**, 8, 1159 — 1168 (1968).
260. V. ISTRĂȚESCU, *Remark on Schwarznorm for operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIV**, 3, 359 — 360 (1969).
261. V. ISTRĂȚESCU, *On Schauder Bases I*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **XVI**, 1, 49 — 50 (1969).
262. V. ISTRĂȚESCU, *On maximum theorem for operators functions*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIV**, 7, 1025 — 1029 (1969).
263. V. ISTRĂȚESCU, *On some normaloid operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XIV**, 9, 1289 — 1293 (1969).
264. V. ISTRĂȚESCU, *On dissipative elements in Banach algebras I*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XV**, 5, 717 — 720 (1970).
265. V. ISTRĂȚESCU, *On a lemma of O'Raifeartaigh and Segal*, J. Indian Math. Soc., **33**, 365 — 366 (1969).
266. V. ISTRĂȚESCU, *On subharmonicity theorem for operator functions*, Boll. UMI, ser. IV, **II**, 5, 365 — 366 (1969).
267. V. ISTRĂȚESCU, *Some remarks on probabilistic metric spaces I*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XV**, 7 (1970).
268. V. ISTRĂȚESCU, *On adjoint abelian operators on Banach spaces*, Rev. Roum. Math., Pures et Appl., **XV**, 8 (1970).
269. V. ISTRĂȚESCU, *Some remarks on the Weyl spectrum*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XV**, 9 (1970).
270. V. ISTRĂȚESCU, *On Schwarz norms for operators*, Atti Accad. Naz. Lincei, **XLVIII**, 2, 116 — 119 (1970).
271. V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators*, Math. Ann., **188**, 227 — 232 (1970).
272. V. ISTRĂȚESCU, *On a class of normaloid operators*, Math. Zeit., **124**, 199 — 202 (1972).
273. V. ISTRĂȚESCU, *On the theory of Weyl spectrum I*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **7** (1972).
274. V. ISTRĂȚESCU and A. ISTRĂȚESCU, *On the theory of fixed points for some classes of mappings VI*, Atti Accad. Naz. Lincei, **LII**, 6, 871 — 874 (1972).
275. V. ISTRĂȚESCU, and A. ISTRĂȚESCU, *On a generalization of collectively compact operators I*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **1** (1972).
276. V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators I*, Mathematica Balkanica, **2** (1972).
277. V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators II*, (Va apare în Proc. Japan Acad. Sci.,).

278. V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators I*, Atti Accad. Naz. dei Lincei, LII, 6, 526 — 528 (1972).
279. V. ISTRĂȚESCU, *On some classes of operators VI*, Rev. Roum. Math. Pure et Appl., 10 (1973).
280. V. ISTRĂȚESCU, *Some remarks on a class of Semigroups of operators*, I. Z. Wahrsch. Geb., 26, 241 — 243 (1973).
281. V. ISTRĂȚESCU, (in colab). *On the theory of Weyl spectrum II (The Weyl spectrum in von Neumann algebras)* (va apare)
282. V. ISTRĂȚESCU, *On the theory of invariant subspace (va apare); Introducere în teoria punctelor fixe*, Editura Academiei, R.S.R., 1973.
283. B. JAMISON, *Eigenvalues of modulus 1*, Proc. A.M.S., 16, 375 — 377 (1965).
284. R. C. JAMES, *Inner products in normed linear spaces*, Bul. A.M.S., 53, 559 — 566 (1947).
285. B. E. JOHNSON, *A commutative semi-simple annihilator Banach Algebra which is not dual*, Bul. A.M.S., 73, 407 — 409 (1967).
286. I. KAPLANSKY, *Product of normal operators*, Duke Math. J., 20, 257 — 260 (1953).
287. D. C. KLEINECKE, *On operator commutators*, Proc. A.M.S., 8, 535 — 536 (1957).
288. D. C. KLEINECKE, *Almost-finite compact and inessential operators*, Proc. A.M.S., 14, 863 — 868 (1963).
289. O. D. KELLOGG, *On the existence and closure of sets of characteristic functions*, Math. Ann., 86, 14 — 17 (1922).
290. T. KATO, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, Journ. d'analyse Math., VI, 261 — 322 (1958).
291. T. KATO, *Some mapping theorem for numerical range*, Proc. Japan. Acad., 41, 652 — 655 (1965).
292. T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1966.
293. D. KOEHLER and P. ROSENTHAL, *On isometries of normed linear spaces*, Studia Math., 36, 213 — 216 (1970).
294. D. KOEHLER, *A note on some operator theory in certain semi-inner product spaces*, Proc. A.M.S., 30, 363 — 366 (1971).
295. S. KAKUTANI, *A generalization of Browder's fixed theorem*, Duke Math. J., 8, 457 — 459 (1941).
296. S. KAKUTANI, *A proof of the Hahn-Banach Theorem via a fixed point theorem* (va apare).
297. S. KAKUTANI, *An example concerning uniform boundedness of spectral measures*, Pacific J. Math., 4, 363 — 372 (1954).
298. C. KURATOWSKI, *Sur les espaces complètes*, Fund. Math., 15, 301 — 309 (1930).
299. K. KITANO, *A note on invariant subspaces*, Tohoku Math. J., 21, 144 — 151 (1969).
300. K. KITANO, *Invariant subspaces of some nonselfadjoint operators*, Tohoku Math. J., 20, 313 — 321 (1968).
301. R. KIPPENHAM, *Über den Wertewort einer Matrix*, Math. Nachr., 6, 193 — 228 (1951—1952).
302. M. KREIN, *Teoria prelungirilor autoadjuncte ale operatorilor hermitici semimărginiți și aplicațiile ei*, Analiză și aplicații, Ed. Tehnică, București (1959). (trad. din Mat. sb., 20 (62), 2(1947), 21 (3) (1947)).
303. M. KREIN and I. C. GOHBERG, *Theory of Volterra operators in Hilbert space and its applications*, Moscova, 1966.
304. I. KAPLANSKY, *Dual rings*, Ann. of Math., 2, 689 — 701 (1948).
305. G. LUMER, *Semi-inner product spaces*, Trans. A.M.S., 100, 29 — 43 (1961).
306. G. LUMER, *Spectral operators, hermitian operators and bounded groups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 25, 75 — 85 (1964).
307. G. LUMER, *Isometries of reflexive Orlicz spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 13, 99 — 109 (1969).
308. G. LUMER and R. S. PHILIPS, *Dissipative operators in a Banach space*, Pacific J. Math., 11, 679 — 698 (1961).
309. V. I. LOMONOSOV, *Ob invariantnih podprostranstviah semeistv operatorov commutiruiuschih s upolne neprerivnih*, Funct. Analiz, i ego prolojenia, 7 (3), 55 — 56 (1973).
310. Y. I. LIUBIČ, *Almost periodic functions and spectral analysis of operators*, D.A.N., 132, 518 — 520 (1960).
311. Y. I. LIUBIČ, *On conditions for complete systems of eigenvectors of correct operators*, Uspehi Mat. Nauk., 18, 165 — 171 (1963).
312. Y. I. LIUBIČ, *Conservative operators*, Uspehi Mat. Nauk., 20, 221 — 225 (1965).
313. P. D. LAX, *Symmetrizable linear transformations*, Commun. Pure Appl. Math., 7, 633 — 647 (1954).
314. L. S. LOMONT and P. MENDELSON, *The Wigner unitary-antiunitarity theorem*, Ann. of Math., 73, 548 — 559 (1963).
315. D. C. LAY, *Characterization of the essential spectrum of F*, Browder, Bull. A.M.S., 74, 246 — 248 (1968).

316. D. C. LAY, *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect*, Math. Ann., **184**, 197 — 214 (1970).
317. A. LEBOW, *On von Neumann's theory of spectral sets*, J. Math. Anal. Appl., **7**, 64 — 90 (1963).
318. A. LEBOW, *A power bounded operator that is not polynomially bounded*, Mich. Math. J., **15**, 397 — 399 (1968).
319. A. LEBOW and M. FIKELSTEIN, *A Note on „ $N^{\text{th}}$  roots of operators”* Proc. A.M.S., **21** (1), 250 (1969).
320. T. LALESCO, *Sur l'ordre de la fonction entier  $D(\lambda)$  de Fredholm*, C. R. Paris, **145** (1907), 906 — 907.
321. T. LALESCO, *Introducere la teoria ecuațiilor integrale*, București, Ed. Academiei, 1956.
322. T. LALESCU, *Les classes des noyaux symétrisables*, Bull. Soc. Math. France, **XLV**, 144 — 149 (1917).
323. Y. I. LIUBIČ and V. I. MATAEV, *On operators with separate spectrum*, Mat. Sb., **56** (98), 4, 433 — 468 (1962).
324. L. LOOMIS, *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.
325. G. LUECKE, *A note on operators satisfying condition  $(G_1)$  (va apare)*.
326. G. LUECKE, *Operators satisfying condition  $(G_1)$  Locally*, Pacif. J. Math., **40**, 629 — 639 (1972).
327. G. LUECKE, *Topological properties of paranormal operators*, Trans. A.M.S. (va apare).
328. E. R. LORCH, *The integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces*, Trans. A.M.S., **49**, 18 — 40 (1941).
329. G. LEAF, *A spectral theory for a class of linear operators*, Pacific J. Math., **13**, 141 — 155 (1963).
330. C. H. MENG, *On the numerical range of an operator*, Proc. A.M.S. **14**, 167 — 171 (1963).
331. C. H. MENG, *A condition that a normal operator has a closed numerical range*, Proc. A.M.S., **8**, 57 — 58 (1957).
332. K. MAURIN, *Metodi gihbertovo prostranstva*, Ed. Mir. Moscova, 1965.
333. R. T. MOORE, *Adjoint numerical ranges and spectra of operators on locally convex spaces*, Bul. A. M. S., **75**, 85 — 90 (1969).
334. R. T. MOORE, *Hermitian functionals on  $B^*$ -algebras and duality characterizations of  $C^*$ -algebras*, Trans. A.M.S., **162**, 253 — 266 (1971).
335. C. M. Mc GREGOR, *Finite dimensional normed space with numerical index 1*, J. London. Math. Soc., (2), **3**, 717 — 721 (1971).
336. M. Mc GREGOR, *Operator Norms determined by their numerical ranges*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **17**, 249 — 255 (1971).
337. P. MEYER-NIEBERG, *Invariante Unterräume von polynom kompakten Operatoren*, Arch. Math., (Basel) **19**, 180 — 182 (1968).
338. S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*, Gauthier Villars, Paris, 1952.
339. B. MOYLS and M. MARCUS, *Field convexity of a square matrix*, Proc. A.M.S., **6**, 981 — 983 (1955).
340. B. MOREL, *A decomposition for some operators (va apare)*.
341. B. MORREL and P. MUHLY, *Centered operators (va apare)*.
342. G. MARINESCU, *Operații relativ complet continue*, St. cerc. mat., **1** — 2, 107 (1951).
343. M. A. NAIMARK, *Normed rings*, P. Noordhoff, Groningen, 1960.
344. J. NASH, *Imbedding problem for Riemann Manifolds*, Ann. of Math., **63** (1954).
345. J. I. NIETO, *On the essential spectrum of symmetrizable operators*, Math. Ann., **178**, 145 — 153 (1968).
346. J. I. NIETO, *On Fredholm operators and the essential spectrum of singular integral operators*, Math. Ann. **163**, 18 — 49 (1968).
347. J. I. NIETO, *Sur un théorème d'interpolation de J. Lions et J. Peetre*, Canad. Math. Bull., **14** (3), 373 — 376 (1971).
348. J. D. NEWBURGH, *The variation of spectra*, Duke Math. J., **18**, 165 — 176 (1951).
349. S. M. NIKOLSKI, *Linear equations in normed linear spaces*, Izv. Akad. Nauk. SSSR., Ser. Mat. **7** (1943), 147 — 166 (în rusește).
350. E. NELSON, *Analytic vectors*, Ann. of Math., **70**, 572 — 615 (1959).
351. E. NELSON and W. F. STINESPRING, *Representation of elliptic operators in an enveloping algebra*, Amer. J. Math., **81**, 3, 547 — 560 (1959).
352. E. NELSON, *The distinguished boundary of the unit operator ball*, Proc. A.M.S., **12**, 994 — 995 (1961).
353. R. D. NUSSBAUM, *Spectral mapping theorem and perturbation theorems for Browder's essential spectrum*, Trans. A.M.S. **150**, 445 — 455 (1970).
354. R. D. NUSSBAUM, *The radius of the essential spectrum*, Duke Math. J., **37**, 473 — 478 (1970).
355. B. SZ.-NAGY, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*,

- Appendix to *Leçons d'analyse fonctionnelle*, by F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Kiado, Budapest, 1955.
356. B. SZ.-NAGY, *Completely continuous operators with uniformly bounded iterates*, Magyar Tud. Akad. Kutató Int. 4, 89 — 93 (1959).
  357. B. SZ.-NAGY and C. FOIAŞ, *On certain classes of power bounded operators in Hilbert space*, Acta Math. Sci (Szeged), 27, 17 — 25 (1966).
  358. E. NELSON, *Operants: A functional calculus for non commuting operators. Papers in honour of M. Stone*, Springer-Verlag, 1970.
  359. N. SZ.-NAGY and C. FOIAŞ, *Harmonic Analysis of operators on Hilbert spaces*, North-Holland, 1970.
  360. B. SZ.-NAGY and C. FOIAŞ, *Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et l'opérateur adjoint*, Acta math. Sci. (Szeged), 20, 91 — 96 (1959).
  361. N. NIEMINEN, *A condition for the self-adjointness of an operator*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Nr. 316, 3 — 5 (1962).
  362. J. VON NEUMANN, *Functional operators*, I, II, Princeton, 1950.
  363. J. VON NEUMANN, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Räumes*, Math. Nachr., 4, 258 — 281 (1951).
  364. A. E. NUSSBAUM, *Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space*, Duke Math. J., 31, 33 — 44 (1964).
  365. A. E. NUSSBAUM, *Quasi-analytic vectors*, Archiv für Math., 6, 179 — 191 (1965).
  366. A. E. NUSSBAUM, *A note on quasi-analytic vectors*, Studia Math. XXXIII, 306 — 309 (1969).
  367. M. NICOLSCU, *Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire*, Studia Math., XVI, 353 — 363 (1958).
  368. M. NICOLSCU, *Contributions à l'analyse attachée à un opérateur linéaire dans une algèbre normée*, Trudi Tbiliskogo matematikesskogo Instituta, XXVIII, 143 — 157 (1962).
  369. G. H. ORLAND, *On a class of operators*, Proc. AMS, 15, 75 — 80 (1964).
  370. T. W. PALMER, *Characterizations of  $C^*$ -algebras*, Bull. A.M.S., 74, 538 — 540 (1968).
  371. T. W. PALMER, *Characterizations of  $C^*$ -algebras II*, Trans. A.M.S. 148, 577 — 588 (1970).
  372. T. W. PALMER, *The Gelfand-Naimark pseudo-norm on Banach  $*$ -algebras*, Journ. Lond. Math. Soc., 3, 59 — 66 (1971).
  373. T. W. PALMER, *Unbounded normal operators on Banach spaces*, Trans. A.M.S., 133 (1), 385 — 414 (1968).
  374. T. W. PALMER, *Unbounded Normal Operators on Banach spaces*, Ph. D. Harvard Univ., 1965.
  375. T. W. PALMER, *Real  $C^*$ -algebras*, Pacif. J. Math., 35 (1), 195 — 205 (1970).
  376. R. PALAIS, *Seminar on Atiyah-Singer Index theorem*, Princeton.
  377. C. R. PUTNAM, *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math. 73, 127 — 131 (1951).
  378. C. R. PUTNAM, *On normal operators in Hilbert spaces*, Amer. J. Math., 73, 357 — 362 (1951).
  379. C. R. PUTNAM, *Commutators and normal operators*, Port. Math., 17, 59 — 62 (1958).
  380. C. R. PUTNAM, *Commutators, perturbations and unitary spectra*, Acta Math., 106, 215 — 232 (1962).
  381. C. R. PUTNAM, *On the structure of semi-normal operators*, Bul. A.M.S., 69, 818 — 819 (1963).
  382. C. R. PUTNAM, *On the spectra of semi-normal operators*, Trans. A.M.S., 119, 509 — 523 (1965).
  383. C. R. PUTNAM, *An inequality for the area of hyponormal spectra*, Math. Zeitschr., 116, 323 — 330 (1970).
  384. C. R. PUTNAM, *The spectra of subnormal operators*, Proc. A.M.S., 28, 473 — 477 (1971).
  385. C. R. PUTNAM, *The spectra of completely hyponormal operators*, Amer. J. Math., 93, 699 — 708 (1971).
  386. C. R. PUTNAM, *Commutation Properties of Hilbert Space. Operators*, Ergeb. Math. und Ihrer Grenzgebiete, 36, Berlin, 1967.
  387. C. R. PUTNAM and A. WINTNER, *The orthogonal group in Hilbert space*, Amer. J. Math., 74, 52 — 78 (1952).
  388. C. R. PUTNAM and A. WINTNER, *On the spectra of group commutators*, Proc. A.M.S., 9, 360 — 362 (1958).
  389. H. RUBIN and M. H. STONE, *Postulates for generalizations of Hilbert spaces*, Proc. A.M.S., 4(4), 611 — 616 (1953).
  390. M. ROSENBLUM, *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc., 33, 376 — 377 (1958).
  391. H. RADJAVI, *Structure of  $A^* A - A A^*$* , J. Math. Mech., 16, 19 — 26 (1966).
  392. G. C. ROTA, *On models for linear operators*, Commun. Pure Appl. Math., 13, 469 — 472 (1960).
  393. G. C. ROTA, *Note on the invariant subspaces of linear operators*, Rend. Circ. Math. din Palermo, 8, 1 — 3 (1959).
  394. B. RUSSO, *Unimodular contractions in Hilbert spaces*, Pacific J. Math., 26, 163 — 169 (1968).

395. B. RUSSO and H. A. DYE, *A note on unitary operators in  $C^*$ -algebras*, Duke Math. J., **33**, 413 — 416 (1966).
396. A. F. RUSTON, *Operators with Fredholm theory*, J. London Math. Soc., **29**, 318 — 326 (1954).
397. F. RIESZ and B. SZ.-NAGY, *Leçon d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952.
398. P. ROSENTHAL, *Completely reducible operators*, Proc. A.M.S., **19** (4), 826 — 830 (1968).
399. P. ROSENTHAL, *A note on unicelular operators*, Proc. A.M.S., **19** (2), 505 — 506 (1968).
400. T. RADO, *Subharmonic functions*, Ergebnisse der Math. und Ihr. Grenzgebiete, 5.1, Springer Verlag, Berlin, 1937.
401. W. REID, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. J., **18**, 41 — 56 (1951).
402. G. RICKART, *General theory of Banach algebra*, Princeton, 1960.
403. J. R. RINGROSE, *Superdiagonal forms for compact linear operators*, Proc. Lond. Math. Soc., (3), **12**, 367 — 384 (1962).
404. J. ROBERTSON, *On wandering subspaces of unitary operators*, Proc. A.M.S., **16** 233 — 236 (1965).
405. R. RAGHAVENDRAN, *Toeplitz-Hausdorff theorem on numerical ranges*, Proc. A.M.S., **20**, 284 — 285 (1969).
406. W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Book. Company New York.
407. W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, Book. Company.
408. W. RUDIN, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publ. Inc. New York.
409. P. B. RAMANUJAN, *On operators of class  $(N, k)$* , Proc. Camb. Philos. Soc., **67**, 141 — 142 (1970).
410. T. SAITÔ, *On factorization of hyponormal operators*, (va apare).
411. G. E. SHILOV, *Mathematical Analysis*, Moskva, 1961.
412. B. SCHMIDT, *Spectrum numerischer wertebereich und ihre maximaum prinzip in Banachalgebren*, Manuscripta Math., **2**, 191 — 202 (1970).
413. B. SCHMIDT, *Über die Ecken des Numerischen Wertebereichs in einer Banachalgebra*, Math. Zeitschr. I, **126**, 47 — 50 (1972).
414. B. SCHMIDT, *Über die Ecken des Numerischen Wertebereichs in einer Banachalgebra II*, Matz. Zeitschr. **127**, 186 — 190 (1972).
415. M. H. STONE, *On one-parameter unitary groups in Hilbert space*, Ann. of Math., **33**, 643 — 648 (1932).
416. M. H. STONE, *On unbounded operators in Hilbert space*, Journ. Ind. Math. Soc., **15**, 155 — 192 (1951).
417. M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc., New York, (1932).
418. D. SARASON, *Invariant subspaces and unstarred operator algebras*, Pacific. J. Math., **17** (3), 511 — 517 (1966).
419. M. SCHECHTER, *Invariance of the essential spectrum*, Bull. A., M. S., **71**, 365 — 367 (1965).
420. M. SCHECHTER, *On the spectra of operators on Tensor Products*. (va apare).
421. M. SCHECHTER and L. COBURN, *Joint spectra and interpolation of operators*, J. of Funct. Anal., **2** (1968).
422. M. SCHECHTER, *On the Essential spectrum of an arbitrary operator*, I, J. Math. Anal. Appl., **13** (2), 205 — 215 (1966).
423. M. SCHECHTER and S. KANIEL, *Spectral theory for Fredholm operators*, Commun. Pure Appl. Math., **16**, 423 — 448 (1963).
424. M. SCHECHTER, *Basic theory of Fredholm operators*, Ann. Sc. Norm. Sup Pisa, **21**, 361 — 380 (1967).
425. M. SCHECHTER, *Operators obeying Weyl's theorem*. Scripta Math. XXIX, **1** — 2, 67 — 75.
426. M. SCHECHTER, *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971.
427. M. SCHECHTER and A. LEBOW, *Semigroups of operators and measures of noncompactness*, J. Funct. Anal., **7**, 1 — 26 (1971).
428. M. SCHECHTER and J. SHAPIRO, *A generalized operational calculus developed from Fredholm theory*, Trans. A.M.S., **175**, 439 — 467 (1973).
429. M. SCHECHTER, *The conjugate of a product of operators*, J. Funct. Anal., **6**(1) 26 — 28 (1970).
430. H. H. SCHAEFER, *Eine Bemerkung zur Existenz invarianter Teilräume linearer Abbildungen*, Math. Zeitschr., **82**, 90 (1963).
431. B. SIMON, *The theory of semi-analytic vectors; a new proof. of a theorem of Masson and McClary*, Ind. Math. J., **20** (12), 1143 — 1151 (1971).
432. B. SIMS, *A characterization of Banach \* star-algebras by numerical ranges*, Bull. Australian Math. Soc., **4**, 193 — 200 (1971).
433. N. SUZUKI, *Reduction theory of operators on Hilbert space*, Indiana Univ. Math. J., **20**, 953 — 958 (1971).
434. N. SUZUKI, *On the irreducibility of weighted shift*, Proc. A.M.S., **22** (3), 579 — 581 (1969).

435. N. SUZUKI, *The structure of spectral operators with completely imaginary part.*, Proc. A.M.S., **22** (1), 82 — 84 (1969).
436. N. SUZUKI, *The algebraic structure of non-selfadjoint operators*, Acta Math. Sci., (Szeged), **27**, 173 — 184 (1966).
437. T. SAITÔ, *Numerical ranges of tensor products of operators*, Tohoku Math. J., **19**, 98 — 100 (1967).
438. T. SAITÔ, *Operators satisfying the growth condition ( $G_1$ )*, Proc. Japan. Acad., **47**, 64 — 66 (1971).
439. T. SAITÔ and YOSHINO T., *On a conjecture of Berberian*, Tohoku Math. J., **17**, 147 — 149 (1965).
440. T. SAITÔ, *Hyponormal operators*, (unpublished manuscript).
441. T. SAITÔ, *Some remarks to Ando's theorem*, Tohoku Math. J., **18**, (2) (1966).
442. T. SAITÔ, *Hyponormal operators and related topics*, Lectures Notes, Tulane Univ., 1971.
443. I. H. SETH, *On hyponormal operators*, Proc. A.M.S., **17**, 998 — 1101 (1966).
444. I. H. SETH, *Some results on hyponormal operators*, Rev. Roum. Math. Pure et Appl., **15**, 395 — 398 (1970).
445. I. H. SETH, *Quasi-hyponormal operators* (va apare în Rev. Roum. Math. Pure et Appl.).
446. J. G. STAMPFLI, *Hyponormal operators*, Pacific J. Math., **12**, 1453 — 1458 (1962).
447. H. G. STAMPFLI, *Hyponormal operators and spectral density*, Trans. A. M. S., **117**, 469 — 476 (1965).
448. J. G. STAMPFLI, *Minimal range theorems for operators with thin spectra*, Pacific J. Math., **23**, 601 — 612 (1967).
449. J. G. STAMPFLI, *Roots of scalar operators*, Proc. A.M.S., **13**, 796 — 798 (1962).
450. J. G. STAMPFLI, *Extreme points of the numerical range of a hyponormal operator*, Mich. Math. J., **13** (1966), 87 — 89.
451. J. G. STAMPFLI, *A local spectral theory for operators*, I, J. Funct. Analysis, **4**, 1 — 10 (1969).
452. J. G. STAMPFLI, *A local spectral theory for operators*, II, Bull. A.M.S., **75**, 803 — 806 (1969).
453. J. G. STAMPFLI, *A local spectral theory for operators*, III, Trans. A. M. S., **168**, 133 — 151 (1972).
454. J. G. STAMPFLI, *A local spectral theory for operators*, IV, Indiana Univ. Math. J., **22**, (2) 159 — 167 (1972).
455. J. G. STAMPFLI, *The norm of a derivation*, Pacific J. Math., **33** (3), 737 — 749 (1970).
456. J. G. STAMPFLI, *Perturbation of the shift*, Journ. London Math. Soc., **40** (2), 345 — 347 (1965).
457. J. G. STAMPFLI, *Adjoint abelian operators on Banach spaces*, Canad. J. Math., **21**, 505 — 512 (1969).
458. J. G. STAMPFLI and J. P. WILLIAMS, *Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra*, Tôhoku Math. J., **20**, 417 — 424 (1968).
459. J. G. STAMPFLI, *An extreme point theorem for inverses in A Banach algebra with identity*, Proc. Camb. Phil.-Soc., **63**, 993 — 994 (1967).
460. M. SCHREIBER, *A functional calculus for general operators in Hilbert space*, Trans. A.M.S., **87**, 108 — 118 (1958).
461. M. SCHREIBER, *Numerical range and spectral sets*, Mich. Math. J. **10**, 283 — 288 (1963).
462. F. SIROKOV, *Proof of a conjecture of Kaplansky*, Uspehi Mat. NAUK, **11** (4), 167 — 168 (1956).
463. I. M. SINGER and J. WERMER, *Derivations on commutative normed algebras*, Math. Ann., **129**, 260 — 264 (1955).
464. I. SINGER, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, 1973.
465. J. SCHWARTZ, *On spectral operators in Hilbert spaces with compact imaginary part.*, Comm. Pure Appl. Math., **15**, 95 — 97 (1962).
466. J. SCHWARTZ, *Subdiagonalization of operators in Hilbert spaces with compact imaginary part*, Comm. Pure Appl. Math., **15**, 159 — 172 (1962).
467. J. SCHWARTZ, *Some results on the spectra and spectral resolution of class of singular integral operators*, Commun Pure Appl. Math., **15**, 75 — 90 (1962).
468. G. SZEGÖ, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsbericht der Berlin Math. Gess., **23**, 50 — 64 (1924).
469. W. SIKONIA, *The von Neumann converse of Weyl's theorem*, Indiana Univ. Math. Journ., **21** (1971).
470. H. SHAEFER, *Eine Bemerkung zur Existenz invarianter Teilräume linearer Abbildungen*, Math. Zeitschr., **82**, 90 (1963).
471. R. SCHATTEN, *Norms ideals of completely continuous operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
472. G. A. SUKHOMLINOV, *Analytic functionals*, Bull. M. G. U. Al., **2**, (1937).
473. W. F. STINESPRING, *Positive functions on C\*-algebras*, Proc. A. M. S., **6**, 211 — 216 (1955).
474. A. M. SINCLAIR, *Eigenvalues in the boundary of the numerical range*, Pacific J. Math., **35**, 231 — 234 (1970).

475. A. M. SINCLAIR, *The states of a Banach algebra generate the dual*, Proc. Edinburgh. Math. Soc., **17** (2), 341 — 44 (1971).
476. A. M. SINCLAIR, *The Banach algebra generated by Hermitian Operator*, Proc. London. Math. Soc., **24** (3), 681 — 91 (1972).
477. A. M. SINCLAIR, *The norm of a Hermitian element in a Banach algebra* (va apare).
478. V. SADOVSKI, *A fixed-point principle*, Functionali Analiz i Prilozh., **1**, 74 — 76 (1967).
479. O. TEICHMÜLLER, *Zeitschr. für Phys.* (1937).
480. O. TÖEPLITZ, *Das algebraische analogon zu einem Satze von Fejer*, Math. Zeitschr., **2**, 187 — 197 (1918).
481. A. E. TAYLOR, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons., 1958.
482. A. E. TAYLOR, *Spectral theory and Mittag-Leffler type expansions of the resolvent*, Proc. Int. Symp. Linear Spaces Jerusalem, 1960, 426 — 440.
483. A. E. TAYLOR, *Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators*, Math. Ann., **163**, 18 — 49 (1966).
484. A. E. TAYLOR, *The minimum of a linear operator and its use for estimates in spectral theory*, Studia Math., 131 — 132 (1963).
485. O. TAUSKY, *A note on the group commutator of  $A$  and  $A^*$* , Journ. Wash. Acad. Sci., **48**, 305 (1958).
486. O. TAUSKY, *Commutators of unitary matrices which commute with one factor*, Journ. Math. and Mech., **10**, 175 — 178 (1961).
487. R. C. THOMPSON, *On matrix commutators*, Journ. Wash. Acad. Sci., **48**, 306 — 307 (1959).
488. E. THORP and R. WHITLEY, *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*, Proc. A.M.S., **18**, 640 — 646 (1967).
489. M. E. TAYLOR, *Functions of several self-adjoint operators*, Proc. A. M. S., **19**, 640 — 646 (1968).
489. M. E. TAYLOR, *Functions of several self-adjoint operators*, Proc. A.M.S., **19**, 91 — 98 (1968).
490. C. T. IONESCU TULCEA, *Spații Hilbert*, București, Editura Academiei, 1956.
491. C. T. IONESCU TULCEA et G. MARINESCU, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, Annals of Math., **6**, 140 (1950).
492. H. G. TILLMAN, *Eine Erweiterung des Funktionalkalkül für lineare Operatoren*, Math. Ann., **151**, 424 — 430 (1963).
493. T. YOSHINO, *On the spectrum of a hyponormal operator*, Tohoku Math. J., **17**, 305 — 309 (1965).
494. T. YOSHINO, *Spectral resolution of a hyponormal operator with the spectrum on a curve*, Tohoku Math. J., **19** (1967).
495. CHR. ZENGER and E. DEUTSCH, *Inclusion domains for the eigenvalues of stochastic matrices*, Num. Math., **18**, 182 — 192 (1971).
496. CHR. ZENGER, *On convexity properties of the Bauer field of values of a matrix*, Num. Math., **12**, 96 — 105 (1968).
497. W. ZELASKO, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math., **30**, 83 — 85 (1968).
498. P. ZABREIKO, *On a theorem for subadditive functionals*, Funct. Analiz i ego prilozhenia, **3** (1), 86 — 89 (1969).
499. A. C. ZAAANEN, *Linear Analysis*, North-Holland Publ. Comp., 1953.
500. A. C. ZAAANEN, *Characterization of a Certain Class of Linear Transformations in an Arbitrary Banach space*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. I = Indag. Math., **13**, 87 — 93 (1951).
501. A. C. ZAAANEN, *Normalizable transformations in Hilbert spaces and systems of linear integral equations*, Acta. Math., **83**, 197 — 248 (1950).
502. A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, I, II, Cambridge, 1959.
503. I. VIDAV, *Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren*, Math. Zeitschr., **66**, 121 — 128 (1966).
504. I. VIDAV, *Über eine Vermutung von Kaplansky*, Math. Zeitschr., **62**, 330 (1955).
505. E. VESENTINI, *On the subharmonicity of the spectral radius*, Boll. Union Mat. Italiana, (4) (1), 427 — 429 (1968).
506. E. VESENTINI, *Maximum theorems for vector valued holomorphic functions*, Univ. of Maryland, Tech. Report, TR 69 — 132.
507. E. VESENTINI, *Maximum theorem for spectra. Related Topics Memoirs dédié a Georges de Rham*, Springer-Verlag, 1970, 111 — 117.
508. E. VESENTINI, *On Banach algebra satisfying a spectral Maximum principle*, Annali Scuola Norm Sup., **XXVI**, IV, 933 — 943 (1972).

509. W. G. VOGT, M. M. EISSEN, and G. R. BUIS, *Contraction groups and equivalent norm*, Nagoya Math. J., **34**, 149 — 151 (1969).
510. F. A. VALENTINE, *Convex sets*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1964.
511. GH. VRÂNCEANU, *Lecții de Geometrie diferențială*, vol. IV, Editura Acad. R.S.R., 1968.
512. H. WEYL, *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **27**, 373 — 392 (1909).
513. J. P. WILLIAMS, *Spectra of Products and Numerical ranges*, Journ. of Math. Anal. Appl., **17** (2), 214 — 220 (1967).
514. J. P. WILLIAMS, *Schwarz norms for operators*, Pacific J. Math., **24** (1), 181 — 189 (1968).
515. K. WISWANATH, *Normal operators on quaternionic Hilbert spaces*, Trans. A. M. S., **162**, 337 — 350 (1971).
516. R. WHITLEY, *The spectral theorem for a normal operator*, Amer. Math. Monthly, **75**, 856 — 861 (1968).
517. R. WHITLEY, *The size of the unit sphere*, Canad. J. Math., **20**, 445 — 455 (1968).
518. R. WHITLEY, *Strictly singular operators and their conjugates*, Trans. A. M. S., **113**, 252 — 261 (1964).
519. J. P. WILLIAMS, *Operators similar to their adjoints*, Proc. A. M. S., **20**, 121 — 123 (1969).
520. J. P. WILLIAMS, *Finite operators*, Proc. A. M. S., **21**, 129 — 36 (1970).
521. J. P. WILLIAMS, *On commutativity and the numerical range in Banach algebras*, J. Funct. Anal., **10**, 326 — 329 (1972).
522. J. P. WILLIAMS, *Similarity and the numerical range* (va apare).
523. J. P. WILLIAMS and T. CRIMINS, *On the numerical radius of a linear operator*, Amer. Math. Monthly, **74**, 836 — 833 (1967).
524. H. WIDOM, *On the spectrum of a Toeplitz operator*, Pacific J. Math., **14**, 365 — 375 (1964).
525. A. WITNER, *Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen*, Math. Zeitschr., **30**, 228 — 282 (1929).
526. K. K. WARNER, *A note on a theorem of Weyl*, Proc. A. M. S., **23**, 469 — 471 (1969).
527. H. WIELANDT, *Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben*, Math. Zeitschr., **50**, 93 — 143 (1944).
528. H. WAVRE, *L'iteration directe des opérateurs hermitiens et deux théories qui en dependent*, Comm. Math. Helv., **15**, 299 — 317 (1943).
529. J. WERMER, *The existence of invariant subspaces*, Duke Math. J., **19**, 615 — 622 (1952).
530. F. WOLF, *Operators in Banach spaces which admits a generalized spectral decomposition*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 60=indag. Mat., **19**, 302 — 311 (1957).
531. T. T. WEST, *Riesz operators in Banach spaces*, Proc. London Math. Soc., **11** (3), 131 — 140, (1966).
532. T. T. WEST, *The decomposition of Riesz operators*, Proc. London Math. Soc., **16** (3), 737 — 752 (1966).
533. A. WILANSKY, *Functional Analysis*, Blaisdel, 1964.
534. P. LELONG, *La convexité et les fonctions analytiques des plusieurs variables complexes*, J. Math. Pure et Appl., **31**, 191 — 219 (1952).
535. H. BREMERMAN, *Complex convexity*, Trans. Amer. Math. Soc., **821**, 17 — 51 (1953).
536. V. ISTRĂȚESCU, *Unele aplicații remarcabile ale teoremelor de punct fix*, Gazeta Mat. Seria A, **2** (1974).
537. JOHN ERNEST, *A classification, decomposition and spectral multiplicity theory for bounded operators on a separable Hilbert space* (va apare).
538. AL. GHICA, *Opera matematică*, Editura Academiei, 1969.
539. O. ONICESCU, *Calcolo delle probabilità ed applicazioni*, Veschi Editore, Roma, 1969.
540. O. ONICESCU et S. GUAȘU, *Mechanique statistique* Udine, Springer-Verlag, Wien, New York, 1971.

# INTRODUCTION INTO THE THEORY OF LINEAR OPERATORS

(Abstract)

The purpose of the present book is to provide a self-contained introduction to the theory of operators in Hilbert spaces and Banach spaces, on the one hand, and new results about classes of non-normal operators studied intensively in the recent years, on the other hand.

Chapter I gives general results regarding Hilbert spaces and Banach spaces as well an introduction into the general theory of Banach algebras. We mention, as a special feature of our treatment, the unified presentation of some fundamental theorems of linear functional analysis.

Chapter II treats the theory of numerical ranges, a notion which plays a fundamental role throughout the book. Here are presented the famous results of O. Toeplitz, F. Hausdorff, N. Aronszajn, G. Lumer, I. Vidav, T. Palmer, etc.

The notion of numerical range, for the case of Hilbert spaces, was utilized by Toeplitz and Hausdorff, who culminated by their famous result on the convexity of the numerical range. The case of Banach spaces was first considered by Lumer in his thesis held under the guidance of I. Kaplansky.

Important results were obtained by Vidav and Palmer who put forth a theorem characterizing the  $C^*$ -algebras.

An important class of operators in Hilbert spaces is the class of normal operators and for this reason it is important to know the conditions under which an operator is normal. Chapter III gives a detailed account of some results obtained in this direction.

In Chapter IV different classes of operators are studied. These classes are natural in the problem of the normality of an operator. Thus, results are given on the class considered by A. Wintner in 1929 which is called now the class of normaloid operators, i.e. operators for which the spectral radius is equal to the norm. Then, other classes are studied, such as the class of convexoid operators, the class of operators with the  $G_1$ -property, etc.

In Chapter V the problem of the existence of invariant subspaces for bounded operators is treated. The beautiful result obtained by V. Lomonosov, that every family of operators which commute with a compact operator has a common invariant subspace is presented.

Chapter VI contains the theory of symmetrizable operators on Hilbert spaces and Banach spaces with some important applications out of which we mention a simple proof of an interpolation theorem.

It should be mentioned that in this domain the Romanian contributions are very important and include those brought by the Romanian mathematician P. Sergescu. A detailed account of these contributions is given in the well-known book of T. Lalescu on the Integral Equations.

In Chapter VII some results concerning the extension of the famous result of H. Weyl on the invariance under compact perturbations of a part of the spectrum of a self-adjoint operator are reported. These results are important for they can be applied to problems of differential operators and quantum mechanics.

Chapter VIII treats the problem of the construction of equivalent norms on Banach algebra of all bounded operators in Hilbert space enjoying a property similar to that given in the lemma of Schwarz in the theory of functions of complex variable.

In Chapter IX results concerning the notion of an analytic vector for an (unbounded) operator are given as well as some generalizations. The famous result of E. Nelson giving the necessary and sufficient condition such that a symmetric operator be selfadjoint is presented using analytic vectors. Different extensions of this notion, having as model the theory of quasi-analytic functions are given; also a connection between these notions and some classes of semigroups is presented.

The object of Chapter X is to present some maximum theorems for operator valued functions.

In Chapter IX an introduction into the theory of quaternionic Hilbert spaces is given. This theory is important for applications to quantum quaternionic mechanics.

The final chapter contains some results on classes of operators having important applications in the theory of Markov processes as studied by K. Yosida and S. Kakutani.

The Appendix presents some results of interest by themselves or by the fact that they appear in the book or present some important aspects relative to some classes of operators.



# CONTENTS

	pages
<b>CHAPTER I. HILBERT SPACES AND BANACH SPACES . . . . .</b>	<b>15</b>
1. Hilbert spaces . . . . .	15
2. Bases in Hilbert spaces . . . . .	21
3. Operators on Hilbert spaces . . . . .	24
4. The adjoint of a bounded operator . . . . .	29
5. Hermitian operators . . . . .	31
6. Normal operators . . . . .	33
7. Unitary operators . . . . .	36
8. Convergence in $E$ and $\mathfrak{L}(E)$ . . . . .	37
9. Isometric operators and partial isometric operators . . . . .	41
10. Banach spaces . . . . .	42
11. Hahn-Banach theorem and Bohnenblust-Sobczyk . . . . .	44
12. Fundamental theorems . . . . .	51
13. Some applications . . . . .	55
14. The space $\mathfrak{L}(E)$ . . . . .	64
15. Special elements in $\mathfrak{L}(E)$ . . . . .	68
16. Banach algebras . . . . .	96
<b>CHAPTER II. NUMERICAL RANGE . . . . .</b>	<b>119</b>
1. The notion of numerical range . . . . .	119
2. The Hausdorff-Toeplitz theorem on vector spaces . . . . .	126
3. Numerical range in the sense of Lumer . . . . .	129
4. Examples . . . . .	142
5. Some applications . . . . .	144
6. Numerical range on Banach spaces and Banach algebras . . . . .	147
7. Hermitian and normal operators on Banach spaces . . . . .	157
8. Generalization of the notion of self-adjoint operator . . . . .	168
9. Fuglede's theorem and some applications . . . . .	171
10. Classes of elements in unitary Banach algebras; the Vidav-Palmer's theorem . . . . .	173
11. Some properties of hermitian elements . . . . .	182
12. Numerical radius and the iterates of an element . . . . .	185
<b>CHAPTER III. CONDITIONS IMPLYING NORMALITY . . . . .</b>	<b>187</b>
1. Conditions implying the property to be hermitian or unitary . . . . .	189
2. Normality conditions . . . . .	198
3. Normality conditions on infinite-dimensional spaces . . . . .	204
<b>CHAPTER IV. CLASSES OF NON-NORMAL ELEMENTS . . . . .</b>	<b>218</b>
1. Definitions and properties of some classes of non-normal elements . . . . .	218
2. Dilations and spectral sets for operators . . . . .	232
3. Operators with $G_1$ -property . . . . .	241

	Pages
4. Operators with the property $\operatorname{Re} \sigma(T) = \sigma(\operatorname{Re} T)$ . . .	254
5. Convexoid operators . . . . .	261
6. Tensor products and classes of operators . . . . .	270
<b>CHAPTER V. INVARIANT SUBSPACES AND STRUCTURE THEOREMS . . . . .</b>	<b>285</b>
1. Introduction; An existence theorem . . . . .	285
2. Suzuki's theorem and a generalization . . . . .	287
3. Completely reducible operators . . . . .	291
4. Andô's theorem and extensions . . . . .	292
5. A generalization of the notion of completely reducible operator . . . . .	295
6. The structure of polynomially compact operators . . . . .	297
7. Normal polynomially compact operators . . . . .	299
8. Shift operator; quasi-similar operators . . . . .	299
9. Classes of subspaces which reduce . . . . .	303
<b>CHAPTER VI. SYMMETRIZABLE OPERATORS . . . . .</b>	<b>307</b>
1. Inner products on Banach spaces . . . . .	307
2. Radon measures and inner products . . . . .	310
3. Symmetrizable operators on Hilbert spaces; Generalizations . . . . .	315
4. Symmetrizable operators on Banach spaces; Quasi-normalizable operators . . . . .	318
5. Some applications of symmetrizable operators and quasi-normalizable operators . . . . .	323
6. An interpolation theorem . . . . .	326
7. Some remarks concerning symmetrizable operators . . . . .	328
8. Some problems concerning symmetrizable operators . . . . .	328
<b>CHAPTER VII. WEYL'S SPECTRUM OF AN OPERATOR . . . . .</b>	<b>329</b>
1. Preliminaires. Notions and general results . . . . .	329
2. Weyl's spectrum . . . . .	332
3. von-Neumann's theorem . . . . .	349
<b>CHAPTER VIII. Schwarz's norms . . . . .</b>	<b>350</b>
1. Schwarz's norms on Hilbert spaces . . . . .	350
2. Extension to Banach spaces . . . . .	358
<b>CHAPTER IX. ANALYTIC VECTORS AND QUASI-ANALYTIC VECTORS FOR OPERATORS ON HILBERT SPACES AND BANACH SPACES . . . . .</b>	<b>361</b>
1. Analytic vectors and quasi-analytic vectors for operators on Hilbert spaces and Banach spaces . . . . .	362
2. Analytic elements in commutative Banach algebras . . . . .	363
3. Applications to self-adjoint operators . . . . .	364
4. Analytic vectors and quasi-analytic vectors for some classes of operators . . . . .	367
5. Relations between different classes of vectors . . . . .	370
6. Self-adjoint operators and $p$ -semianalytic vectors . . . . .	370
7. Classes of vectors for dissipative operators and semi-groups . . . . .	374
8. Analytic elements and quasi-analytic elements in commutative Banach algebras . . . . .	376
9. Analytic elements and quasi-analytic elements in Gelfand-Kostiuchenko spaces . . . . .	377

	pages
10. Analytic and quasi-analytic vectors for symmetrizable operators . . . . .	378
11. Friedrichs extension . . . . .	378
<b>CHAPTER X. MAXIMUM THEOREMS FOR VECTOR VALUED HOLOMORPHIC FUNCTIONS . . . . .</b>	<b>381</b>
1. Subharmonic functions . . . . .	381
2. Maximum theorems for norms . . . . .	390
3. Subharmonicity of spectral radius . . . . .	400
<b>CHAPTER XI. QUATERNIONIC HILBERT SPACES . . . . .</b>	<b>413</b>
1. Introduction . . . . .	413
2. The noncommutative quaternionic field . . . . .	413
3. Quaternionic Hilbert spaces . . . . .	414
4. Quaternionic Banach spaces . . . . .	417
5. Operators on quaternionic Hilbert spaces . . . . .	418
6. Spectral theory . . . . .	421
7. Spectral decomposition for normal operators . . . . .	424
<b>CHAPTER XII. CLASSES OF OPERATORS AND ERGODIC THEOREMS . . . . .</b>	<b>428</b>
1. Introduction . . . . .	428
2. Measure of noncompactness. $\alpha$ -contraction operators, locally $\alpha$ -contractions and uniform ergodic theorems . . . . .	428
3. Applications to Markov processes . . . . .	438
<b>APPENDIX . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>I. HERGLOTZ'S THEOREM . . . . .</b>	<b>442</b>
<b>II. "SPECTRAL MAPPING THEOREM" FOR HERMITIAN AND NORMAL OPERATORS . . . . .</b>	<b>444</b>
<b>III. FUGLEDE-PUTNAM'S THEOREM . . . . .</b>	<b>452</b>
<b>REFERENCES . . . . .</b>	<b>457</b>



Redactor ELENA HENNING  
Tehnoredactor FELICIA BOLOCAN

---

Bun de tipar 23.XII.1974. Tiraj 1330 ex.  
Hîrtie tratată 83% gr. alb, format 16/70 × 100 de  
70g/m<sup>2</sup> Coli de tipar 30

C.Z. pentru biblioteci mari (517,43  
517.948.35

C.Z. pentru biblioteci mici (517.4  
517.94

---

Întreprinderea Poligrafică „Informația”  
str. Brezoianu nr. 23—25, București.

Republica Socialistă România  
I.P.I. c. 366

